

ise en düşük değerini temsil etmek üzere çoğunlukla canlı renklerde gösterilir. Sağlıklı bir insanın gözü kırmızı ve mavi bölgeleri kolaylıkla seçebilir ve bu şekilde akış özelliğinin yüksek veya düşük değerli bölgelerinin yerini tespit edebilir. HAD ile oluşturulmuş güzel resimlerden dolayı, hesaplamalı akışkanlar dinamiğine bazen “renkli akışkanlar dinamiği” de denir.

4-4 • DİĞER KİNEMATİK TANIMLAMALAR

Akışkan Elemanlarının Hareket veya Deformasyon Şekilleri

Akışkanlar mekaniğinde, katı mekaniğinde olduğu gibi bir eleman dört temel tip harekete veya deformasyona uğrayabilir. Bunlar Şekil 4-34'te gösterildiği gibi: (a) **ötenme**, (b) **dönme**, (c) **doğrusal şekil değiştirme** (bazen **uzama şekil değiştirmesi** denir) ve (d) **kayma şekil değiştirmesi** olarak sıralanır. Tüm bu dört tip hareketin veya deformasyonun çoğunlukla aynı anda meydana gelmesinden dolayı akışkanlar dinamiği alanında çalışmak oldukça zordur. Akışkan elemanları sürekli hareket halinde olduklarından, akışkanlar dinamiğinde akışkan elemanlarının hareketlerinin veya deformasyonlarının *birim zamana* göre tarif edilmesi daha uygundur. Burada özellikle *hızı* (birim zamandaki ötenmeyi), *açısal hızı* (birim zamandaki dönmeyi), *doğrusal şekil değiştirme hızını* (birim zamandaki doğrusal şekil değiştirmeyi) ve *kayma şekil değiştirme hızını* (birim zamandaki kayma şekil değiştirmesini) tartışacağız. Akış hesaplamalarında kullanışlı olabilmeleri için bu **deformasyon hızlarını**, hız ve hızın türevleri cinsinden ifade etmemiz gerekir.

Ötenme ve dönme, bilyardo topları gibi katı cisimlerin hareketlerinde yaygın olarak gözlemlendiklerinden kolayca anlaşılabilir (Şekil 4-1). Üç-boyutta birim zamandaki ötenmeyi tam olarak tarif edebilmek için bir vektöre ihtiyacımız vardır. Bu **birim zamandaki ötenme vektörü**, matematiksel olarak **hız vektörü** şeklinde tanımlanır. Kartezyen koordinatlarda hız vektörü,

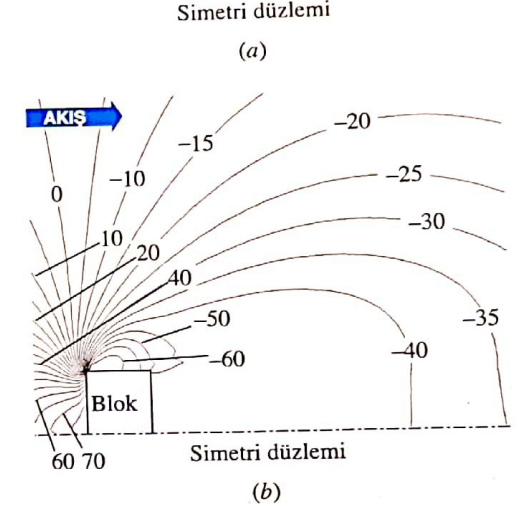
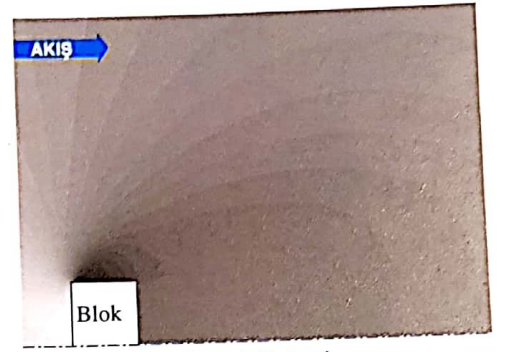
Kartezyen koordinatlarda birim zamandaki ötenme vektörü:

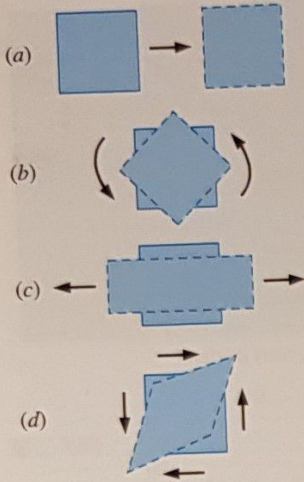
$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (4-19)$$

olarak tarif edilir. Şekil 4-34a'da, akışkan elemanı pozitif yatay yönde (x -yönünde) hareket etmiştir; bu yüzden v (ve w) sıfır iken u pozitiftir.

Bir noktada **birim zamandaki dönme** (**açısal hız**), *başlangıçta bu noktada kesişen iki dik çizginin birim zamandaki ortalama dönmesi* olarak tanımlanır. Örneğin Şekil 4-34b'de başlangıçta kare şeklindeki akışkan elemanın sol-alt köşesindeki noktayı göz önüne alalım. Sol ve alt kenar bu noktada birbirleriyle kesişmektedir ve başlangıçta bu iki kenar birbirlerine diktir. Bu çizgilerin ikisi de matematiksel olarak pozitif yön kabul edilen saatin tersi yönünde dönmektedir. Bu iki çizgi arasındaki açı (veya bu akışkan elemanı üzerinde başlangıçta birbirine dik olan *herhangi* iki nokta arasındaki açı), şekilde gösterilen katı cisim dönmesinden dolayı 90° 'de sabit kalacaktır. Bundan dolayı, her iki çizgi de aynı oranda dönecektir ve düzlem üzerinde birim zamanda meydana gelen dönme, doğrudan o düzlemdeki açısal hız olacaktır.

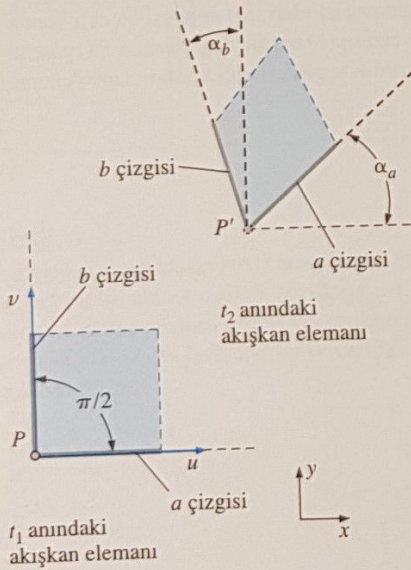
Daha genel olarak, ancak hala iki-boyutta kalmak üzere (Şekil 4-35), akışkan parçacığı dönerken ötenir ve deformasyona uğrar ve birim zamandaki dönme bir önceki paragrafta verilen tanıma göre hesaplanır. Bunun için xy -düzleminde t_1 başlangıç anında birbirine dik olarak P noktasında kesişen iki çizgi (Şekil 4-35'teki a çizgisi ve b çizgisi) ile başlayalım. $dt = t_2 - t_1$ sonsuz küçük zaman diliminde





ŞEKİL 4-34

Akışkan elemanın temel hareket veya deformasyon şekilleri: (a) ötelenme, (b) dönme, (c) doğrusal şekil değiştirme ve (d) kayma şekil değiştirme.



ŞEKİL 4-35

Şekilde çizildiği gibi ötelenen ve deforme olan bir akışkan elemanı için P noktası etrafındaki birim zamandaki dönme, başlangıçta birbirlerine dik olan iki çizginin (a çizgisi ve b çizgisi) ortalama dönmesi olarak tanımlanır.

dönen ve hareket eden bu iki çizgiyi takip edelim. t_2 anında, a çizgisi α_a açısıyla ve b çizgisi α_b açısıyla döner ve her iki çizgi de şekildeki gibi akış ile birlikte hareket eder (çizimde her iki açı da radyan olarak verilmiş ve matematiksel olarak pozitif yönde gösterilmiştir). Böylelikle $(\alpha_a + \alpha_b)/2$, ortalama dönme açısı olur ve xy-düzleminde birim zamandaki dönme ya da açısal hız, bu ortalama dönme açısının zaman göre türevidir:

Şekil 4-35'teki akışkan elemanın P noktası etrafında birim zamandaki dönmesi:

$$\omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_a + \alpha_b}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4-20)$$

w'yı α_a ve α_b açıları yerine u ve v hız bileşenleri cinsinden yazdığımız Denklem 4-20'nin sağ tarafının ispatı alıştırmalar olarak size bırakılmıştır.

Üç boyutta, akış içerisindeki bir nokta etrafında birim zamanda meydana gelen dönme için bir vektör tanımlamamız gerekir. Çünkü, birim zamandaki dönmenin büyüklüğü her bir boyutta birbirinden farklı olabilir. Üç boyutta birim zamandaki dönme vektörünün türetimi Kundu (1990) ve White (1991) gibi birçok akışkanlar mekaniği kitabında bulunabilir. **Birim zamandaki dönme vektörü, açısal hız vektörüne eşittir ve Kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibidir:**

Kartezyen koordinatlarda birim zamandaki dönme vektörü:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (4-21)$$

Doğrusal şekil değiştirme hızı, birim uzunluk başına birim zamanda meydana gelen uzunluk artışı şeklinde tanımlanır. Matematiksel olarak, bir akışkan elemanın doğrusal şekil değiştirme hızı, üzerinde doğrusal şekil değiştirmeyi ölçtüğümüz doğru parçasının başlangıç yönüne bağlıdır; bu yüzden, skaler veya vektörel bir büyüklük olarak tanımlanamaz. Bunun yerine doğrusal şekil değiştirme hızını, x_α yönü şeklinde keyfi bir yönde tanımlayalım. Örneğin, Şekil 4-36'daki PQ doğru parçasının başlangıçtaki uzunluğu dx_α 'dır ve şekilde gösterildiği gibi P'Q' doğru parçasına uzamaktadır. Verilen tanımdan hareket ederek ve Şekil 4-36'daki uzunlukları kullanarak, x_α -yönündeki doğrusal şekil değiştirme hızı,

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{P'Q' - PQ}{PQ} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\overbrace{\left(u_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \right) dt + dx_\alpha - u_\alpha dt}^{x_\alpha - \text{yönünde } P'Q' \text{'nin uzunluğu}} - \overbrace{dx_\alpha}^{x_\alpha - \text{yönünde } P'Q' \text{'nin uzunluğu}}}{dx_\alpha} \right) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \end{aligned} \quad (4-22)$$

olarak ifade edilir. Kartezyen koordinatlarda x_α -yönü, normalde üç koordinat ekseninin her birinin yönü olarak alınır, ancak bu yönlerle kısıtlı da değiliz.

Kartezyen koordinatlarda doğrusal şekil değiştirme hızı:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4-23)$$

Daha genel halde, Şekil 4-35'te gösterildiği gibi akışkan elemanı hareket ederken deformasyona da uğrar. Denklem 4-23'ün bu genel durum için de hala geçerli olduğunu gösterme işi alıştırmaya size bırakılmıştır.

Tel ve çubuk gibi katı cisimler çekildiklerinde uzar. Böyle cisimlerin bir yönde çekildiklerinde, çekme yönüne dik olan diğer yönde veya yönlerde büzıldüklerini mühendislik mekaniği dersinizden hatırlıyor olmalısınız. Bu durum akışkanlar mekaniğinde de aynıdır. Şekil 4-34c'de, ilk başta kare şeklinde olan akışkan elemanı, yatay yönde uzamakta ve düşey yönde büzülmetedir. Bu durumda doğrusal şekil değiştirme hızı yatayda pozitif, düşeyde negatiftir.

