

Uygulama-1 Soruları ve Cevapları

1. A ve B reel girdili iki idempotent matris olmak üzere, $A + B$ matrisi de idempotent olsun. Bu durumda $AB = BA = 0$ olduğunu gösteriniz. (Burada 0 uygun boyutta sıfır matrisini göstermektedir.)

Çözüm: $A + B$ idempotent olduğundan

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ &= A + AB + BA + B \quad (A \text{ ve } B \text{ idempotent}) \\ &= A + B\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$AB + BA = 0 \quad (1)$$

elde edilir.

(1) ifadesi soldan B ile çarpılırsa

$$BAB + B^2A = BAB + BA = 0 \Rightarrow BA = -BAB \quad (2)$$

olur. Ayrıca, (1) ifadesi sağdan B ile çarpılırsa

$$AB^2 + BAB = AB + BAB = 0 \Rightarrow AA = -BAB \quad (3)$$

elde edilir. Sonuç olarak, (2) ve (3) eşitliklerinden $AB = BA$ olup (1) eşitliğinden

$$AB + BA = 2AB = 0 \Rightarrow AB = 0$$

olur.

2. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ idempotent matris ve I_n , $n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere $(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{2}A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $B = I_n + A$ ve $B^{-1} = I_n - \frac{1}{2}A$ ise $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$ dir.

$$\begin{aligned}(I_n + A)(I_n - \frac{1}{2}A) &= (I_n + A)I_n - (I_n + A)\frac{1}{2}A \\ &= (I_n + A) + \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^2\right) \{A^2 = A\} \\ &= (I_n + A) + \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A\right) \\ &= I_n + A - A = I_n \\ &\Rightarrow (I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{2}A\end{aligned}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $2A^2 + A - 5I_2$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olup $2A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve $5I_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ dir.

$$2A^2 + A - 5I_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

4. $[2x \quad 3] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix} = 0$ ise x değerini bulunuz.

Çözüm: $[2x \quad 3] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = [2x - 9 \quad 4x]$ ve $[2x - 9 \quad 4x] \begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix} = 2x^2 - 9x + 32x \Rightarrow 2x^2 + 23x = x(2x + 23) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = -\frac{23}{2}$ olur.

5. $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ terslenebilir bir matris olsun. $0 \neq k \in \mathbb{R}$ için kA matrisinin tersi var mı? Varsa bulunuz.

Çözüm: $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ terslenebilir bir matris ise $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$ olacak şekilde tek türlü belirli A^{-1} matrisi vardır. $(kA)(kA)^{-1} = (kA) \left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \frac{k}{k}(AA^{-1}) = I_3$ olur. Buradan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ dir.

6. A ve B karesel iki matris olmak üzere $(A - B)(A + B)$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned}(A - B)(A + B) &= AA + AB - BA - BB \\ &= A^2AB - BA - B^2\end{aligned}$$

dir. Matris çarpımının değişme özelliği olmadığından dikkat edilirse $AB - BA = 0$ yazamıyoruz.

7. A ve B karesel iki matris olmak üzere $AB^T - BA^T$ matrisi ters-simetrik olur mu?

Çözüm: Bir C matrisinin ters-simetrik olabilmesi için $C^T = -C$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}(AB^T - BA^T)^T &= (AB^T)^T - (BA^T)^T \\ &= (B^T)^T A^T - (A^T)^T B^T \\ &= BA^T - AB^T \\ &= -(AB^T - BA^T)\end{aligned}$$

olduğundan $AB^T - BA^T$ matrisi ters-simetriktir.

8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix}$ determinantını çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: $|A| = |A^T|$ olduğundan

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \end{vmatrix} \begin{matrix} H_{21}(-1) \\ H_{31}(-1) \\ H_{41}(-1) \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 & y^3-x^3 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 & z^3-x^3 \\ 0 & w-x & w^2-x^2 & w^3-x^3 \end{vmatrix}}_{\text{determinantı 1. sütuna göre açılırsa}} \\ &= \begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 & y^3-x^3 \\ z-x & z^2-x^2 & z^3-x^3 \\ w-x & w^2-x^2 & w^3-x^3 \end{vmatrix} = \underbrace{(y-x)(z-x)(w-x)}_r \begin{vmatrix} 1 & x+y & y^2+xy+x^2 \\ 1 & x+z & z^2+xz+x^2 \\ 1 & x+w & w^2+xw+x^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} H_{21}(-1) \\ H_{31}(-1) \\ \end{matrix} \\ &= r \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x+y & y^2+xy+x^2 \\ 0 & z-y & z^2-y^2+x(z-y) \\ 0 & w-y & w^2-y^2+n(w-y) \end{vmatrix}}_{\text{determinantı 1. sütuna göre açılırsa}} = r \begin{vmatrix} z-y & z^2-y^2+x(z-y) \\ w-y & w^2-y^2+n(w-y) \end{vmatrix} \\ &= r.(z-y)(w-y) \begin{vmatrix} 1 & z+y+x \\ 1 & w+y+x \end{vmatrix} H_{21}(-1) = r.(z-y)(w-y) \begin{vmatrix} 1 & z+y+x \\ 0 & w-z \end{vmatrix} \\ &= (y-x)(z-x)(w-x)(z-y)(w-y)(w-z).\end{aligned}$$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin

