

$$1) A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } \det(E_k(A))$$

değeri asgırdakilerden hangisidir?

$$\det(E_k A) = |E_k A| = |A|^{n-1} \quad (\text{matris } 3 \times 3 \text{ mertebeli})$$

$$|E_k A| = (k^3)^{3-1} = (k^3)^2 = k^6$$

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k^3$$

$$2) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } 10A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & t \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ise } t$$

değeri asgırdakilerden hangisidir?

$$AA^{-1} = I$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/10 & 2/10 & 2/10 \\ -5/10 & 0 & t/10 \\ 1/10 & -2/10 & 3/10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ -1/2 & 0 & t/10 \\ 1/10 & -1/5 & 3/10 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ -1/2 & 0 & t/10 \\ 1/10 & -1/5 & 3/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 satır. 3 sütun ile çarpılırsa

$$1/5 + t/10 + 3/10 = 1$$

$$\frac{2+t+3}{10} = 1 \quad t+5=10$$

$$\underline{t=5}$$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \text{ ise } x = ?$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3+5x+3 & 2+x+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 1 \times 3 & 3 \times 1 \\ 1 \times 3 & 3 \times 1 \end{matrix}$

$$x + 6 + 5x - 4 - 2x - 4 = 0$$

$$3x + x - 2 = 0$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$4) \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \text{ vektörleri iqm } \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = -2 \text{ ise}$$

$$(\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{a}) = ?$$

$$\underbrace{2\vec{a} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a})}_0 + \underbrace{2\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{a})}_0 + 3\vec{b} \cdot \underbrace{(\vec{c} \wedge \vec{a})}_0 - 3\vec{b} \cdot \underbrace{(\vec{b} \wedge \vec{a})}_0 + 4\vec{c} \cdot \underbrace{(\vec{c} \wedge \vec{a})}_0$$

$$\begin{aligned} + 4\vec{c} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{a}) &= -3\vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) + 4\vec{c} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{a}) \\ &= -3\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) - 4\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) \\ &= -7\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = -7(-2) \\ &= 14 \end{aligned}$$

5) $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ ve $|\vec{u}+\vec{v}|=6$ olduğuna göre $\vec{u} \cdot \vec{v}$ skaler çarpımını bulunuz?

$$|\vec{u}+\vec{v}|=6 \Rightarrow \sqrt{(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v})} = 6$$

$$\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = |\vec{u}|$$

$$(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = 36$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 36$$

$$|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 36$$

$$16 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 9 = 36$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{11}{2}$$

6) $(\vec{u}+\vec{v}) \wedge (\vec{u}-\vec{v}) = 2(\vec{v} \wedge \vec{u})$ old göster.

$$\begin{aligned} (\vec{u}+\vec{v}) \wedge (\vec{u}-\vec{v}) &= \underbrace{\vec{u} \wedge \vec{u}}_0 + \vec{u} \wedge (-\vec{v}) + \vec{v} \wedge \vec{u} + \underbrace{\vec{v} \wedge (-\vec{v})}_0 \\ &= \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{u} \\ &= 2(\vec{v} \wedge \vec{u}) \end{aligned}$$

7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $(X^t + 2I_2)^{-1} = A$ eşitliğini sağlayan X matrisini bulunuz.

$$|A| = -1 \quad \text{ve} \quad \text{EKA} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{olduğundan}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{EKA}}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(X^t + 2I_2)^{-1} = A \Rightarrow \left[(X^t + 2I_2)^{-1} \right]^{-1} = A^{-1}$$

$$X^t + 2I_2 = A^{-1}$$

$$X^t = A^{-1} - 2I_2$$

$$X^t = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X^t = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

8) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & m & -5 \\ 2 & -11 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin rangının $r_A = 2$ olması için m ne olmalıdır?