Akış sıkıştırılmaz ise, akışkan elemanın net hacmi sabit kalmalıdır. Bunun sonucu olarak, eleman bir yönde uzadığında bunun dengelenmesi için diğer yönde (veya yönlerde) buna uygun oranda büzülmalıdır. Öte yandan, sıkıştırılabilir bir akışkan elemanın hacmi, yoğunluğu azaldıkça veya arttıkça; sırasıyla, artar veya azalır. (Akışkan elemanın kütlesi sabit kalmalıdır. Ancak $\rho = m/V$ olduğundan yoğunluk ve hacim birbirleriyle ters orantılı olarak değişir.) Örneğin bir silindir içerisinde sıkıştırılmakta olan hava parçasını göz önüne alalım (Şekil 4-37). Akışkan elemanın yoğunluğu artarken, kütlesi korunacak şekilde hacmi azalacaktır. Bir akışkan elemanın birim hacim başına, birim zamanda hacminde meydana gelen artış **hacimsel şekil değiştirme hızı** olarak adlandırılır. Bu kinematik özellik, hacmin *arttığı* durumlar için *pozitif* olarak tanımlanır. Hacimsel şekil değiştirme hızının bir eş anlamlısı da **hacimsel genişleme** (dilatasyon) **hızıdır**. Loş ışığa maruz kaldığında gözünüzdeki iris tabakanın nasıl büyüdüğünü (genişlediğini) düşünerek bunu kolaylıkla hatırlayabilirsiniz. Hacimsel şekil değiştirme hızı, birbirine karşılıklı olarak dik olan üç yöndeki şekil değiştirme hızlarının toplamı olacaktır. Böylece Kartezyen koordinatlarda (Denklem 4-23) hacimsel şekil değiştirme hızı,

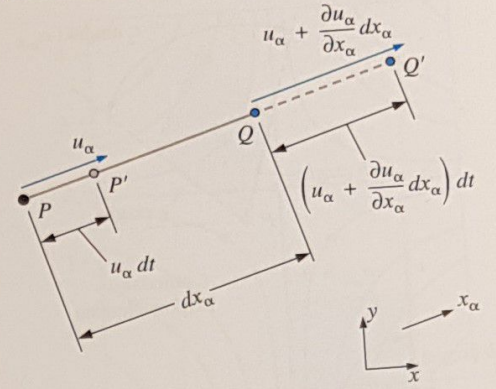
Kartezyen koordinatlarda hacimsel şekil değiştirme hızı:

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4-24)$$

olur. Denklem 4-24'teki D gösterimi, bir akışkan elemanı izleyerek hacim hakkında konuştuğumuzu vurgulamak için kullanılmıştır. Başka bir deyişle, Denklem 4-12'de olduğu gibi, akışkan elemanın maddesel hacmini ele alıyoruz.

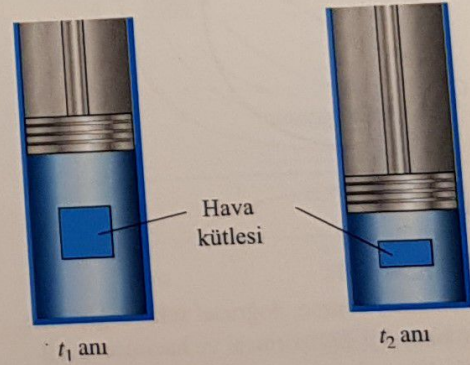
Sıkıştırılmaz bir akışta hacimsel şekil değiştirme hızı sıfırdır.

Kayma şekil değiştirmesi hızının tarif edilmesi ve anlaşılması daha zordur. Bir noktadaki **kayma şekil değiştirmesi hızı**, başlangıçta bu noktada kesişen iki dik çizgi arasındaki açıda birim zamanda meydana gelen azalmanın yarısı olarak tanımlanır. (Yarısıdır dememizin nedeni, ileride kayma şekil değiştirmesi hızı ile doğrusal şekil değiştirme hızını bir tensör altında birleştirdiğimizde daha iyi anlaşılacaktır.) Örneğin Şekil 4-34d'de kare şeklindeki akışkan elemanın sol-alt ve sağ-üst köşelerinde başlangıçta 90° olan açılar azalmaktadır; bu durum *pozitif* bir kayma şekil değiştirmesi tanımından kaynaklanmaktadır. Öte yandan, kare şeklindeki akışkan elemanın sol-üst ve sağ-alt köşelerindeki açılar, başlangıçta kare şeklinde olan akışkan elemanı şekil değiştirdikçe artmaktadır; bu da *negatif* bir kayma şekil değiştirmesidir. Bundan dolayı, kayma şekil değiştirmesi hızının sadece skaler bir büyüklük olarak tarif edilemeyeceği gibi vektörel bir büyüklük olarak da tarif edilemeyeceği açıktır. Daha doğrusu, kayma şekil değiştirmesi



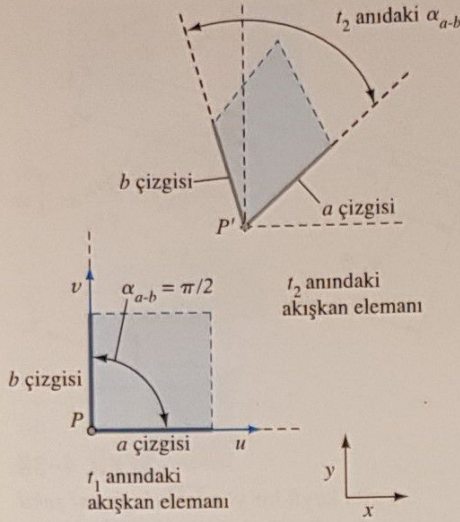
ŞEKİL 4-36

x_α gibi keyfi bir yöndeki *doğrusal şekil değiştirme hızı*, bu yönde birim uzunluk başına birim zamanda meydana gelen uzunluk artışı olarak tanımlanır. Doğru parçası *kısalıyor* olsaydı doğrusal şekil değiştirme hızı *negatif* olurdu. Burada, pozitif bir şekil değiştirme hızı doğuran PQ doğru parçasının $P'Q'$ doğru parçasına uzamasını incelenmektedir. dx_α ve dt sonsuz küçük olduklarından, hız bileşenleri ve mesafeler birinci-mertebede kesilmiştir.



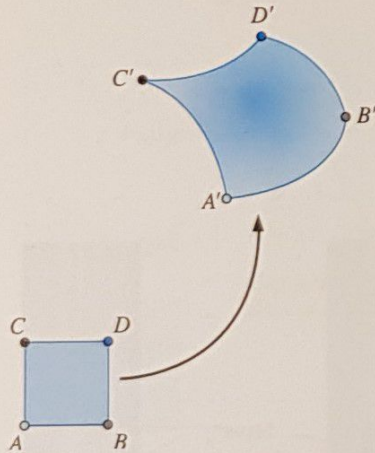
ŞEKİL 4-37

Bir piston silindir düzeneginde sıkıştırılmakta olan hava. Silindirdeki akışkan elemanın hacmi azalmaktadır. Bu durumda hacimsel şekil değiştirme hızı negatiftir.



ŞEKİL 4-38

Şekilde çizildiği gibi, ötelenen ve şekil değiştiren bir akışkan elemanı için P noktasındaki *kayma şekil değiştirme hızı* dik iki çizgi (a çizgisi ve b çizgisi) arasındaki açıda birim zamanda meydana gelen azalmanın yarısı olarak tanımlanır.



ŞEKİL 4-39

Ötelenme, dönme, doğrusal şekil değiştirme, kayma şekil değiştirme ve hacimsel şekil değiştirmeyi gösteren bir akışkan elemanı.

hızının matematiksel biçimde tam olarak tarif edilmesi için *karşılıklı olarak dik olan iki yöndeki özellikleri* gerekir. Kartezyen koordinatlardaki eksenlerin kendileri bu iş için en aşikar seçimdir, ancak bunlarla kısıtlı da değiliz. xy -düzleminde iki-boyutlu bir akışkan elemanını ele alalım. Şekil 4-38'de gösterildiği gibi eleman zamanla ötelenmekte ve şekil değiştirmektedir. Başlangıçta birbirlerine karşılıklı olarak dik iki çizgiyi (x - ve y -yönlerinde, sırasıyla a çizgisi ve b çizgisi) takip edelim. Bu iki çizgi arasındaki açı $\pi/2$ 'den (yani 90° 'den), çizimde t_2 anında α_{a-b} ile belirtilen açığa azalmaktadır. x - ve y -yönlerinde başlangıçta birbirlerine dik olan çizgiler için P noktasındaki kayma şekil değiştirme hızının, x - ve y -yönlerinde başlangıçta birbirlerine dik olan çizgiler için kayma şekil değiştirme hızı:

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha_{a-b} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4-25)$$

şeklinde verilebileceğinin ispatı alıştırma olarak size bırakılmıştır. Denklem 4-25 kolaylıkla üç boyuta genişletilebilir. Böylelikle kayma şekil değiştirme hızı,

Kartezyen koordinatlarda kayma şekil değiştirme hızı:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (4-26)$$

olarak elde edilir. Son olarak, doğrusal şekil değiştirme hızı ve kayma şekil değiştirme hızını matematiksel olarak **şekil değiştirme hızı tensörü** denilen ikinci mertebeden simetrik bir tensör altında birleştirebiliriz. Şekil değiştirme hızı tensörü Denklem 4-23'ün ve 4-26'nın bir birleşimidir:

Kartezyen koordinatlarda kayma şekil değiştirme hızı tensörü:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4-27)$$

Kayma şekil değiştirme hızı tensörü, tensör değişmezleri (invariantları), dönüşüm kuralları ve ana eksenler gibi tüm matematiksel tensör kurallarına uyar.

Şekil 4-39, sıkıştırılabilir bir akışkan akışındaki tüm olası hareketlerin ve şekil değiştirmelerin bir arada olduğu genel bir durumu (iki-boyutlu olmasına rağmen) göstermektedir. Bu anlamda; ötelenme, dönme, doğrusal şekil değiştirme ve kayma şekil değiştirme vardır. Bunun yanında, akışının sıkıştırılabilir olma niteliğinden ötürü hacimsel şekil değiştirme hızı da (dilatasyon) vardır. Şimdi akışkanlar dinamiğinin kendine özgü karmaşıklığını ve akışkan akışını tam olarak tanımlayabilmek için gerekli matematiksel derinliği daha iyi anlamış olmalısınız.

ÖRNEK 4-6

İki-Boyutlu Bir Akışta Kinematik Özelliklerin Hesaplanması

Örnek 4-1'deki daimi, iki-boyutlu hız alanını göz önüne alınız:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j} \quad (1)$$

Burada uzunluklar m, zaman s ve hızlar m/s birimindedir. Şekil 4-40'ta gösterildiği gibi $(-0.625, 1.875)$ 'te bir durma noktası vardır. Ayrıca akışın akım çizgileri de Şekil 4-40'ta çizilmiştir. Birim zamandaki ötelenme, birim zamandaki dönme, doğrusal şekil değiştirme hızı, kayma şekil değiştirme hızı ve hacimsel şekil değiştirme hızı gibi çeşitli kinematik özellikleri hesaplayınız. Akışın sıkıştırılamaz olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM Verilen bir hız alanının bazı kinematik özelliklerini hesaplayacağız ve akış alanının sıkıştırılamaz olduğunu göstereceğiz.

Kabuller 1 Akış daimidir. 2 Akış iki-boyutludur, yani hızın z-bileşeni yoktur ve u veya v , z ile değişmemektedir.

Analiz Denklem 4-19 ile verilen birim zamandaki ötelenme, Denklem 1 ile verilen hızın kendisidir. Böylece,

$$\text{Birim zamandaki ötelenme: } u = 0.5 + 0.8x \quad v = 1.5 - 0.8y \quad w = 0 \quad (2)$$

olur. Birim zamandaki dönme ise Denklem 4-21'den hesaplanır. Bu durumda, her yerde $w = 0$ olduğundan ve ne u ne de v z ile değiştiğinden, birim zamandaki dönmenin sıfırdan farklı tek bileşeni z -yönündedir. Böylece,

$$\text{Birim zamandaki dönme: } \vec{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = \frac{1}{2} (0 - 0) \vec{k} = 0 \quad (3)$$

olur. Bu durumda, akışkan parçacıklarının hareket ederken net bir dönme yapmadıkları görülüyor. (Bu önemli bir bilgidir, bu bölümde ileride ve ayrıca Bölüm 10'da daha detaylı olarak tartışılacaktır.)

Doğrusal şekil değiştirme hızları Denklem 4-22 kullanılarak herhangi bir keyfi yönde hesaplanabilir. Denklem 4-23'ten x -, y - ve z -yönlerindeki doğrusal şekil değiştirme hızları,

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.8 \text{ s}^{-1} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -0.8 \text{ s}^{-1} \quad \epsilon_{zz} = 0 \quad (4)$$

olarak elde edilir. Bu sonuçla, akışkan parçacıklarının x -yönünde *uzadığı* (pozitif doğrusal şekil değiştirme hızı) ve y -yönünde *büzüldüğü* (negatif doğrusal şekil değiştirme hızı) görülmektedir. Bu durum, başlangıçta $(0.25, 4.25)$ noktasında bulunan kare şeklindeki bir akışkan parçasının işaretlendiği Şekil 4-41'de gösterilmiştir. Denklem 2'yi zamana göre integre etmek suretiyle, geçen 1.5 s sonunda işaretli akışkan parçasının dört köşesinin konumu hesaplanmıştır. Gerçekten de, ön gördüğü gibi bu akışkan parçası x -yönünde uzamış ve y -yönünde büzülmüştür.