(a) satırca eşelon formunu,

(b) satırca indirgenmiş eşelon formunu,

(c) rankını bulunuz.

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_{31}(-3)]{H_{21}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2(\frac{1}{4})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_{32}(-5)]{H_3(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[H_{23}(-\frac{1}{2})]{H_{12}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) satırca eşelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) satırca indirgenmiş eşelon form

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) A matrisinin rankı satırca eşelon formu veya satırca indirgenmiş eşelon formundaki sıfırdan farklı satırların sayısı olup $rank(A) = 3$ tür.

10. Hem simetrik hem de ters simetrik olan bir matris var mıdır? Varsa örnek veriniz.

Çözüm: A matrisi simetrik olsun. Bu durumda her $1 \leq i, j \leq n$ için $a_{ij} = a_{ji}$ olur. Aynı zamanda A matrisi ters simetrik olduğundan her $1 \leq i, j \leq n$ için $a_{ij} = -a_{ji}$ dir. O halde $a_{ij} = -a_{ij} \Rightarrow 2a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0$ dir. Yani hem simetrik hem de ters simetrik olan A matrisi sıfır matrisidir.

11. A ve B $n \times n$ tipinde ortogonal ve ters simetrik matrisler olmak üzere, eğer $AB = BA$ ise AB matrisinin involut olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(AB)^2 = I_n$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{cases} AA^T = A^T A = I_n \\ BB^T = B^T B = I_n \end{cases} \quad A \text{ ve } B \text{ ortogonal}$$

$$\begin{cases} A^T = -A \\ B^T = -B \end{cases} \quad A \text{ ve } B \text{ ters simetrik}$$

eşitlikleri vardır.

$$\begin{aligned} (AB)^2 &= (AB)(AB) = A(BA)B \quad (\text{birleşme özelliği}) \\ &= A(AB)B = (AA)(BB) \quad (\text{değişme özelliği}) \\ &= A(-A^T)B(-B^T) \quad (\text{ters simetri}) \\ &= (AA^T)(BB^T) \quad (\text{ortogonallik}) \\ &= I_n I_n = I_n. \end{aligned}$$

İlk ve son terimlerden $(AB)^2 = I_n$.

12. $n \times n$ tipinde A, B matrisleri için $AB = BA$ ve $AB = 0$ olsun. $Tr((A+B)^3) = Tr(A^3) + Tr(B^3)$ olduğunu gösteriniz.

NOT: İz ($Tr(\cdot)$) fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri vardır.

(a) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

(b) $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$, ($\lambda \in \mathbb{R}$)

(c) $Tr(A^T) = Tr(A)$

(d) $Tr(AB) = Tr(BA)$

Çözüm:

$$\begin{aligned} (A + B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ &= A^3 + 3A(AB) + 3(AB)B + B^3, (AB = 0) \\ &= A^3 + B^3 \\ \Rightarrow (A + B)^3 &= A^3 + B^3 \end{aligned}$$

Sonuç olarak $Tr((A + B)^3) = Tr(A^3) + Tr(B^3)$.

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{21}(-2) \\ H_{31}(-3) \\ H_{41}(-4) \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{23}(-1) \\ H_{23} \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup eğer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ ise $rank(A) = 2$, eğer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ise $rank(A) = 0$ olacaktır.

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} H_{21}(-2) \\ H_{31}(-1) \\ H_{41}(-2) \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} H_{31}(-1) \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $rank(A) = 2$ dir.