$r_A = 2$ iken tüm 3×3 mertebesinden kare alt matrislerinin determinantları sıfır olduğuna göre m yi içeren 3×3 mertebesinde herhangi bir kare alt matrisin determinantını alıp sıfıra eşitleyerek m yi buluruz

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 7 & m & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 14+m & 2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 14+m & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) [10 - 14 - m] = 0$$

$$m = -4$$

veya

$r_A = 2$ olması için iki satır tüm elemanları sıfır olmalı

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & m & -5 \\ 2 & -11 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 10 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & m+4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m+4=0$$

$$m=-4$$

g) $\begin{vmatrix} r & t & 1 \\ p & -1 & w \\ 2 & s & u \end{vmatrix} = 7$ olduğuna göre determinant özelliklerini kullanarak

$$\begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 4 & 2s & 2u \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 4 & 2s & 2u \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 2 & s & u \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} r & t & 1 \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 2 & s & u \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} r & t & 1 \\ -p & 1 & -w \\ 2 & s & u \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} r & t & 1 \\ p & -1 & w \\ 2 & s & u \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (7) = -14$$

10) $A + (\bar{A})^t$ nm hermitian olduğunu göster.

$$\overline{(A + (\bar{A})^t)}^t = A + (\bar{A})^t \text{ olmalı}$$

$$\begin{aligned} \overline{(A + (\bar{A})^t)}^t &= (\bar{A} + A^t)^t = (\bar{A})^t + (A^t)^t \\ &= (\bar{A})^t + A \\ &= A + (\bar{A})^t \end{aligned}$$

1) $\bar{\bar{A}} = A$

2) $A + B = B + A$

11) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$
olduğuna göre

a) Öyle bir k skaleri bulunuz ki $\vec{a} + k\vec{b}$ vektörü $\vec{a}$ vektörüne dik olsun.

b) $\vec{a}, \vec{b}$ vektörlerinin her ikisine birden dik olan $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şeklinde bir vektör bulunuz

a) Diklik şartından

$$(\vec{a} + k\vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \text{ olmalı}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + k\vec{b} \cdot \vec{a} = 0$$

$$(4 + 9 + 1) + k \cdot (-4 + 9 - 1) = 0$$

$$14 + 4k = 0$$

$$4k = -14 \quad k = -\frac{7}{2}$$

b) $(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) = 0$ ve

$$2x + 3y + z = 0$$

$$(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = 0 \text{ den}$$

$$-2x + 3y - z = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} r=2 \\ n=3 \end{cases} \begin{cases} 1 \text{ keyfiyet } z=2 \\ x + \frac{z}{2} = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$* \left[x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{k} \right] \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ÖR/} \quad \left. \begin{array}{l} x+2y+z=m^2 \\ x+y+3z=m \\ 3x+4y+7z=8 \end{array} \right\} \text{ lineer denk sistemi veriliyor.}$$

a) Sistemin çözümünün olmaması için $m=?$

b) " Sonsuz çözümünün olması için $m=?$

c) " tek " " $m=?$

$$[A;B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m^2 \\ 1 & 1 & 3 & m \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m^2 \\ 0 & -1 & 2 & m-m^2 \\ 0 & -2 & 4 & 8-3m^2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & -2 & -m+m^2 \\ 0 & -2 & 4 & 8-3m^2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 2m-m^2 \\ 0 & 1 & -2 & -m+m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 8-2m-m^2 \end{array} \right]$$

$$8-2m-m^2=0 \quad \begin{array}{l} m=2 \\ m=-4 \end{array}$$

a) $r_A \neq r_{A;B}$ olmalı (Çözümlessiz)

$$m \neq 2 \text{ ve } m \neq -4$$

b) $r_A = r_{A;B} < n=3 \Rightarrow$ sonsuz çözüm $m=-4$ veya $m=2$

c) $r_A = r_{A;B} = n=3$ olmalı. Ancak $r_A=3$ olamaz. Tek çözüm yoktur.

ÖR/

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisi verilsin.}$$

a) EKA ve $\det A$ 'yı bulunuz.

$$EKA = \left[\begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{array} \right| \end{array} \right]^t$$

$$EKA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & 7 \\ -6 & 3 & 5 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -6 \\ 1 & -7 & 3 \\ -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -14 + 7 = -7$$

b) $EKA \cdot A = \det A \cdot I_3$ olduğunu göster.

$$EKA \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -6 \\ 1 & -7 & 3 \\ -4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = -7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ör/ } x+y-z=1$$

$$2x-y+z=2$$

$$7x+y+(m-6)z=m+2$$

Lineer denklem sisteminin çözümünü m ye göre irdeliyoruz.