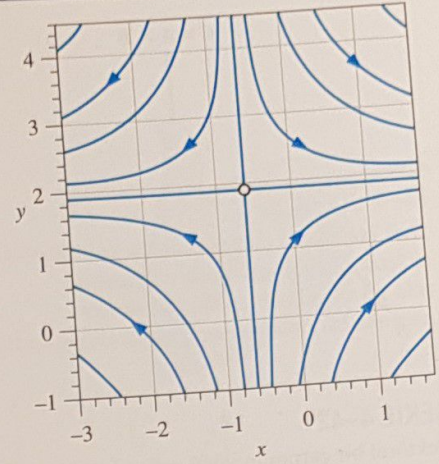
Kayma şekil değiştirme Denklem 4-26'dan belirlenir. Akış iki-boyutlu olduğundan, sıfırdan farklı olan kayma şekil değiştirme hızı sadece xy -düzleminde olur. Başlangıçta birbirlerine dik çizgiler olarak x - ve y -eksenlerine paralel çizgiler kullanarak, ϵ_{xy} 'yi Denklem 4-26'dan hesaplayalım:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0 \quad (5)$$

Bu sonuca göre, Şekil 4-41 ile de gösterildiği gibi bu akışta kayma şekil değiştirme yoktur. Göz önüne alınan akışkan parçası şekil değiştirse de, başlangıçta 90° olan köşe açıları hesaplanmanın yapıldığı zaman periyodu boyunca 90° 'de sabit kalmaktadır.

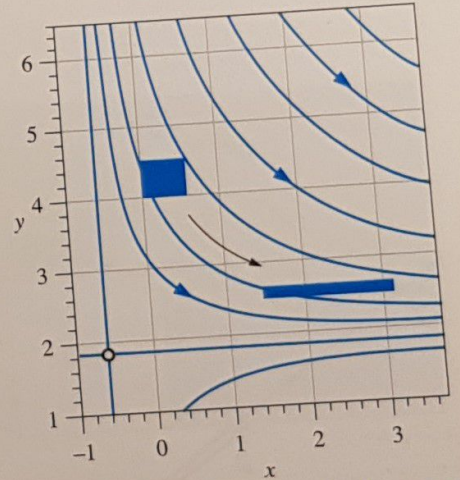
Son olarak, hacimsel şekil değiştirme hızı Denklem 4-24'ten hesaplanır:

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = (0.8 - 0.8 + 0) \text{ s}^{-1} = 0 \quad (6)$$



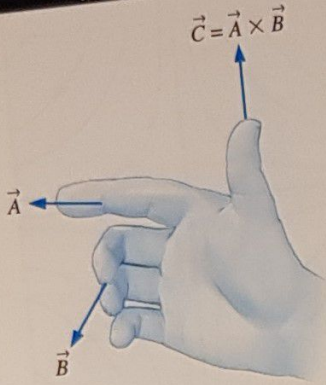
ŞEKİL 4-40

Örnek 4-6'daki hız alanına ait akım çizgileri. Durma noktası $x = -0.625$ m ve $y = 1.875$ m'deki daire ile gösterilmiştir.



ŞEKİL 4-41

Örnek 4-6'daki hız alanına göre 1.5 s'lik zaman periyodu boyunca hareket ettirilmiş olan, başlangıçta kare şeklindeki akışkan parçasının şekil değiştirme hızı. Durma noktası $x = -0.625$ m ve $y = 1.875$ m'deki daire ile gösterilmiş ve birkaç akım çizgisi çizilmiştir.



ŞEKİL 4-42

Vektörel bir çarpımın yönü sağ-el kuralı ile belirlenir.

Hacimsel şekil değiştirme hızı her yerde sıfır olduğundan, akışkan parçacıklarının hacmi ne büyüyor (genişliyor) ne de büzülüyor (sıkışıyor) diyebiliriz. Bu sonuçla, **akışın gerçekten de sıkıştırılmaz olduğunu kanıtlamış oluyoruz**. Şekil 4-41'de, gölgelendirilmiş akışkan parçası, akış alanında hareket ederken ve şekil değiştirirken yüzey alanı sabit kalmaktadır. **İrdeleme** Bu örnekte, kayma şekil değiştirme hızlarının (ϵ_{xy} ve simetriği olan ϵ_{yx}) sıfır olmasına karşın doğrusal şekil değiştirme hızlarının (ϵ_{xx} ve ϵ_{yy}) sıfırdan farklı olduğu anlaşılmaktadır. Bu durum, x - ve y -eksenlerinin bu akışın ana eksenleri olduğu anlamına gelir. Bu yöndeki (iki-boyutlu) şekil değiştirme hızı tensörü böylece,

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix} s^{-1} \quad (7)$$

şeklinde olur. Eğer eksenleri keyfi bir açı ile döndürmüş olsaydık, yeni eksenler ana eksenler olmazdı ve şekil değiştirme hızı tensöründeki dört elemanın tümü de sıfırdan farklı olurdu. Ana eksenleri, maksimum kayma şekil değiştirmesi vb. belirlemek için Mohr dairelerini kullandığınız mühendislik mekaniği (mukavemet) derslerinizden dönen eksenleri hatırlamışsınızdır. Benzer çözümlemeler akışkanlar mekaniğinde de yapılabilir.

Çevrinti ve Dönümlülük

Bir akışkan elemanının birim zamandaki dönme vektörünü daha önce tanımladık (Denklem 4-21'e bakınız). Bununla yakından ilişkili kinematik bir özellik akış analizinde büyük önem taşır. Matematiksel olarak hız vektörü $\vec{V}$ 'nin curl'ü şeklinde tanımlanan **çevrinti vektöründen** bahsediyoruz:

Çevrinti vektörü:

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{curl}(\vec{V}) \quad (4-28)$$

Çevrinti vektörünün fiziksel olarak, vektörel çarpım için kullanılan sağ el kuralı ile yönünü söyleyebilirsiniz (Şekil 4-42). Çevrinti için kullanılan ζ sembolü, Yunanca'daki *zeta*'dir. Bu sembolün tüm akışkanlar mekaniği kitaplarında yaygın olarak *olmadığı* not edilmelidir. Bazı yazarlar halen Yunan harfi *büyük omega* (Ω), bazıları da *küçük omega* (ω) kullanmaktadır. Bu kitapta, bir akışkan elemanın birim zamandaki dönme vektörünü (açısal hız vektörünü) göstermek için $\vec{\omega}$ 'yı kullandık. Birim zamandaki dönme vektörü çevrinti vektörünün, yarısına eşit olduğu görülür:

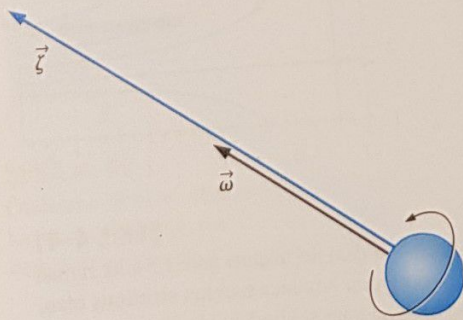
Birim zamandaki dönme vektörü:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{2} \text{curl}(\vec{V}) = \frac{\vec{\zeta}}{2} \quad (4-29)$$

Buna göre *çevrinti*, bir akışkan parçacığının dönmesinin bir ölçüsüdür. Daha net biçimde ifade etmek gerekirse,

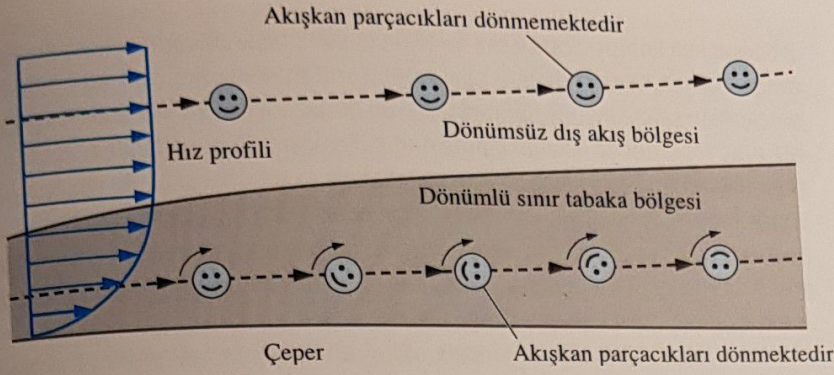
Çevrinti, bir akışkan parçacığının açısal hızının iki katına eşittir (Şekil 4-43).

Akış alanındaki bir noktada çevrinti sıfır değilse, uzayda o noktayı işgal eden akışkan parçacığı dönmektedir ve bu bölgedeki akış **dönümlü** olarak adlandırılır. Aynı şekilde, akış alanının bir bölgesinde çevrinti sıfır ise (veya yok denecek kadar küçük ise), bu bölgedeki akışkan parçacıkları dönmeyi ve akış **dönümsüz** olarak adlandırılır. Fiziksel olarak, dönümlü bir akış bölgesindeki akışkan parçacıkları, bu akış bölgesi boyunca devamlı dönerek hareket eder. Örneğin, katı bir çeper yakınındaki viskoz sınır tabaka içerisindeki akışkan parçacıkları dönümlü iken (bu nedenle çevrintileri sıfırdan farklı), sınır tabakanın dışarısındaki akışkan parçacıkları



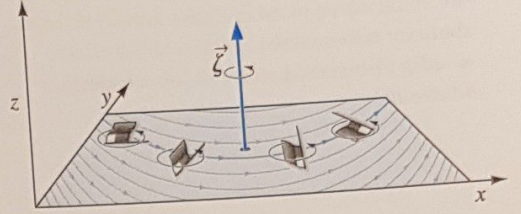
ŞEKİL 4-43

Çevrinti vektörü dönen bir akışkan parçacığının açısal hız vektörünün iki katına eşittir.



ŞEKİL 4-44

Dönümlü ve dönümsüz akış arasındaki fark; dönümlü bir akış bölgesindeki akışkan elemanları döner, dönümsüz bir akış bölgesindeki akışkan parçacıkları ise dönmaz.



ŞEKİL 4-45

xy-düzlemindeki iki-boyutlu akış için çevrinti vektörü daima z-(yada -z)-yönündedir. Bu resimde, bayrak şekilli akışkan parçacıkları xy-düzleminde hareket ederken saatin tersi yönünde dönmektedir; çevrinti ise gösterildiği gibi pozitif z-yönündedir.

dönümsüzdür (bu nedenle çevrintileri sıfırdır). Her iki durum da Şekil 4-44'te gösterilmiştir. Akışkan elemanlarının dönmesine; art izleri, sınır tabakalar, turbomakinalar (turlar, türbinler, kompresörler vb.) içerisindeki akışlar ve ısı geçişli akışlarda kullanılır. Bir akışkan elemanın çevrintisi; viskozitenin, üniform olmayan ısıtmanın (sıcaklık gradyanları) veya diğer üniform olmayan olayların etkisi dışında değişmez. Bu yüzden akış, eğer dönümsüz bir bölgede başlamış ise, üniform olmayan bir akışa dönüşür. Örneğin, bir cisim ile karşılaşmadığı veya üniform olmayan bir ısıtmaya maruz kalmadığı sürece dönümsüz olarak devam eder. Eğer bir akış bölgesi yaklaşık olarak dönümsüz olduğunda, bu durumda hareket denklemleri, Bölüm 10'da görüleceği gibi oldukça sade bir hale gelir.