14. $AA^T = A^{-1}B$ ise $\det(B)$ yi $\det(A)$ cinsinden ifade ediniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} AA^T &= A^{-1}B \text{ (her iki tarafı soldan } A \text{ ile çarp)} \\ A(AA^T) &= A(A^{-1}B) \Rightarrow (AA)A^T = (AA^{-1})B \\ &\Rightarrow A^2A^T = B \text{ (her iki tarafın determinantını al)} \\ &\Rightarrow |A^2A^T| = |A|^2|A^T| = |A|^2|A| = |A|^3 = |B| \end{aligned}$$

olup $\det(B) = |A|^3$ dir.

15. $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ reel girdili bir matris ve $\det(A) = |A| = 3$ olmak üzere aşağıdakileri bulunuz.

(a) $|3A|$

(b) $|2A^{-1}|$

(c) $|2A^2|$

(d) $|4(A^T)^{-1}|$

Çözüm:

(a) $|3A| = 3^3|A| = 3^3 \cdot 3 = 3^4 = 81.$

(b) $|2A^{-1}| = 2^3|A^{-1}| = \frac{2^3}{|A|} = \frac{8}{3}.$

(c) $|2A^2| = 2^3|A^2| = 2^3|A||A| = 2^3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 = 72.$

(d) $|4(A^T)^{-1}| = 4^3|(A^T)^{-1}| = 4^3|A^{-1}| = \frac{4^3}{|A|} = \frac{64}{3}.$

16. K , $n \times n$ tipinde ters simetrik matris olmak üzere, eğer n tek ise K singülerdir. Gösteriniz.

Çözüm: K , ters simetrik ise $K^T = -K$ dır. Buradan $|K^T| = |K| = |-K| = (-1)^n|K|$ ve n tek olduğundan $|K| = -|K| \Rightarrow 2|K| = 0 \Rightarrow |K| = 0$ bulunur. Yani verilen şartlar altında K singülerdir.

17. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi verilsin. $\text{rank}(A) = n$ ise $\text{rank}(\text{Adj}(A)) = \text{rank}(\text{Ek}(A)) = n$ dir. Gösteriniz.

Çözüm: $\text{rank}(A) = n \Rightarrow \det(A) \neq 0$ ve $A \cdot \text{Ek}(A) = \det(A)I_n$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} \det(A) \cdot \det(\text{Ek}(A)) &= \det(A \cdot \text{Ek}(A)) \\ &= \det(\det(A)I_n) \\ &= (\det(A))^n \end{aligned}$$

ise $\det(\text{Ek}(A)) = (\det(A))^{n-1} \neq 0$ bulunur. Sonuç olarak $\text{rank}(\text{Adj}(A)) = \text{rank}(\text{Ek}(A)) = n$ dir.

18. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ terslenebilir (singüler olmayan) ve periyodu 3 olan periyodik bir matris olsun. $A^{-1} = \text{Ek}(A)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Ek}(A)$ olduğunu biliyoruz. A nın periyodu 3 olduğundan $A^{3+1} = A$ ve buradan A terslenebilir olduğundan $A^3 = I_n$ ve $|A^3| = |A|^3 = |I_n|$ ise $|A| = 1$ yazılır. Sonuç olarak $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Ek}(A) = \text{Ek}(A)$ yazılır.

19. $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ and $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $(AB)^{-1} = (CB)^T$ olsun. A^{-1} matrisini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (CB)^T &= B^T C^T \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} = B^T C^T \\
&\Rightarrow B(B^{-1}A^{-1}) = B(B^T C^T) \\
&\Rightarrow (BB^{-1})A^{-1} = B(B^T C^T) \\
&\Rightarrow A^{-1} = B(B^T C^T) \\
&\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & -5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 44 & -17 \\ 31 & -12 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

20. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ and $A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ise A ve B matrislerini bulunuz.

Çözüm: $(A^{-1})^{-1} = A$ olup $[A^{-1} | I_3] \sim [I_3 | A]$

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{H_{21}(-1) \\ H_{31}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{H_2(\frac{-1}{2})} \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{H_{32}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{H_3(\frac{-1}{3})} \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{H_{23}(-2) \\ H_{13}(-2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{H_{12}(-4)} \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

olup $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ \frac{5}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$ ve $A(A^{-1}B) = B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ \frac{5}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$

21. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere adjoint tanımı yardımıyla A^{-1} matrisini bulunuz.

Çözüm:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 16, A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -16, A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 16$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12, A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -16, A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10, A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 8, A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 16 & 12 & -10 \\ -16 & -16 & 8 \\ 16 & 18 & -11 \end{bmatrix} \text{ ve } \det(A) = -16 \text{ olup } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{9}{8} & \frac{11}{16} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

22. $\mathbb{R}^3$ düzleminde $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$, $C(3, 4, 5)$ noktaları verilsin. Ayrıca $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ve $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ olsun.