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & m-6 & m+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & m+1 & m-5 \end{bmatrix}$$

$H_2(-2), H_3(-7)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & m+1 & m-5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m-5 & m-5 \end{bmatrix}$$

$H_2(-\frac{1}{3}), H_3(-1), H_3(6)$

a) $m=5$ ise $r=2$ olur. $n=3$ (x, y, z)

$r < n \Rightarrow n-r = 3-2=1$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= k \\ z &= k \end{aligned} \quad \begin{aligned} y-z &= 0 \\ z &= k \end{aligned}$$

b) $m \neq 5$ olsun. Burada $r=3$ $n=3$
 $r=n$ olduğundan tek çözüm vardır.
 $m \neq 5$ $m-5$ ile bölersek (3. satırı)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$H_3(1) \quad x=1 \quad y=1 \quad z=1$

ör/ $\left. \begin{array}{l} x+2y-3z=a \\ 2x-3y+z=b \\ x-y=c \end{array} \right\}$ Lineer denklem sisteminin çözümü
olmasını sağlayan a, b ve c
değerleri arasındaki bağıntıyı
belirleyiniz.

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & -3 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 7 & b-2a \\ 0 & -3 & 3 & c-a \end{array} \right]$$

$H_1(-2), \quad H_3(-1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2a-b}{7} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{a-c}{3} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2a-b}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a+3b-7c}{21} \end{array} \right]$$

$$H_2(-1/7)$$

$$H_3(-1/3)$$

$$\frac{a+3b-7c}{21} = 0 \text{ ise çözümün}$$

olacağı görülür.

OR/

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & \dots & x^2 \\ x^2 & 0 & x^2 & \dots & x^2 \\ x^2 & x^2 & 0 & \dots & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^2 & x^2 & x^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} = ?$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & \dots & x^2 \\ 0 & -x^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x^2 \end{vmatrix}_{n \times n} = x^2 \begin{vmatrix} -x^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -x^2 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$= x^2 \cdot (-x^2)^{n-1}$$

$$= x^2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot x^{2(n-1)}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot x^2 \cdot x^{2n-2}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot x^{2n}$$

OR/ B bir $n \times n$ involut matris olsun.

$C = \frac{1}{2}(I+B)$ matrisinin idempotent olduğunu gösteriniz.

B involut ise $B^2 = I$ dir.

$$C^2 = \frac{1}{2}(I+B)(I+B) = \frac{1}{4}(I^2 + IB + BI + B^2)$$

$$= \frac{1}{4}(2I + 2B)$$

$$= \frac{1}{2}(I+B) = C$$

$C^2 = C$ olduğundan C idempotent olur.

ÖR/

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ reel değerli bir matris}$$

$$\text{ve } \det A = |A| = 3$$

olmak üzere aşağıdakileri bulunuz.

a) $|3A|$

b) $|2A^{-1}|$

c) $|2A^2|$

d) $|4(A^t)^{-1}|$

a) $|3A| = 3^3 \cdot |A| = 27 \cdot 3 = 81$

b) $|2A^{-1}| = 2^3 \cdot |A^{-1}| = 8 \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{8}{3}$

c) $|2A^2| = 2^3 \cdot |A^2| = 2^3 \cdot |A| \cdot |A|$
 $= 2^3 \cdot 3 \cdot 3$

d) $|4(A^t)^{-1}| = 4^3 \cdot |(A^t)^{-1}| = 4^3 \cdot |A^{-1}| = 4^3 \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{4^3}{3}$

ÖR/

$AA^t = A^{-1}B$ ise $|B|$ yi $|A|$ cinsinden ifade ediniz.

$$AA^t = A^{-1}B \quad (A \text{ ile soldan çarp})$$

$$A(AA^t) = A(A^{-1}B)$$

$$(AA)A^t = (AA^{-1})B$$

$$A^2A^t = B \quad (\text{her iki tarafın det al})$$

$$|A^2A^t| = |B|$$

$$|A^2| |A^t| = |B|$$

$$|A|^2 \cdot |A| = |B|$$

$$|A|^3 = |B| \Rightarrow |B| = |A|^3 \text{ dir.}$$

ÖR/ $n \times n$ mertebeli A, B matrisleri im

$AB = BA$ ve $AB = 0$ olsun.

$$\text{Tr}[(A+B)^3] = \text{Tr}(A^3) + \text{Tr}(B^3)$$

olduğunu gösteriniz.