Kartezyen koordinatlarda, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (x, y, z) ve (u, v, w) , Denklem 4-28 aşağıdaki gibi genişletilebilir:

Kartezyen koordinatlarda çevrinti vektörü:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (4-30)$$

Eğer akış xy-düzleminde iki-boyutlu ise, z-hız bileşeni (w) sıfır olur. Bu durumda u ve v hız bileşenleri z'ye bağlı olmaz. Böylece Denklem 4-30'daki ilk iki terim sıfır ve çevrinti vektörü;

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (4-31)$$

Kartezyen koordinatlarda iki-boyutlu akış:

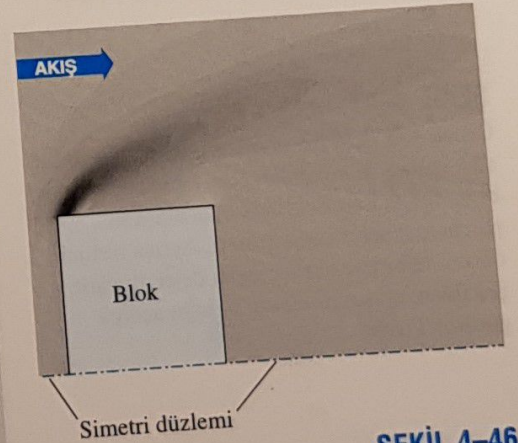
haline indirgenir. Akış xy-düzleminde iki-boyutlu olduğunda, çevrinti vektörünün yönünün ya z- yada -z-yönünde olması gerektiğine dikkat ediniz (Şekil 4-45).

ÖRNEK 4-7 İki-Boyutlu Bir Akışta Çevrinti Konturları

Şekil 4-32 ve 4-33'te gösterilen dikdörtgen kesitli bir bloğa çarpan iki-boyutlu serbest-akım akışının HAD hesaplamasını göz önüne alınız. Çevrinti vektörlerini çizin ve sonucu irdelleyiniz.

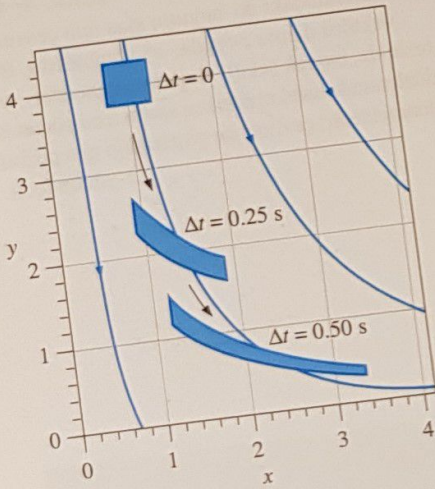
ÇÖZÜM HAD ile oluşturularak verilen bir hız alanı için çevrinti alanını hesaplayacağız ve ardından çevrintinin kontur çizimini oluşturacağız.

Analiz Akış iki-boyutlu olduğundan, çevrintinin sıfırdan farklı tek bileşeni Şekil 4-32 ve 4-33'te sayfa düzlemine dik olan z-yönündedir. Bu akış alanına ait çevrintinin



ŞEKİL 4-46

Bir bloğa çarpan akış nedeniyle oluşan ve HAD hesaplamalarından elde edilen çevrinti alanı ζ_z 'in kontur çizimi. Simetriden ötürü sadece üst yarı gösterilmiştir. Koyu bölgeler yüksek negatif çevrintiyi; açık bölgeler ise yüksek pozitif çevrintiyi göstermektedir.



ŞEKİL 4-47

Örnek 4-8'deki hız alanına göre 0.25 s ve 0.5 s'lik zaman dilimleri boyunca hareket ettirilmiş, başlangıçta kare şeklinde olan akışkan parçasının şekil değişimi. Ayrıca birinci dördülde birkaç akım çizgisi de çizilmiştir. Şekilden, akışım *dönümlü* olduğu açıkça görülmektedir.

z-bileşeninin kontur çizimi Şekil 4-46'da gösterilmiştir. Bloğun sol-üst köşesindeki koyu bölge yüksek negatif değeri göstermektedir. Yani bu bölgedeki akışkan parçacıkları saat yönünde dönmektedir. Bu durum, akışın bu kısmında karşılaşılan yüksek hız gradyenlerinden kaynaklanmaktadır. Bu kısımda sınır tabaka, cismin köşesinde çeperden ayrılmakta ve ince bir **kayma tabakası** oluşturmaktadır. Bu tabakanın enlemesine yönde hız çok ani değişir. Kayma tabakasındaki çevrinti yoğunluğu, çevrinti aşağıya doğru yayıldıkça azalmaktadır. Bloğun sağ-üst köşesi dolaylarındaki hafiften gölgelendirilmiş küçük bölge *pozitif* çevrintiyi (saatin tersi yönünde dönmeyi) göstermektedir -akış ayrılmasından dolayı oluşan ikincil bir akış deseni.

İrdeleme Hızın türevlerinin yüksek olduğu bölgelerde çevrıntinin büyüklüğünün en yüksek olacağını beklenir (Denklemler 4-30'a bakınız). Yakından incelenirse, Şekil 4-46'daki koyu bölgenin gerçekten de Şekil 4-32'deki yüksek hız gradyenlerine karşılık geldiği görülür. Şekil 4-46'daki çevrinti alanının zaman-ortalama olduğu unutulmamalıdır. Gerçekte anlık akış alanı türbülanslıdır ve daimi değildir. Çevrintiler ise küt gövdeden dökülmektedir.

ÖRNEK 4-8

İki-Boyutlu Akışta Dönümlülüğün Belirlenmesi

Aşağıda verilen daimi, sıkıştırılmaz, iki-boyutlu hız alanını dikkate alınız:

$$\vec{V} = (u, v) = x^2 \vec{i} + (-2xy - 1) \vec{j} \quad (1)$$

Bu akış *dönümlü* mü yoksa *dönümsüz* müdür? Birinci dördülde birkaç akım çizgisi çiziniz ve bunları irdelleyiniz.

ÇÖZÜM Verilen hız alanına sahip akışın *dönümlü* mü yoksa *dönümsüz* mü olduğunu belirleyeceğiz ve birinci dördülde birkaç akım çizgisi çizeceğiz.

Analiz Akış iki-boyutlu olduğundan Denklem 4-31 geçerlidir. Buradan,

$$\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = (-2y - 0) \vec{k} = -2y \vec{k} \quad (2)$$

elde edilir. Çevrinti sıfırdan farklı olduğundan bu akış **dönümlü**dür. Şekil 4-47'de birinci dördülde akışa ait birkaç akım çizgisi çizilmiştir. Buradan, akışkanın aşağı ve sağa doğru hareket ettiği anlaşılmaktadır. Akışkan parçasının ötelenmesi ve şekil değişimi $\Delta t = 0.25$ s'de hareket etmiş ve şekil değiştirmiştir ve $\Delta t = 0.50$ s'de ise daha da ileri hareket etmiş ve daha fazla şekil değiştirmiştir. Özellikle, akışkan parçasının en sağ kısmı, en sol kısmına nazaran sağa doğru ve aşağı doğru daha hızlı hareket etmekte ve akışkan parçasının x-yönünde uzamasına ve düşey doğrultuda ezilmesine neden olmaktadır. Bunun yanında, açıkça görülüyor ki, akışkan parçası *saat yönünde* net bir dönme yapmaktadır ve bu da Denklem 2'nin sonucu ile uyum göstermektedir.

İrdeleme Denklem 4-29'dan biliyoruz ki, her bir akışkan parçacığı çevrinti vektörünün yanısına eşit olan bir açısal hızda $\vec{\omega} = -y \vec{k}$ dönmektedir. $\vec{\omega}$ sabit olmadığından bu akış bir rijit-cisim dönmesi *değildir*. Daha doğrusu $\vec{\omega}$ 'y ile doğrusal olarak değişmektedir. Daha detaylı bir analiz ile bu akış alanının sıkıştırılmaz olduğu gösterilebilir. Şekil 4-47'de akışkan parçasını gösteren gölgelendirilmiş, alanları her üç durumda da aynıdır.

Silindirik koordinatlarda, $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, (r, θ, z) , ve (u_r, u_θ, u_z) , Denklem 4-28 aşağıdaki gibi genişletilebilir:

indirik koordinatlarda çevrinti vektörü:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \quad (4-32)$$

-düzlemindeki iki-boyutlu akış için Denklem 4-32,

indirik koordinatlarda iki-boyutlu akış:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \vec{k} \quad (4-33)$$

aline indirgenir. Burada z-yönündeki birim vektör $\vec{e}_z$ yerine $\vec{k}$ kullanılmıştır. Akış $r\theta$ -düzleminde iki-boyutlu olduğunda, çevrinti vektörünün yönünün ya z- (yada -z)-yönünde olması gerektiğine dikkat ediniz (Şekil 4-48).

İki Dairesel Akışın Karşılaştırılması

Dairesel akım çizgileri tüm akışlar dönümlü değildir. Bu noktayı açıklığa kavuşturmak amacıyla her ikisi de $r\theta$ -düzleminde dairesel akım çizgilerine sahip olmak üzere, iki tane sıkıştırılmaz, daimi ve iki-boyutlu akışı göz önüne alalım:

A Akışı—katı-cisim dönmesi:

$$u_r = 0 \quad \text{ve} \quad u_\theta = \omega r \quad (4-34)$$

B Akışı—çizgisel çevri:

$$u_r = 0 \quad \text{ve} \quad u_\theta = \frac{K}{r} \quad (4-35)$$

Burada ω ve K sabitlerdir. (Dikkatli okuyucular, Denklem 4-35'teki u_θ 'nın, $r=0$ 'da sonsuz olacağını fark edeceklerdir. Elbette bu fiziksel olarak imkansızdır. Bu sorundan kurtulmak için orijine yakın bölgeyi göz önüne almıyoruz.) Her iki durumda da hızın radyal bileşeni sıfır olduğundan, akım çizgileri orijin etrafındaki daireler şeklindedir. Her iki akışın da hız profilleri, Şekil 4-49'da akım çizgileri ile birlikte çizilmiştir. Şimdi, Denklem 4-33'ü kullanarak bu akışların her biri için çevrinti alanını hesaplayalım ve karşılaştıralım.

A Akışı—katı-cisim dönmesi:

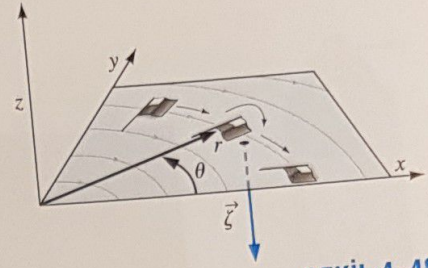
$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} - 0 \right) \vec{k} = 2\omega \vec{k} \quad (4-36)$$

B Akışı—çizgisel çevri:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(K)}{\partial r} - 0 \right) \vec{k} = 0 \quad (4-37)$$

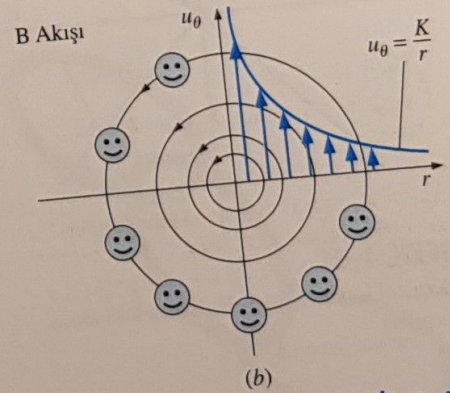
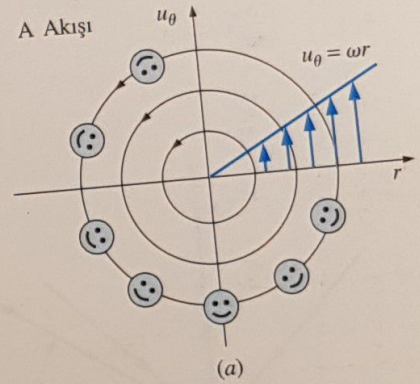
Şaşırtıcı olmamakla beraber, katı-cisim dönmesine ait çevrinti sıfırdan farklıdır. Aslında, açısal hızın iki katı bir sabit büyüklüğe sahiptir ve açısal hızla aynı yöndedir. (Bu durum, Denklem 4-29 ile uyusmaktadır). A akışı dönümlüdür. Fiziksel olarak bu, her bir ayrı akışkan parçacığının orijin etrafında döndükçe kendi etrafında da döndüğü anlamına gelir (Şekil 4-49a). Tersine, çizgisel çevrinin çevrintisi (matematiksel teklik olan orijin dışındaki) her yerde sıfırdır. B akışı dönümsüzdür. Fiziksel olarak, akışkan parçacıkları orijin etrafında daireler üzerinde dönerken kendi etraflarında dönmeyiz (Şekil 4-49b).

A akışı ile atlı karınca arasında ve B akışı ile dönme dolap arasında basit bir benzeşim kurulabilir (Şekil 4-50). Çocuklar atlı karınca üzerinde dönerlerken, aynı zamanda atlı karıncayla aynı açısal hızda kendi etraflarında da dönerler. Bu dönümlü akış ile benzerdir. Bunun aksine, bir dönme dolap üzerindeki çocuklar ise dairesel yörüngelerini izlerken daima yukarı doğru yönelmiş bir vaziyette kalırlar. Bu da dönümsüz akışa benzerdir.