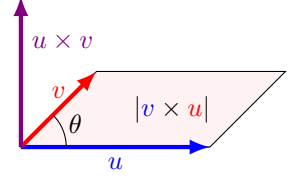
- (a) $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine dik bir vektör bulunuz.
- (b) A , B ve C noktalarının belirlediği paralelkenarın alanını bulunuz.
- (c) $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki θ açısını bulunuz.

Çözüm:

- (a) $\vec{u} \times \vec{v}$ vektörel çarpımının sonucu bir vektör olup hem $\vec{u}$ vektörüne hem de $\vec{v}$ vektörüne diktir. $\vec{u} = (2, 0, -2)$ ve $\vec{v} = (2, 2, 2)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (4, -8, 4).\end{aligned}$$

- (b) A , B ve C noktalarının belirlediği paralelkenarın alanı $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 4^2} = 4\sqrt{6} br^2$.



- (c) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$ olup $\sin \theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$ dir. O halde $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ ve $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{4\sqrt{6}}{(2\sqrt{2})(2\sqrt{3})} = 1 \\ \Rightarrow \theta &= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

23. $A = [a_{ij}]_{n \times m}$, $a_{ij} = \begin{cases} i+j, & i \leq j \\ i-j, & i > j \end{cases}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times r}$ $b_{ij} = \begin{cases} 2i-j, & i < j \\ j+1, & i \geq j \end{cases}$ matrisleri verilsin.

- (a) $n = 20$, $m = 6$ ve $r = 5$ için $AB = C = [c_{ij}]$ olmak üzere C matrisinin $c_{11,5}$ girdisini bulunuz.
- (b) $n = m = 3$ için $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ matrisinin determinantını bulunuz.
- (c) $n = m = 3$ için $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ matrisinin tersini $Ek(A) = Adj(A)$ yardımıyla bulunuz.

Çözüm:

- (a) C matrisinin $(11, 5)$ inci girdisi A matrisinin 11. satırı ile B matrisinin 5. sütununun iç-çarpımıdır. A matrisinin 11. satırı;

$$\begin{aligned}a_{11,1} &= 11 - 1 = 10 \\ a_{11,2} &= 11 - 2 = 9 \\ a_{11,3} &= 11 - 3 = 8 \\ a_{11,4} &= 11 - 4 = 7 \\ a_{11,5} &= 11 - 5 = 6 \\ a_{11,6} &= 11 - 6 = 5\end{aligned}$$

B matrisinin 5. sütunu;

$$\begin{aligned} b_{1,5} &= 2.1 - 5 = -3 \\ b_{2,5} &= 2.2 - 5 = -1 \\ b_{3,5} &= 2.3 - 5 = 1 \\ b_{4,5} &= 2.4 - 5 = 3 \\ b_{5,5} &= 5 + 1 = 6 \\ b_{6,5} &= 5 + 1 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11,5} &= 10.(-3) + 9.(-1) + 8.1 + 7.3 + 6.6 + 5.6 \\ &= 56. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ dir. } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} H_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} H_{21}(-2) \\ H_{31}(-2) \end{matrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -7 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} = 22. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } Adj(A) &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -14 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{19}{22} & \frac{-14}{22} & \frac{-1}{22} \\ \frac{4}{22} & \frac{4}{22} & \frac{-6}{22} \\ \frac{-7}{22} & \frac{4}{22} & \frac{5}{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

24. $x - y + 3z = 1$, $y = -2x + 5$, $9z - x - 5y + 7 = 0$ lineer denklem sistemi verilsin.

$$\text{(a) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ olmak üzere, verilen sistemi } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ şeklinde ifade ediniz.}$$

(b) Verilen lineer denklem sisteminin genişletilmiş (arttırılmış) katsayılar matrisini yazarak satırca indirgenmiş eşelon forma getiriniz.

(c) $rank(\mathbf{A})$ ve $rank([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$ yi bulunuz.

(d) Eğer varsa, verilen sistemin tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm:

(a) Verilen sistemi aşağıdaki gibi yeniden düzenleyelim.

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 2x + y &= 5 \\ -x - 5y + 9z &= -7 \end{aligned}$$

Bu sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir.

- (b) Sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 9 & -7 \end{array} \right]$ dir. Elementer satır işlemleri uygulanarak

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 9 & -7 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{H_{21}(-2) \\ H_{31}(1) \\ \sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & 12 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{H_2(\frac{1}{3}) \\ H_3(\frac{-1}{6}) \\ \sim}} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{H_{32}(-1) \\ \sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{H_{12}(1)} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

- (c) $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$.