Not: $\text{Tr}(\cdot)$ fonksiyonunun aşaşıdaki özellikleri vardır.

a) $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$

b) $\text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

c) $\text{Tr}(A^t) = \text{Tr}(A)$

d) $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ &= A^3 + 3A(\underbrace{AB}_0) + 3(\underbrace{AB}_0)B + B^3 \quad (AB=0) \\ &= A^3 + B^3\end{aligned}$$

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3$$

$$\text{Tr}((A+B)^3) = \text{Tr}(A^3) + \text{Tr}(B^3)$$

OR /

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix} \text{ matrisinin}$$

- a) satırca indirgenmiş formunu
 b) // // eşolan formunu
 c) rankını bulunuz.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$H_2(-2), H_3(-3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2(1/4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$H_2(-5) \quad H_3(2)$ satırca indirgenmiş form

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2(-1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$H_3(-3/2)$ satırca indirgenmiş eşolan formda

c) $r_A = 3$

ör/ A ve B $n \times n$ tipinde ortogonal ve ters simetrik matrisler olmak üzere, eğer $AB = BA$ ise AB matrisinin involut matris olduğunu gösteriniz.

$$(AB)^2 = I_n \quad \text{olduğunu göstermeliyiz} \left\{ \begin{array}{l} \text{involut matris} \\ A^2 = I_n \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} A^t = -A \\ B^t = -B \end{array} \right\} \text{ters simetrik}$$

$$\left. \begin{array}{l} A^t = A^{-1} \\ B^t = B^{-1} \end{array} \right\} \text{ortogonal} \quad \begin{array}{l} A A^t = A \cdot A^{-1} = I_n \\ B B^t = B B^{-1} = I_n \end{array}$$

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B$$

$$= A(AB)B$$

$$= (\underbrace{AA})(\underbrace{BB})$$

$$= A \cdot (-A^t) B \cdot (-B^t) \quad \begin{array}{l} A, B \\ \text{ters simetrik} \end{array}$$

$$= (\underbrace{AA^t})(\underbrace{BB^t}) \quad \text{ortogonalite}$$

$$= I_n \cdot I_n$$

$$= I_n$$

$$(AB)^2 = I_n \quad AB \text{ involut}$$

OR/ $K = [K_{ij}]_{n \times n}$ ters simetrik matris olmak üzere

a) Eğer n tek ise K singülerdir. (Tekil)

b) $|Adj A| = |A|^{n-1}$

a) K ters simetrik matris

$$K^t = -K \text{ dir.}$$

$$|K^t| = |-K| = (-1)^n |K|$$

n tek olduğundan

$$|K| = -|K| \Rightarrow 2|K| = 0 \quad \text{o halde } |K| = 0$$

ve sonuç olarak K singülerdir.

$A_{n \times n}$, A nin tersi yoksa A ya singüler veya tekil matris demir.

b) $A^{-1} = \frac{Adj A}{|A|} \Rightarrow Adj A = |A| \cdot A^{-1}$

$$|Adj A| = ||A| \cdot A^{-1}| = |A|^n \cdot |A^{-1}|$$

$$|Adj A| = |A|^n \cdot \frac{1}{|A|}$$

$$|Adj A| = |A|^{n-1} \text{ dir}$$

OR/ $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ve

$(AB)^{-1} = (CB)^t$ olsun. A^{-1} matrisini bulunuz.

$$(AB)^{-1} = B^t C^t$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = B^t C^t$$

$$B^{-1} A^{-1} = B^t C^t$$

$$\underbrace{B(B^{-1} A^{-1})}_{A^{-1}} = B B^t C^t$$

$$A^{-1} = B(B^t C^t)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & -17 \\ 31 & -12 \end{bmatrix}$$

$$B^t C^t = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & -5 \end{bmatrix}$$

ÖR / $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ terslenebilir bir matris

olsun. $k \neq 0$ ($k \in \mathbb{R}$) iqm kA matrisinin
tersi var mı? Varsa bulunuz

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_3 \quad (\text{terslenebilir matris})$$

$$(kA)(kA)^{-1} = (kA) \cdot \left(\frac{1}{k} A^{-1}\right)$$

$$= \frac{k}{k} \underbrace{(AA^{-1})} = I_3$$

$$\text{Buradan } (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \text{ dir.}$$

ÖR / A ve B kare iki matris olmak üzere

$AB^t - BA^t$ matrisi ters-simetrik olur mu?

$$A^t = -A \quad (\text{ters simetrik matris})$$

$$(AB^t - BA^t)^t = -(AB^t - BA^t) \text{ ise terssimetrik matris}$$

$$(AB^t - BA^t)^t = (AB^t)^t - (BA^t)^t$$

$$= (B^t)^t A^t - (A^t)^t B^t$$

$$= BA^t - AB^t$$

$$= -(AB^t - BA^t)$$

$AB^t - BA^t$ matrisi ters simetriktir.