ŞEKİL 4-48

$r\theta$ -düzlemindeki iki-boyutlu akış için çevrinti vektörü daima z- (yada -z)-yönündedir. Bu resimde bayrak şekilli akışkan parçacıkları, $r\theta$ -düzleminde hareket ederken saat yönünde dönmektedir; çevrinti gösterildiği gibi -z-yönündedir.



ŞEKİL 4-49

(a) Katı-cisim dönmesi şeklindeki A akışına ve (b) çizgisel çevri şeklindeki B akışına ait akım çizgileri ve hız profilleri. A akışı dönümlüdür, buna karşın B akışı orijin hariç her yerde dönümsüzdür.



(a)

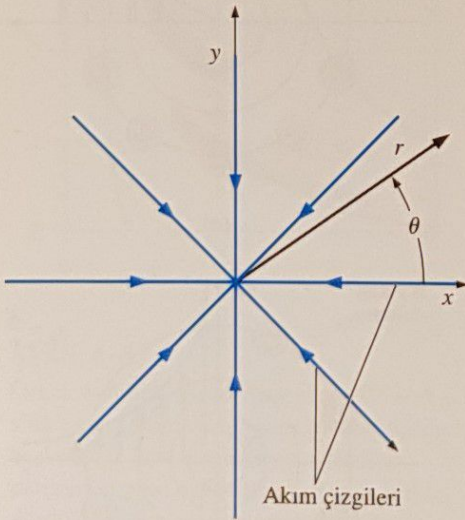


(b)

ŞEKİL 4-50

Basit bir andırım (analoji): (a) *dönümlü* dairesel akış atlı karıncaya benzerken (b) *dönümsüz* dairesel akış dönme dolaba benzer.

© Robb Gregg/PhotoEdit

**ŞEKİL 4-51**

Çizgisel kuyu için $r\theta$ -düzlemindeki akım çizgileri.

ÖRNEK 4-9**Çizgisel Bir Kuyuda Dönümlülüğün Belirlenmesi**

Çizgisel kuyu denilen basit iki-boyutlu bir hız alanı, z -ekseni boyunca bir çizgi içerisine doğru emilmekte olan akışkanın simülasyonunu yapmak için sıklıkla kullanılır. z -ekseni boyunca birim uzunluk başına hacimsel debi $\dot{V}/L$ 'nin bilindiğini varsayınız. Burada $\dot{V}$ negatif bir büyüklüktür. $r\theta$ -düzleminde iki boyutta,

$$\text{Çizgisel kuyu: } u_r = \frac{\dot{V}}{2\pi L} \frac{1}{r} \quad \text{ve} \quad u_\theta = 0 \quad (1)$$

şeklindedir. Akışa ait birkaç akım çizgisi çizin ve çevrintiyi hesaplayınız. Bu akış dönümlü mü yoksa dönümsüz müdür?

ÇÖZÜM Verilen akış alanının akım çizgileri çizilecek ve akışın dönümlülüğü belirlenecektir.

Analiz Sadece radyal akış olduğundan ve teğetsel akış olmadığından, tüm akım çizgilerinin orijine doğru yönelmiş ışınlar şeklinde olacağı anlaşılmaktadır. Şekil 4-51'de birkaç akım çizgisi çizilmiştir. Çevrinti ise, Denklem 4-33'ten hesaplanır:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \vec{k} = \frac{1}{r} \left(0 - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\dot{V}}{2\pi L} \frac{1}{r} \right) \right) \vec{k} = 0 \quad (2)$$

Çevrinti vektörü her yerde sıfır olduğundan bu akış alanı **dönümsüzdür**.

İrdeleme Girişlerin ve davlumbazların içine doğru olan akışlarda olduğu gibi içerisinde emişin bulunduğu uygulamadaki birçok akış, dönümsüz akış kabulü ile oldukça hassas bir biçimde ele alınabilir (Heinsohn and Cimbala, 2003).

4-5 • REYNOLDS TRANSPORT TEOREMİ

Termodinamikte ve katı mekaniğinde çoğunlukla *belirli bir sabit kütle* olarak tanımlanan **sistem** (diğer adıyla **kapalı sistem**) ile çalışırız. Akışkanlar mekaniğinde

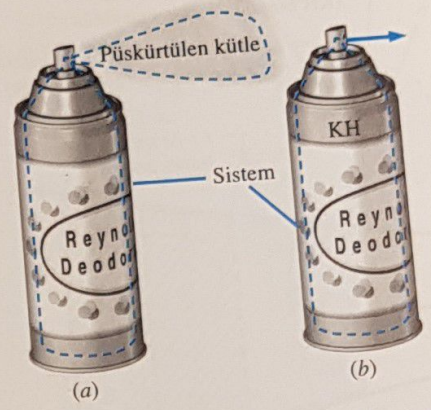
ise uzayda inceleme için seçilen bir bölge olarak tanımlanan bir **kontrol hacmi** (diğer adıyla **açık sistem**) ile çalışmak daha yaygındır. Bir proses esnasında sistemin büyüklüğü ve şekli değişebilir ancak sistem sınırlarından kütle geçişi olmaz. Diğer yandan kontrol hacminde ise kütle, **kontrol yüzeyi** adı verilen kontrol hacmi sınırlarından içeri veya dışarı geçebilir. Bunun yanında kontrol hacmi bir proses esnasında hareket edebilir ve şekil değiştirebilir. Ancak gerçek mühendislik uygulamalarının çoğunda sabit, şekli değişmeyen türde kontrol hacimleri söz konusudur.

Şekil 4-52, kutusundan püskürtülen bir deodoranta ait kontrol hacmini ve sistemi göstermektedir. Püskürtme işlemini analiz ederken, analizimiz için yapacağımız olası bir seçim; ya hareket eden ve şekli değişen akışkan (sistem), ya da kutunun iç yüzeyleri ile sınırlandırılan hacim (kontrol hacmi) olacaktır. Deodorantın püskürtülmesinden önce bu iki seçim de özdeştir. Kutunun içinden bir miktar deodorant boşaldığında, sistem yaklaşımında boşalan kütle sistemin bir parçası olarak düşünülür ve izlenir (ki bu gerçekten de zor bir iştir). Böylece sistemin kütlesi sabit kalır. Kavramsal olarak bu, kutunun püskürtme ağzına sönük bir balon durumunda balonun iç yüzeyi sistem sınırının bir parçası haline gelir. Öte yandan, kontrol hacmi yaklaşımında (çıkış ağzındaki özellikleri hariç) kutudan dışarı çıkan deodorant ile ilgilenilmez. Dolayısıyla bu işlem sırasında kontrol hacminin hacmi sabit kalırken kütlesi azalır. Bu nedenle sistem yaklaşımı, püskürtme işlemini sistem hacminin genişlemesi olarak ele alırken, kontrol hacmi yaklaşımı akışkanın sabit kontrol hacminin kontrol yüzeyinden dışarı atılması olarak ele alır.

Akışkanlar mekaniği yasalarının çoğu, yaygın özelliklerin birim zamandaki değişimlerini ele alan fiziksel yasaların sistemler için ifade edildiği katı mekaniğinden uyarlanmıştır. Akışkanlar mekaniğinde, kontrol hacimleriyle çalışmak daha uygundur ve bu yüzden kontrol hacmindeki değişimler ile sistemdeki değişimler arasında bir bağlantı kurmak gerekir. Bir yaygın özelliğin bir sistem için ve bir kontrol hacmi için birim zamandaki değişimleri arasındaki ilişki, **Reynolds transport teoremi (RTT)** ile ifade edilir. RTT, sistem ile kontrol hacmi yaklaşımları arasında bir bağ oluşturur (Şekil 4-53). RTT adını, RTT'nin akışkanlar mekaniğindeki uygulamasını ilerletmek için çok emek harcayan İngiliz mühendis Osborne Reynolds'dan (1842-1912) almıştır.

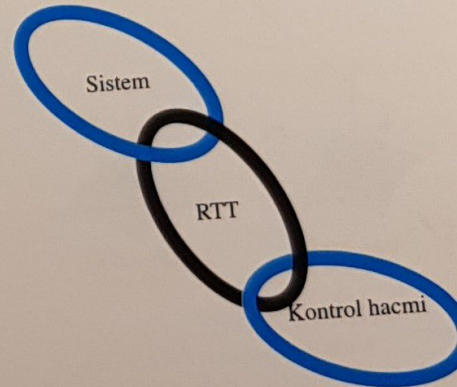
Reynolds transport teoreminin genel biçimi, keyfi bir şekle ve keyfi etkileşimlere sahip bir sistem göz önüne alınarak türetilir. Ancak bu tür bir türetme oldukça zordur. Temel anlamını kavramanıza yardımcı olması için, teoremi önce basit bir geometri kullanarak anlaşılması kolay bir yolla türetelim ve ardından sonuçları genelleştirelim.

Şekil 4-54'te çizildiği gibi, bir akış alanının genişleyen kısmından geçen akışı göz önüne alalım. Göz önüne alınan akışkanın üst ve alt sınırları akışın *akım çizgileri*dir ve bu iki akım çizgisi arasındaki herhangi bir en-kesitten geçen akışın üniform olduğunu kabul ediyoruz. Kontrol hacmini, akış alanının (1) ve (2) kesitleri arasında sabit olacak şekilde seçelim. (1) ve (2) kesitlerinin her ikisi de akışa diktir. t gibi bir başlangıç anında sistem, kontrol hacmi ile çakışmaktadır ve böylece sistem ile kontrol hacmi özdeştir (Şekil 4-54'teki gölgeli bölge). Δt zaman aralığında sistem, akış yönünde (1) kesitinde V_1 ; (2) kesitinde V_2 üniform hızlarıyla hareket etmektedir. Bu zaman aralığı sonundaki sistem taralı bölge ile gösterilmiştir. Bu hareket ile



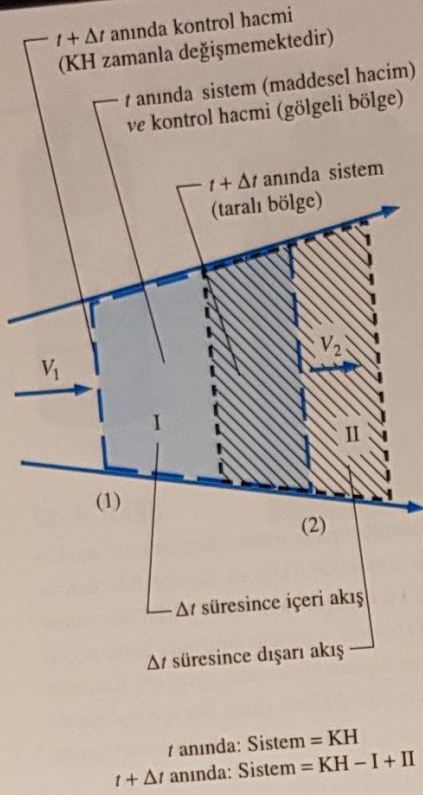
ŞEKİL 4-52

Kutusundan püskürtülen deodorantın analizi için iki metod: (a) Akışkan, hareket ederken ve şekil değiştirirken takip edilir. Bu *sistem yaklaşımı*dır —sistem sınırında kütle geçişi olmaz ve toplam kütle sabit kalır. (b) Kutunun sabit iç hacmi dikkate alınır. Bu *kontrol hacmi yaklaşımı*dır —kütle sınırı geçer.



ŞEKİL 4-

Reynolds transport teoremi (RTT), sistem yaklaşımı ile kontrol hacmi yaklaşımı arasında bir bağ oluşturur.