- (d) $[\mathbf{A}|\mathbf{b}] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ olduğundan $\begin{matrix} x = 2 - z \\ y = 1 + 2z \end{matrix}$ yazarız. Buradan $z = t \in \mathbb{R}$ ve $\begin{matrix} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{matrix}$ olmak üzere, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ verilen sistemin genel çözümü olur.

25. $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ karesel matris, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$ ve $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n}$ toplanabilir matrisler ve $\mathbf{K} = [k_{ij}]_{n \times n}$ ters-simetrik matris olmak üzere, aşağıda verilen ifadelerin doğruluğunu gösteriniz.

- (a) $\mathbf{A}$ matrisinin tersi varsa tektir.

- (b) $|\text{Adj}(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

- (c) $(\mathbf{B} + \mathbf{C})^T = \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$.

- (d) Eğer n tek ise $\mathbf{K}$ singülerdir.

Çözüm:

- (a) $\mathbf{A}$ matrisinin $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ gibi iki tane birbirinden farklı tersi olsun. Bu durumda $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ ve $\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}_n$ dir. $\mathbf{B} = \mathbf{BI}_n = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{I}_n\mathbf{C} = \mathbf{C}$ olup ilk ve son ifadeden $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki " $\mathbf{A}$ matrisinin $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ gibi iki tane birbirinden farklı tersi olsun" kabulümüzden kaynaklandı. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani, $\mathbf{A}$ karesel matrisinin tersi varsa tektir.

- (b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{Adj}(\mathbf{A})$ olduğunu biliyoruz. Buradan $\text{Adj}(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1}$ yazarız. Bu son ifadenin her iki tarafının determinantı alınır, $|\text{Adj}(\mathbf{A})| = ||\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^n |\mathbf{A}^{-1}|$ olur. $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$ olduğundan $|\text{Adj}(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

- (c) $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ve $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ olsun. Bu durumda $\mathbf{G} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ denirse $\mathbf{G} = [g_{ij}]$ ve $g_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$. $(\mathbf{B} + \mathbf{C})^T = \mathbf{G}^T = [g_{ij}^T] = [g_{ji}] = [b_{ji} + c_{ji}] = [b_{ji}^T + c_{ji}^T] = \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$.

- (d) $\mathbf{K}$ ters-simetrik ise $\mathbf{K}^T = -\mathbf{K}$ dir. Her iki tarafın determinantı alınır $|\mathbf{K}^T| = |-\mathbf{K}| = (-1)^n |\mathbf{K}|$ olur. n tek olduğundan $|\mathbf{K}| = -|\mathbf{K}|$ ve buradan $2|\mathbf{K}| = 0$ dir. O halde $|\mathbf{K}| = 0$ ve sonuç olarak $\mathbf{K}$ singülerdir.

26. $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı $|\mathbf{F}|$ olmak üzere $|\mathbf{F}| \neq 0$ olsun.

(a) $|\mathbf{F}|$ determinantını determinant özelliklerini kullanarak hesaplayınız.

(b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ olmak üzere $\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini Cramer yöntemini kullanarak çözünüz.

Çözüm:

(a)

$$\begin{aligned}
& abcd \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \begin{matrix} H_{21}(-1) \\ H_{31}(-1) \\ H_{41}(-1) \\ = \end{matrix} abcd \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \\
& = abcd \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = \underbrace{abcd(b-a)(c-a)(d-a)}_r \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} H_{21}(-1) \\ H_{31}(-1) \\ H_{41}(-1) \end{matrix} \\
& = r \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-b & c^2-b^2+a(c-b) \\ 0 & d-b & d^2-b^2+a(d-b) \end{vmatrix} = \underbrace{r(c-b)(d-b)}_s \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 1 & c+b+a \\ 0 & 1 & d+b+a \end{vmatrix} \\
& = rs \begin{vmatrix} 1 & c+b+a \\ 1 & d+b+a \end{vmatrix} H_{21}(-1) = rs \begin{vmatrix} 1 & c+b+a \\ 0 & d-c \end{vmatrix} \\
& = abcd(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).
\end{aligned}$$

(b) $\Delta = |\mathbf{F}| \neq 0$ ve Δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) için $\mathbf{F}$ matrisinin i . sütununa $\mathbf{b}$ sütun matrisi eklenerek elde edilen matrisin determinantı olmak üzere $\Delta_1 = |\mathbf{F}|$ ve $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ olacağından $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ şeklinde bulunur.