ÖR/

$$\begin{bmatrix} 2x & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix} = 0 \text{ ise } x \text{ değeri bulunuz.}$$

$$\begin{bmatrix} 2x-9 & 4x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix} = 0$$

$$(2x-9)x + 4x \cdot 8 = 0$$

$$2x^2 - 9x + 32x = 0$$

$$2x^2 + 23x = 0$$

$$x(2x+23) = 0$$

$$x=0 \text{ veya}$$

$$x = -\frac{23}{2} \text{ olur.}$$

ÖR/ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ idempotent matris ve I_n , $n \times n$ mertebeli birim matris olmak üzere

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{2} A \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$B = I_n + A \text{ olsun.}$$

$$BB^{-1} = I_n \text{ dir.}$$

$$B^{-1} = I_n - \frac{1}{2} A$$

$$(I_n + A)(I_n - \frac{1}{2} A) = (I_n + A) I_n - (I_n + A) \frac{1}{2} A$$

$$= I_n + A - \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \underbrace{A^2}_A \quad \begin{matrix} A \text{ idempotent} \\ A^2 = A \end{matrix}$$

$$= I_n + A - \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} A$$

$$= I_n + A - A$$

$$= I_n$$

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{2} A \text{ dir.}$$

3) a) $A = [a_{ij}]_{21 \times 5}$, $a_{ij} = \begin{cases} 3i + 2j, & i \leq j \\ 4i, & i > j \end{cases}$ ve $B = [b_{jk}]_{5 \times 18}$, $b_{jk} = \begin{cases} 3j + 2k, & j \leq k \\ j - k, & j > k \end{cases}$

olarak tanımlanıyor. $C = A \cdot B$ matrisinin $c_{10,4}$ elemanını bulunuz. (10,4 : 10. Satır ve 4. Sütun elemanıdır)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{i5}b_{5j} = \sum_{k=1}^5 a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^5 a_{i5}b_{5j}$$

$$c_{10,4} = a_{10,1}b_{1,4} + a_{10,2}b_{2,4} + a_{10,3}b_{3,4} + a_{10,4}b_{4,4} + a_{10,5}b_{5,4} \quad (3)$$

$$a_{10,1} = a_{10,2} = a_{10,3} = a_{10,4} = a_{10,5} = 40 \quad (2)$$

$$b_{1,4} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$$

$$b_{2,4} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14$$

$$b_{3,4} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 17$$

$$b_{4,4} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 20$$

$$b_{5,4} = 5 - 4 = 1$$

$$c_{10,4} = 40 [11 + 14 + 17 + 20 + 1]$$

$$= 40 \cdot 63$$

$$= 2520 \quad (2)$$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisi verildiğine göre $AB = 0$ eşitliğini sağlayan ve sıfır olmayan 3×1

mertebe B matrisini bulunuz.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$a + 2b + 4c = 0$$

$$a + 3b + 2c = 0$$

$$2a + 5b + 6c = 0$$

$$\left. \begin{matrix} a + 2b + 4c = 0 \\ a + 3b + 2c = 0 \\ 2a + 5b + 6c = 0 \end{matrix} \right\} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1(-1), H_3(-2)$$

$$H_2(-2), H_3(-1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$r=2$ $n=3$ $r < n$ olduğundan sıfırdan farklı çözüm vardır.

$n-r=1$ keyfi sabit seçilir (2)

$c = k$ olsun.

$$a + 8c = 0$$

$$b - 2c = 0$$

(1)

$$a = -8k$$

$$b = 2k \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} -8k \\ 2k \\ k \end{bmatrix} \quad (1) \quad (k \in \mathbb{R})$$

Başarılar...