ŞEKİL 4-54

t ve $t + \Delta t$ anlarında bir akış alanının iraksak kısmındaki hareketli sistem (taralı bölge) ve sabit kontrol hacmi (gölge bölge). Üst ve alt sınırlar akışa ait akım çizgileridir.

sistemin açığa çıkardığı bölge, bölge I olarak (kontrol hacminin bir parçasıdır) ve sistemin kapladığı yeni bölge ise bölge II olarak belirtilmiştir (KH'nin bir parçası değildir). Bu nedenle, $t + \Delta t$ anında da sistem aynı akışkandan oluşmaktadır, ancak kapladığı bölge bu anda KH - I + II'dir. Kontrol hacmi ise uzayda sabittir ve bu nedenle, tüm anlarda gölge bölge olarak işaretlenen KH şeklinde kalır. B (kütle, enerji ya da momentum gibi) herhangi bir yaygın özellik olsun ve $b = B/m$ ise buna karşılık gelen yoğun özellik olsun. Yaygın özelliklerin toplanabilir olmasından yola çıkarak t ve $t + \Delta t$ anlarındaki yaygın özellik B aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$B_{\text{sis}, t} = B_{\text{KH}, t} \quad (t \text{ anında sistem ve kontrol hacmi çakışmaktadır})$$

$$B_{\text{sis}, t + \Delta t} = B_{\text{KH}, t + \Delta t} - B_{\text{I}, t + \Delta t} + B_{\text{II}, t + \Delta t}$$

Birinci eşitliği ikinci eşitlikten çıkarıp Δt ile bölersek,

$$\frac{B_{\text{sis}, t + \Delta t} - B_{\text{sis}, t}}{\Delta t} = \frac{B_{\text{KH}, t + \Delta t} - B_{\text{KH}, t}}{\Delta t} - \frac{B_{\text{I}, t + \Delta t}}{\Delta t} + \frac{B_{\text{II}, t + \Delta t}}{\Delta t}$$

bulunur. $\Delta t \rightarrow 0$ için limitini alıp, türevin tanımından faydalırsak,

$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{dB_{\text{KH}}}{dt} - \dot{B}_{\text{giren}} + \dot{B}_{\text{çıkan}} \quad (4-38)$$

ya da

$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{dB_{\text{KH}}}{dt} - b_1 \rho_1 V_1 A_1 + b_2 \rho_2 V_2 A_2$$

elde edilir. Çünkü,

$$B_{\text{I}, t + \Delta t} = b_1 m_{\text{I}, t + \Delta t} = b_1 \rho_1 V_{\text{I}, t + \Delta t} = b_1 \rho_1 V_1 \Delta t A_1$$

$$B_{\text{II}, t + \Delta t} = b_2 m_{\text{II}, t + \Delta t} = b_2 \rho_2 V_{\text{II}, t + \Delta t} = b_2 \rho_2 V_2 \Delta t A_2$$

ve

$$\dot{B}_{\text{giren}} = \dot{B}_I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{\text{I}, t + \Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b_1 \rho_1 V_1 \Delta t A_1}{\Delta t} = b_1 \rho_1 V_1 A_1$$

$$\dot{B}_{\text{çıkan}} = \dot{B}_{\text{II}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{\text{II}, t + \Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b_2 \rho_2 V_2 \Delta t A_2}{\Delta t} = b_2 \rho_2 V_2 A_2$$

olarak ifade edilebilir. Burada A_1 ve A_2 , 1 ve 2 konumlarındaki en-kesit alanlarıdır. Denklem 4-38, sistemin B özelliğinin değişim hızının; B 'nin kontrol hacmi içerisindeki değişim hızı ile B 'nin kontrol yüzeyinden dışarı çıkan kütle ile oluşan net akışının toplamına eşit olduğunu ifade eder. Sistemdeki bir özelliğinin değişimi ile kontrol hacmindeki bir özelliğinin değişimi arasında bağlantı kurduğundan, bu denklem faydalı bir bağıntıdır. Göz önüne alınan bir anda sistem ve kontrol hacminin aynı uzayı işgal etmesi kaydıyla, Denklem 4-38'in herhangi bir an için uygulanabileceğine dikkat ediniz.

Bu durum için, sadece tek giriş ve tek çıkış bulunduğu ve hızlar (1) ve (2) kesitlerinde yüzeylere dik olduğundan, B özelliğinin giriş akışı $\dot{B}_{\text{giren}}$ ve çıkış akışı $\dot{B}_{\text{çıkan}}$ 'ı hesaplamak kolaydır. Bununla birlikte genellikle birkaç giriş ve çıkış olabilir ve hız, giriş noktasında kontrol yüzeyine dik olmayabilir. Bunun yanında, hız üniform da olmayabilir. Bu işlemi genelleştirmek için kontrol yüzeyi üzerinde

diferansiyel bir yüzey alanı dA 'yı ele alalım ve **birim dış normalini** $\vec{n}$ ile gösterelim. $\vec{V} \cdot \vec{n}$ skaler çarpımı hızın dik bileşenini verdiğinden, b özelliğinin dA 'dan geçen debisi $\rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ 'dır. Kontrol yüzeyinin tamamından dışarıya çıkan net debi ise integral işlemiyle aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Şekil 4-55):

$$\dot{B}_{\text{net}} = \dot{B}_{\text{çıkan}} - \dot{B}_{\text{giren}} = \int_{KY} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (\text{negatif olursa içeri akış}) \quad (4-39)$$

Bu bağıntının önemli bir yönü, daha sonra açıklanacağı gibi giren akışı otomatik olarak çıkan akıştan çıkarmasıdır. Kontrol yüzeyi üzerinde bulunan bir noktadaki hız vektörü ile bu noktadaki birim dış normal vektörün skaler çarpımı $\vec{V} \cdot \vec{n} = |\vec{V}| |\vec{n}| \cos \theta = |\vec{V}| \cos \theta$ 'dır. Burada θ , Şekil 4-56'da gösterildiği gibi hız vektörü ile birim dış normal vektör arasındaki açıdır. $\theta < 90^\circ$ için $\cos \theta > 0$ 'dır ve bu yüzden kontrol hacminden dışarı doğru olan kütle akışı için $\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$ 'dır. $\theta > 90^\circ$ için $\cos \theta < 0$ 'dır ve dolayısıyla kontrol hacminin içine doğru olan kütle akışı için $\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$ 'dır. Bundan dolayı $\rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ diferansiyel büyüklüğü, kontrol hacminden dışarı doğru olan kütle akışı için pozitif, kontrol hacminden içeri doğru olan kütle akışı için ise negatiftir ve $\rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ 'nın tüm kontrol yüzeyi boyunca integrali, B özelliğinin kütle ile birlikte birim zamandaki net dışarı akışını (dışarı akış hızını) verir.

Genel olarak kontrol hacmi içerisindeki özellikler konum ile değişebilir. Böyle bir durumda B özelliğinin kontrol hacmi içerisindeki toplam miktarı integral ile hesaplanır:

$$B_{KH} = \int_{KH} \rho b dV \quad (4-40)$$

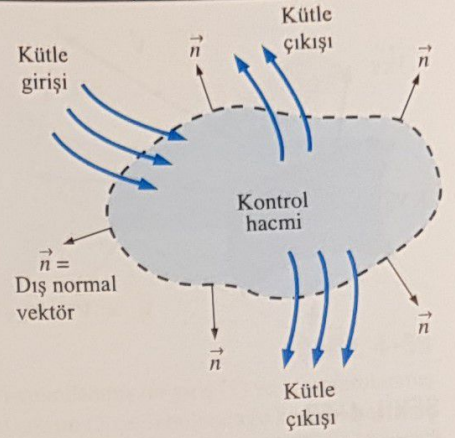
Böylece, Denklem 4-38'deki dB_{KH}/dt terimi, $\frac{d}{dt} \int_{KH} \rho b dV$ 'ye eşit olur ve B özelliğinin kontrol hacmi içerisindeki miktarının değişim hızını gösterir. dB_{KH}/dt 'nin pozitif değeri, B miktarında bir artma; negatif değeri ise bir azalma meydana geldiğini gösterir. Denklem 4-39 ve 4-40'ı Denklem 4-38'de yerine koyarsak, *sabit bir kontrol hacmi için sistemin kontrol hacmine dönüşümü* olarak bilinen Reynolds transport teoremini elde etmiş oluruz:

$$\text{Sabit KH için RTT:} \quad \frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{KH} \rho b dV + \int_{KY} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4-41)$$

Kontrol hacmi zamanla hareket etmediğinden ve şekil değişmediğinden, denklemin sağ tarafındaki zamana göre türev integralin içine alınabilir, çünkü integrasyon bölgesi zaman ile değişmemektedir. (Diğer bir deyişle önce türev sonra integral veya önce integral sonra türev almamızın bir önemi yoktur.) Fakat bu durumda kısmi türev ($\partial/\partial t$) şeklinde belirtilmelidir, çünkü yoğunluk ve b 'nin miktarı kontrol hacmi içerisinde konuma bağlı olarak değişebilir. Bu sonuçla, sabit bir kontrol hacmi için Reynolds transport teoreminin alternatif formu:

$$\text{Sabit KH için alternatif RTT:} \quad \frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \int_{KH} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{KY} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4-42)$$

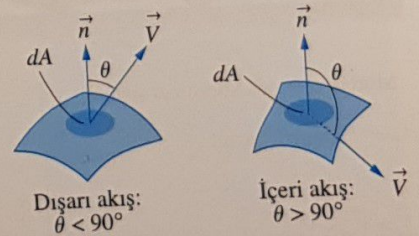
şeklinde olur. Denklem 4-41 *sabit* bir kontrol hacmi için türetilmiştir. Bununla birlikte türbin ve çark kanatları gibi birçok pratik sistemde sabit olmayan kontrol hacimleri söz konusudur. Neyse ki Denklem 4-41'in son terimindeki mutlak akışkan hızı $\vec{V}$ 'nin **bağıl hız** $\vec{V}_b$ ile yer değiştirmesi koşuluyla aynı denklem *hareket eden ve şekil değiştiren* kontrol hacimleri için de geçerli hale getirilebilir;



$$\dot{B}_{\text{net}} = \dot{B}_{\text{çıkan}} - \dot{B}_{\text{giren}} = \int_{KY} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

ŞEKİL 4-55

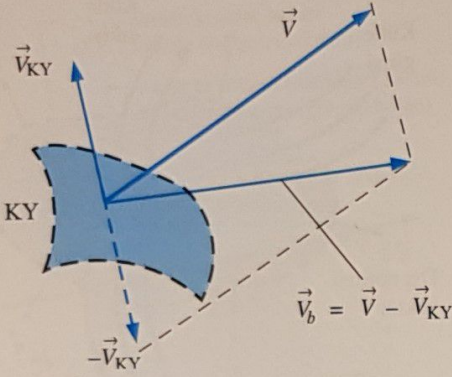
$\rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ 'nın kontrol yüzeyi boyunca integrali, B özelliğinin birim zamanda kontrol hacminden dışarı çıkan (negatif olduğunda kontrol hacminin içine giren) net miktarını verir.



$\vec{V} \cdot \vec{n} = |\vec{V}| |\vec{n}| \cos \theta = V \cos \theta$
If $\theta < 90^\circ$, then $\cos \theta > 0$ (Dışarı akış).
If $\theta > 90^\circ$, then $\cos \theta < 0$ (İçeri akış).
If $\theta = 90^\circ$, then $\cos \theta = 0$ (akış yoktur).

ŞEKİL 4-56

Diferansiyel kontrol yüzeyi alanında dışarı ve içeri doğru olan kütle akışı.



ŞEKİL 4-57

Kontrol yüzeyinden geçen akışkanın *bağıl hızı*, akışkanın mutlak hızı ile yerel kontrol yüzeyi hızının negatifinin vektörel toplamı ile bulunur.

Bağıl hız:

$$\vec{V}_b = \vec{V} - \vec{V}_{KY} \quad (4-43)$$

Burada $\vec{V}_{KY}$ kontrol yüzeyinin yerel hızıdır (Şekil 4-57). Böylece Reynolds transport teoreminin en genel formu,

$$\text{Sabit olmayan KH için alternatif RTT: } \frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{KH} \rho b dV + \int_{KY} \rho b \vec{V}_b \cdot \vec{n} dA \quad (4-44)$$

halini alır.

Zamanla hareket eden ve/veya şekli değişen bir kontrol hacmi için zamana göre türev alma işleminin, Denklem 4-44'de gösterildiği gibi, integral işleminden sonra yapılması gerektiğine dikkat ediniz. Hareket eden kontrol hacmine basit bir örnek olarak $\vec{V}_{\text{araba}} = 10 \text{ km/h}$ mutlak hızıyla sağa doğru hareket eden bir oyuncak arabayı göz önüne alınız. Yüksek hızlı bir su jeti (mutlak hız $= \vec{V}_{\text{jet}} = 25 \text{ km/h}$, sağa doğru) arabanın arka tarafına çarpmakta ve arabayı ileri doğru itmektedir (Şekil 4-58). Arabanın etrafında bir kontrol hacmi çizersek bağıl hızın sağa doğru $\vec{V}_b = 25 - 10 = 15 \text{ km/h}$ olduğu görülür. Bu hız, kontrol hacmi ile birlikte hareket eden (arabayla birlikte hareket eden) bir gözlemcinin, kontrol yüzeyinden geçen akışkanı gözlemleyeceği hızdır. Diğer bir anlatımla $\vec{V}_b$, kontrol hacmi ile birlikte hareket eden bir koordinat sistemine göre tanımlanmış akışkan hızıdır.

Son olarak, Leibnitz teoreminin uygulanmasıyla, genel hareket eden ve/veya şekli değişen bir kontrol hacmi için Reynolds transport teoreminin (Denklem 4-44), Denklem 4-42 ile verilen ve aşağıda tekrar yazılan biçime eşdeğer olduğu gösterilebilir:

$$\text{Sabit olmayan KH için alternatif RTT: } \frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \int_{KH} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{KY} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4-45)$$

Denklem 4-44'ün tersine, sabit olmayan bir kontrol hacmine uygulanması için Denklem 4-45'teki hız vektörü $\vec{V}$, mutlak hız (sabit bir referans koordinat sistemine göre hız) olarak alınmalıdır.

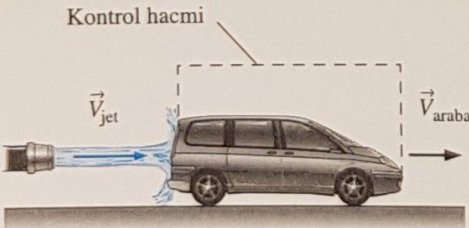
Daimi akışta kontrol hacmi içerisindeki B özelliğinin miktarı zamanla değişmez ve bunun sonucu olarak Denklem 4-44'teki zamana göre türev sıfır olur. Bu durumda Reynolds transport teoremi,

$$\text{Daimi akış için RTT: } \frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \int_{KY} \rho b \vec{V}_b \cdot \vec{n} dA \quad (4-46)$$

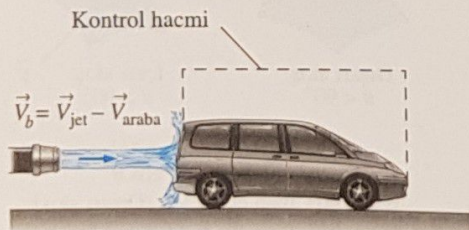
haline indirgenir. Kontrol hacminden farklı olarak, sistemdeki B miktarının daimi bir akış esnasında bile değişebileceğine dikkat ediniz. Ancak bu durumda değişim, kontrol yüzeyinden kütle ile taşınan net özellik miktarına eşit olmak durumundadır (daimi olmama etkisinden çok advectif etki söz konusudur).

RTT'nin pratik mühendislik uygulamalarının çoğunda akışkan, kontrol hacmi sınırından sonlu sayıda ve iyi tanımlanmış giriş ve çıkışlardan geçer (Şekil 4-59). Böyle durumlarda kontrol yüzeyini her bir giriş ve çıkış boyunca doğrudan kesmek ve Denklem 4-44'teki yüzey integralini, her bir giriş ve çıkışta sınırdan geçen akışkan özelliklerinin ortalama değerlerine dayanan yaklaşık cebirsel ifadelerle yer değiştirmek daha uygundur. ρ_{ort} , b_{ort} ve $V_{b, \text{ort}}$ 'yı A en-kesit alanına sahip giriş veya çıkıştan geçen ρ , b ve V_b 'nin ortalama değerleri olarak tanımlayalım $[b_{\text{ort}} = (1/A) \int_A b dA]$; En-kesit alanı A olan bir girişe veya çıkışa uygulanırken,

Mutlak referans koordinat sistemi:



Mutlak referans koordinat sistemi:



ŞEKİL 4-58

Reynolds transport teoreminin, sabit hızla hareket eden bir kontrol hacmine uygulanması.

RTT'deki (Denklemler 4-44) yüzey integralleri, b özelliğini yüzey integralinin dışına almak ve yerine ortalama değerini yazmak suretiyle aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\int_A \rho b \vec{V}_b \cdot \vec{n} dA \equiv b_{\text{ort}} \int_A \rho \vec{V}_b \cdot \vec{n} dA = b_{\text{ort}} \dot{m}_b$$

Burada $\dot{m}_b$ bir giriş veya çıkıştan (hareketli) kontrol yüzeyine göre geçen kütleli debidir. Bu denklemdaki b , en-kesit alanı A boyunca üniform olduğunda yukarıdaki yaklaşımların tam doğru sonucu verir. Böylece Denklem 4-44,

$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{KH} \rho b dV + \sum_{\text{çıkan}} \frac{\dot{m}_b b_{\text{ort}}}{\text{herbir çıkış için}} - \sum_{\text{giren}} \frac{\dot{m}_b b_{\text{ort}}}{\text{herbir giriş için}} \quad (4-47)$$

halini alır. Bazı uygulamalarda denklem 4-47'yi hacimsel (kütleli değil) debi cinsinden yeniden yazmak isteyebiliriz. Bu durumda $\dot{m}_b \approx \rho_{\text{ort}} \dot{V}_b = \rho_{\text{ort}} V_{b, \text{ort}} A$ şeklinde bir yaklaşım daha yaparız. Bu yaklaşım, akışkan yoğunluğu ρ , A boyunca üniform ise doğrudur. Bu durumda 4-47

İyi-tanımlanmış giriş ve çıkışlar için yaklaşık RTT:

$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{KH} \rho b dV + \sum_{\text{çıkan}} \frac{\rho_{\text{ort}} b_{\text{ort}} V_{b, \text{ort}} A}{\text{herbir çıkış için}} - \sum_{\text{giren}} \frac{\rho_{\text{ort}} b_{\text{ort}} V_{b, \text{ort}} A}{\text{herbir giriş için}} \quad (4-48)$$

haline indirgenir.

Bu yaklaşımların analizi büyük ölçüde basitleştirdiğine, ancak özellikle giriş ve çıkıştaki hız dağılımlarının çok düzgün olmadığı durumlarda olduğu gibi, her zaman doğru olmadığına dikkat ediniz (örneğin boru akışları; Şekil 4-59). Özel bir durum olarak b özelliği bir hız terimi içerdiğinde, (örneğin RTT'yi doğrusal momentum denlemine uygularken $b = \vec{V}$ alınır) Denklem 4-45'teki kontrol yüzeyi integrali *doğrusal olmayan* hale gelir ve Denklem 4-48'deki yaklaşım hatalı sonuçlara yol açar. Neyse ki Bölüm 5 ve 6'da tartışılacağı gibi, Denklem 4-48'e *düzeltilme faktörleri* dahil ederek hataları ortadan kaldırabiliriz.

Denklem 4-47 ve 4-48 sabit ya da hareketli kontrol hacimlerine uygulanabilir, ancak daha önce de tartışıldığı gibi sabit olmayan kontrol hacimleri için *bağıl hız* kullanılmalıdır. Örneğin Denklem 4-47'de kütleli debi $\dot{m}_b$, hareketli kontrol yüzeyine göre ve b alt indisi bu nedenle kullanılmıştır.

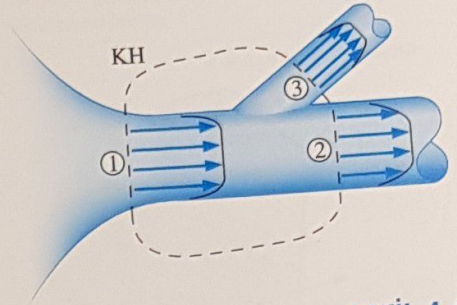
*** Reynolds Transport Teoreminin Alternatif Türetimi**
Leibnitz teoremini (Kundu, 1990'a bakınız) kullanarak Reynolds transport teoremini daha zarif bir yolla türetmek mümkündür. Bu teoremin bir-boyutlu uyarlamasına muhtemelen daha önceden aşinasınızdır. Bu uyarlama, sınırları, integral teriminin türevleme değişkeninin fonksiyonu olan bir integrali almamıza olanak tanır (Şekil 4-60) ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

Bir-boyutlu Leibnitz teoremi:

$$\frac{d}{dt} \int_{x=a(t)}^{x=b(t)} G(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t} dx + \frac{db}{dt} G(b, t) - \frac{da}{dt} G(a, t) \quad (4-49)$$

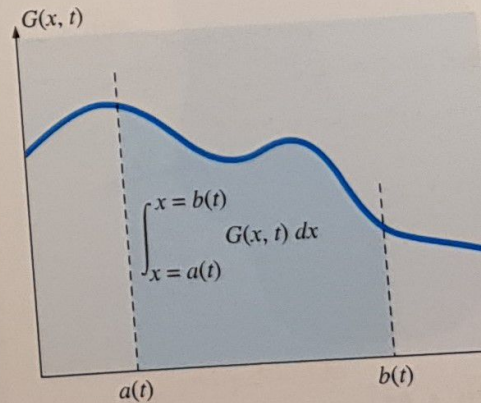
Leibnitz teoremi, sadece integral sınırları $a(t)$ ve $b(t)$ 'nin zamana göre değişimlerini hesaba katmakla kalmaz, aynı zamanda integrali alınan $G(x, t)$ ifadesinin zamanla daimi olmayan değişimlerini de dikkate alır.

*Bu kısmı süreklilikte bir kayba uğramaksızın atlayabilirsiniz.



ŞEKİL 4-59

İyi-tanımlanmış bir giriş (1) ve iyi-tanımlanmış iki çıkışın (2 ve 3) bulunduğu kontrol hacmine bir örnek. Böyle durumlarda, RTT'deki kontrol yüzeyi integralleri her bir giriş ve çıkıştan geçen akışkan özelliklerinin ortalaması cinsinden daha uygun bir biçimde yazılabilir.



ŞEKİL 4-60

Bir-boyutlu Leibnitz teoremi, integral sınırlarının zamanın fonksiyonu olan bir integralin zamana göre türevini hesaplamada gereklidir (integralin sınırları x'e göre değişir).

ÖRNEK 4-10 Bir-Boyutlu Leibnitz İntegrali

Aşağıdaki ifadeyi mümkün olduğunca sadeleştiriniz:

$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_{x=0}^{x=Ct} e^{-x^2} dx \quad (1)$$

ÇÖZÜM Verilen ifadeden $F(t)$ en sade şekliyle elde edilecektir. **Analiz** Çözüm için önce integrali sonra da türevi almaya çalışabiliriz. Ancak verilen Denklem 1, Denklem 4-49 biçiminde olduğundan bir-boyutlu Leibnitz teoremini kullanabiliriz. Burada $G(x, t) = e^{-x^2}$ olarak verilmiştir (Bu basit örnekte G zamanın fonksiyonu değildir). İntegralin sınırları ise $a(t) = 0$ ve $b(t) = Ct$ 'dir. Teoremin uygulanmasıyla sonuç aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F(t) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t} dx + \frac{db}{dt} \underbrace{G(b, t)}_{e^{-b^2}} - \frac{da}{dt} \underbrace{G(a, t)}_0 \rightarrow F(t) = Ce^{-C^2 t^2} \quad (2)$$

İrdeleme Aynı sonuca, Leibnitz teoremini kullanmadan gitmeye çalışınız.

Üç boyutta bir hacim için integrali Leibnitz teoremi,

Üç-boyutlu Leibnitz teoremi:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} G(x, y, z, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dV + \int_{A(t)} G \vec{V}_A \cdot \vec{n} dA \quad (4-50)$$

olarak verilir. Burada $V(t)$, hareket eden ve/veya şekil değiştiren bir hacmi (zamana bağlı), $A(t)$ bu hacmin yüzeyini (sınır) ve $\vec{V}_A$ bu (hareketli) yüzeyin mutlak hızını (Şekil 4-61) ifade etmektedir. Denklem 4-50, uzayda ve zamanda gelişigüzel hareket eden ve/veya şekli değişen herhangi bir hacme uygulanabilir. Önceki analizle uyum sağlamak açısından integrali alınacak G fonksiyonunu, akış uygulaması için ρb olarak almak suretiyle,

Akışa uygulanan üç-boyutlu Leibnitz teoremi:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho b dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{A(t)} \rho b \vec{V}_A \cdot \vec{n} dA \quad (4-51)$$

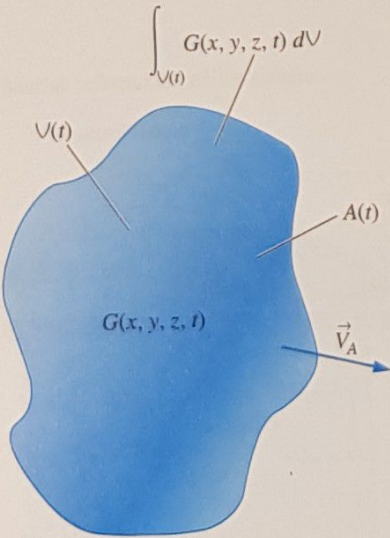
elde edilir. Eğer Leibnitz teoremini, bir **maddesel hacmin** (akışla hareket eden miktarı sabit bir sistem) söz konusu olduğu özel bir duruma uygulayacak olursak, bu durumda maddesel yüzey üzerinde her noktada $\vec{V}_A = \vec{V}$ olur, zira maddesel hacim akışkan ile beraber hareket etmektedir. Bu halde $\vec{V}$, yerel akış hızı olur ve Denklem 4-51,

Maddesel bir hacme uygulanan Leibnitz teoremi:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho b dV = \frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{A(t)} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4-52)$$

haline gelir.