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 - mx_3 = 2 \\ 4-) x_1 - mx_2 - x_3 = 2 \\ mx_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{array} \right\} \text{Lineer denklem sisteminin,}$$

- a) Çözüm­süz olması için,
b) Tek çözümünün olması için,
c) Sonsuz çözümünün olması için m nin alacağı değerleri bulunuz.

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & 2 \\ 1 & -m & -1 & 2 \\ m & -1 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{H_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & 2 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 2-2m \end{array} \right] \xrightarrow{H_{31}(-m)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & 2 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 2-2m \end{array} \right] \quad (3)$$

$$\xrightarrow{H_{32}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & 2 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{m^2+m-2}_{(m-1)(m+2)} & 2-2m \end{array} \right] \quad (4)$$

- a) Çözüm­süz olması için $\text{rang}[A] \neq \text{rang}[A:B]$ olmalı. Bunun için (2)

$$\begin{aligned} (m-1)(m+2) &= 0 & 2-2m &\neq 0 \\ m=1 & \quad m=-2 & m \neq 1 &\Rightarrow \boxed{m=-2} \text{ için} \\ & & & \text{Sistemin} \\ & & & \text{Çözümü} \\ & & & \text{Yoktur.} \end{aligned} \quad (2)$$

- b) Tek çözümün olması için $\text{rang}[A] = \text{rang}[A:B] = n$
 $n \rightarrow$ bilinmeyen sayısı (2)

$$\begin{aligned} (m-1)(m+2) &\neq 0 \\ \boxed{m \neq 1 \quad m \neq -2} & \quad (2) \end{aligned}$$

için sistemin tek çözümü vardır. (2)

- c) Sonsuz çözümün olması için $\text{rang}[A] = \text{rang}[A:B] = r < n$ olmalıdır. (2)

$$m^2+m-2=0 \quad 2-2m=0 \Rightarrow m=1, m=-2, \boxed{m=1} \text{ için sistemin sonsuz çözümü vardır.} \quad (2)$$

SOLV

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z & x & y & z \\ x+y+z & 0 & z & y \\ x+y+z & z & 0 & x \\ x+y+z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & -x & z-y & y-z \\ 0 & z-x & -y & x-z \\ 0 & y-x & x-y & -z \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} -x & z-y & y-z \\ z-x & -y & x-z \\ y-x & x-y & -z \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} z-x-y & z-y & y-z \\ z-x-y & -y & x-z \\ 0 & x-y & -z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)(z-x-y) \begin{vmatrix} 1 & z-y & y-z \\ 1 & -y & x-z \\ 0 & x-y & -z \end{vmatrix} = (x+y+z)(z-x-y) \begin{vmatrix} 1 & z-y & y-z \\ 0 & -z & x-y \\ 0 & x-y & -z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)(z-x-y) \begin{vmatrix} -z & x-y \\ x-y & -z \end{vmatrix} = (x+y+z)(z-x-y)[z^2 - (x-y)^2] \\ = (x+y+z)(z-x-y)(z-x+y)(z+x-y)$$

SOLV

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & \dots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & \dots & x_2+y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+y_1 & x_n+y_2 & \dots & x_n+y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_2-y_1 & \dots & y_n-y_1 \\ x_2+y_1 & y_2-y_1 & \dots & y_n-y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+y_1 & y_2-y_1 & \dots & y_n-y_1 \end{vmatrix}$$

$$= (y_2-y_1)(y_3-y_1)\dots(y_n-y_1) \begin{vmatrix} x_1+y_1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2+y_1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+y_1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

SOLV

A $n \times n$ bir matris, tekil olmayan bir T matrisi için $B = T^{-1}AT$ ise $|B| = |A|$ olduğunu göster.

$$|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}| |A| |T| = |T^{-1}| |T| |A| = |A|$$

$$\left. \begin{aligned} T^{-1}T &= I_n \Rightarrow |T^{-1}T| = 1 \\ |T^{-1}| |T| &= 1 \end{aligned} \right\}$$

SORU A, B, C 2×2 lik matrisler ve B bir simetrik matris olmak üzere

$$(AB)^{-1} = (CB)^T$$

veriliyor. $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ise $A^{-1} = ?$

$$(AB)^{-1} = (CB)^T \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = B^T C^T$$
$$\underbrace{B B^{-1}}_{I_2} A^{-1} = \underbrace{B B^T}_{I_2} C^T$$
$$A^{-1} = B^2 C^T$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = B^2 C^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$