Denklem 4-52 herhangi bir t anında geçerlidir. Biz kontrol hacmini, bu t anında kontrol hacmi ile sistem aynı uzayı işgal edecek şekilde, yani **çakışık** olarak tanımlıyoruz. Bir süre sonra, $t + \Delta t$, sistem akış ile hareket etmiş ve şekli değişmiştir.



ŞEKİL 4-61

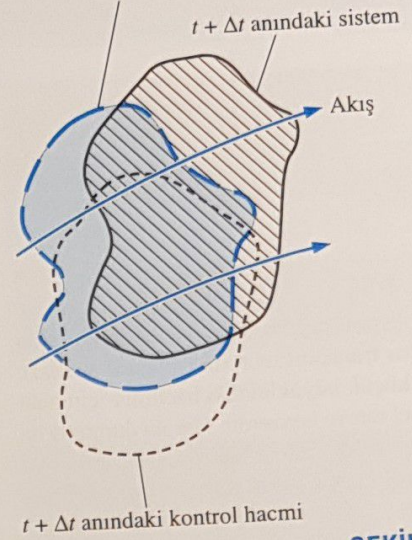
Üç-boyutlu Leibnitz teoremi, hacmin kendisinin zamanla hareket ettiği ve/veya şekil değiştirdiği durumda bir hacim integralinin zamana göre türevini hesaplamada gereklidir. Buna göre Leibnitz teoreminin üç-boyutlu biçimi, Reynolds transport teoremini alternatif bir yolla türetmek için kullanılabilir.

Öte yandan kontrol hacmi farklı bir biçimde hareket etmiş ve şekil değiştirmiş olabilir (Şekil 4-62). Ancak burada önemli olan, t anında sistem (maddesel hacim) ve kontrol hacminin bir ve aynı olmasıdır. Dolayısıyla Denklem 4-52'nin sağ tarafındaki hacim integrali, t anındaki kontrol hacmi üzerinde; yüzey integrali ise t anındaki kontrol yüzeyi üzerinden alınabilir. Böylece,

Genel RTT, sabit olmayan KH:
$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \int_{KH} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{KY} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4-53)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifade Denklem 4-45 ile özdeştir ve t anında hareket etmekte ve/veya şekli değişmekte olan gelişigüzel şekilli bir kontrol hacmi için geçerlidir. Denklem 4-53'teki $\vec{V}$ 'nin mutlak akışkan hızı olduğu unutulmamalıdır.

t anındaki sistem (maddesel hacim) ve kontrol hacmi



ŞEKİL 4-62

Maddesel hacim (sistem) ve kontrol hacmi t anında aynı uzayı işgal etmekte (mavi gölgeli alan), ancak farklı biçimde hareket edip şekil değiştirmektedir. Bir süre geçtikten sonra bunlar üst üste çakışmaz.

ÖRNEK 4-11 Bağıl Hız Cinsinden Reynolds Transport Teoremi

Leibnitz teoremi ve genel Reynolds transport teoreminden (Denklem 4-53) yola çıkarak gelişigüzel şekilde hareket eden ve şekil değiştiren bir kontrol hacmi için, Denklem 4-44'ün geçerli olduğunu ispatlayınız.

ÇÖZÜM Denklem 4-44'ün ispatı yapılacaktır.

Analiz Leibnitz teoreminin genel üç-boyutlu uyarlaması olan Denklem 4-50 herhangi bir kontrol hacmine uygulanabilir. Biz bu denklemi, maddesel hacimden (sistemden) farklı olarak hareket edebilen ve/veya şekil değiştirebilen bir kontrol hacmine uygulayalım (Şekil 4-62). G yerine ρb alınırsa Denklem 4-50,

$$\frac{d}{dt} \int_{KH} \rho b dV = \int_{KH} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{KY} \rho b \vec{V}_{KY} \cdot \vec{n} dA \quad (1)$$

halini alır. Denklem 4-53'ten kontrol hacmi integrali çekilirse,

$$\int_{KH} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV = \frac{dB_{\text{sis}}}{dt} - \int_{KY} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (2)$$

elde edilir. Denklem 2 Denklem 1'de yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt} \int_{KH} \rho b dV = \frac{dB_{\text{sis}}}{dt} - \int_{KY} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA + \int_{KY} \rho b \vec{V}_{KY} \cdot \vec{n} dA \quad (3)$$

bulunur. Bu ifadedeki son iki terim tek bir terim altında toplanır ve denklem yeniden düzenlenirse,

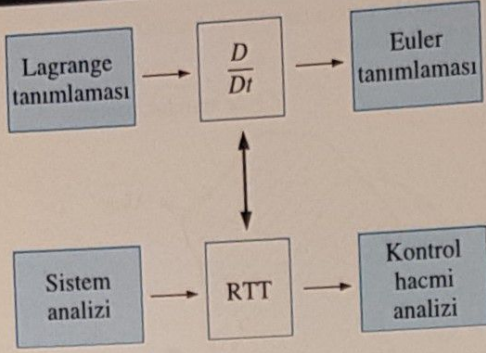
$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{KH} \rho b dV + \int_{KY} \rho b (\vec{V} - \vec{V}_{KY}) \cdot \vec{n} dA \quad (4)$$

sonucuna ulaşılır. Bu arada bağıl hızın Denklem 4-43 ile tanımlandığını hatırlayalım. Böylece,

Bağıl hız cinsinden RTT:
$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{KH} \rho b dV + \int_{KY} \rho b \vec{V}_b \cdot \vec{n} dA \quad (5)$$

olarak elde edilmiş olur.

İrdeleme Denklem 5 gerçekten de Denklem 4-44 ile özdeştir ve bu sonuçla Leibnitz teoreminin gücü ve zarafeti kanıtlanmış olmaktadır.



ŞEKİL 4-63

Sonlu büyüklükteki kontrol hacimleri için olan Reynolds transport teoremi (integral analizi), sonsuz küçük büyüklükteki hacimler için olan maddesel türeve benzerdir. Her iki durumda da Lagrange ya da sistem bakış açısını; Euler ya da kontrol hacmi bakış açısına dönüştürürüz.

Maddesel Türev ve RTT Arasındaki İlişki

Kısım 4-1’de tartışılan maddesel türev ile burada tartışılan Reynolds transport teoremi arasında bir benzerlik olduğunu fark etmişsinizdir. Aslında her iki analiz de temelde Lagrange tipi olan kavramların, Euler tipi kavramlara dönüştürülmesi için yollar göstermektedir. Reynolds transport teoremi sonlu büyüklükteki kontrol hacmini, maddesel türev ise sonsuz küçük akışkan parçacıklarını ele almasına karşın, aynı temel fiziksel yorum her ikisi için de geçerlidir (Şekil 4-63). Aslında Reynolds transport teoremi, maddesel türevin integral karşılığı olarak düşünülebilir. Her iki durumda da, tanımlanmış bir akışkan kütlelerini izleyen bir özelliğin; toplam değişim hızı iki kısımdan oluşur. Bunlar; akış alanındaki zaman ile değişimi hesaba katan yerel veya daimi olmayan kısım (Denklem 4-12 ile Denklem 4-45’in sağ taraflarındaki ilk terimleri karşılaştırınız) ve akışkanın, akışın bir bölgesinden diğerine hareketini hesaba katan taşımsal kısımdır (Denklem 4-12 ve Denklem 4-45’in sağ taraflarındaki ikinci terimleri karşılaştırınız).

Maddesel türevin herhangi bir akışkan özelliğine, bir skalere veya bir vektöre uygulanabilmesi gibi, Reynolds transport teoremi de herhangi bir skaler veya vektörel özelliğe uygulanabilir. Bölüm 5 ve 6’da, B ’yi sırasıyla, kütle, enerji ve açısal momentum olarak, Reynolds transport teoremini kütle, enerji, momentum ve açısal momentumun korunumuna uygulayacağız. Bu şekilde temel sistem korunum yasalarını (Lagrange bakış açısından), kontrol hacmi analizi (Euler bakış açısı) için geçerli ve kullanışlı olan biçimlere kolaylıkla dönüştürebiliriz.

ÖZET

Akışkan kinematiği akışkan hareketini tarif etmekle ilgilenirken bu tür akışkan hareketlerine neden olan kuvvetlerin analizi ile ilgilenmez. Akışa ait iki temel tanımlama vardır –*Lagrange* ve *Euler*. Lagrange tanımlamasında her bir ayrı akışkan parçacığını veya akışkan parçacığı kümelerini takip ederken, Euler tanımlamasında içerisinden akışkanın girip çıktığı bir *kontrol hacmi* tanımlanır. Sonsuz küçük akışkan parçacıklarına ait hareket denklemlerini Lagrange tipinden Euler tipine dönüştürmek için *maddesel türev*den; sonlu büyüklükteki kontrol hacmi sistemlerine ait hareket denklemlerini Lagrange tipinden Euler tipine dönüştürmek için ise *Reynolds transport teoreminden* (RTT) faydalanırız. Herhangi bir yaygın özellik B veya buna karşılık gelen yoğun özellik b için,

$$\text{Maddesel türev: } \frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})b$$

Sabit olmayan KH için genel RTT:

$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \int_{KH} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{KY} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

şeklinde. Her iki denklemde de, bir akışkan parçacığının veya bir sistemin izlenmesi yolu ile belirlenen herhangi bir özelliğin toplam değişim hızı, *yerel* (daimi olmayan) ve *taşımsal* (hareket) olmak üzere iki kısımdan oluşur.

Akış alanlarını görselleştirmek ve analiz etmek için *akım çizgileri*, *çıkış çizgileri*, *yörünge çizgileri*, *zaman çizgileri*, *yüzey görüntüleme*,

gölge grafiği, *şiliren görüntüleme*, *profil çizimleri*, *vektör çizimleri* ve *kontur çizimleri* gibi çeşitli yöntemler vardır. Bu bölümde bunların her birini tanımladık ve örnekler verdik. Genel daimi olmayan akışlarda akım çizgileri, çıkış çizgileri ve yörünge çizgileri birbirlerinden farklıken, *daimi akışlarda akım çizgileri, çıkış çizgileri ve yörünge çizgileri üst üste çakışır*.

Bir akışın kinematiğini tam olarak tarif etmek için dört temel şekil değiştirme hızı (*deformasyon hızı*) gereklidir. *Hız* (birim zamandaki ötelenme), *açısal hız* (birim zamandaki dönme), *doğrusal şekil değiştirme hızı* ve *kayma şekil değiştirmesi hızı*. *Çevrinti*, akışkan parçacıklarının *dönümlülüklerini* gösteren bir akış özelliğidir.

$$\text{Çevrinti vektörü: } \vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{curl}(\vec{V}) = 2\vec{\omega}$$

Bir bölgedeki çevrinti sıfır ise o bölgedeki akış *dönümsüzdür*.

Bu bölümde öğrenilen kavramlar kitabın geri kalanında sık sık kullanılacaktır. Bölüm 5 ve 6’da RTT’yi kapalı sistemler için var olan korunum yasalarını, kontrol hacmi geçerli için olanlara dönüştürmek için, Bölüm 9’da ise akışkan hareketinin diferansiyel denklemlerini türetmede kullanacağız. Çevrintinin ve dönümsüzlüğün rolüne Bölüm 10’da çok daha ayrıntılı olarak tekrar değineceğiz. Bölüm 10’da dönümsüz akış yaklaşımının, akışların çözümünü çok büyük ölçüde basitleştirdiğini göstereceğiz. Son olarak kitabın neredeyse her bölümünde, örnek akış alanlarının kinematiğini tarif etmek üzere çeşitli akış görselleştirme şekillerini ve veri çizimlerini kullanacağız.