SONSUZ DİZİLER VE SERİLER

DİZİLER

Tanım: Tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan fonksiyona dizi denir.

Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ ise diziye reel terimli dizi, eğer değer kümesi $\mathbb{Q}$ ise diziye rasyonel terimli dizi denir.

ÖR $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, n-inci terim $a_n = 2n$

$\{a_n\} = \{2n\} \rightarrow$ dizinin genel terimi

ÖR $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots\right\}$

ÖR $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (Tekrarlama kuralı)

$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$ Fibonacci dizisi

ÖR $\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}$, $\{b_n\} = \left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$, $\{c_n\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$, $\{d_n\} = \{-1\}^{n+1}$

$\{a_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$

$\{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right\}$

$\{c_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$

$\{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$

Tanım: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n = t_n$ ise $\{s_n\}$ ve $\{t_n\}$ ye eşit diziler denir. $\{s_n\} = \{t_n\}$ ile

Tanım: $\{s_n\}$ ve $\{t_n\}$ dizileri için

1- $\{s_n \mp t_n\} = \{s_n\} \mp \{t_n\}$

2- $\{s_n \cdot t_n\} = \{s_n\} \cdot \{t_n\}$

3- $\left\{\frac{s_n}{t_n}\right\} = \frac{\{s_n\}}{\{t_n\}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n \neq 0$

4- $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\{\lambda \cdot s_n\} = \lambda\{s_n\}$

Yakınsama ve Iraksama

Bir dizinin indis sayısı n arttıkça dizideki sayılar belli bir değere yaklaşır.

ÖR $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ dizisinde n büyüdükçe terimler 0 a yaklaşır.

②

Ör: $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, 1-\frac{1}{n}, \ldots\}$ 1 e yaklaşır.

Ayrıca

Ör: $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$ gibi dizilerde n büyüdükçe terimler verilen her sayıdan büyük olurken

Ör: $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$

gibi dizilerde ise terimler -1 ile 1 arasında gider gelir ve tek bir değere yakınsayamazlar.

~~Tanım: Eğer verilen her pozitif ε sayısı için $n > N$~~

Tanım: Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N (ε'a bağlı) tamsayısı bulunabiliyorsa $\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsar denir. Eğer böyle bir L yoksa $\{a_n\}$ dizisi ıraksar denir.

Eğer $\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsıyor ise bunu $\lim_{n\to\infty} a_n$ veya kısaca $a_n \to L$ ile göst. L $\left(= \lim_{n\to\infty} a_n\right)$'ye dizinin limiti denir.

Ör: $\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = 1$ old. göst.

Çözüm: $\forall \varepsilon > 0$ için $n > N$ iken $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \to N \Rightarrow$

Not: Eğer bir dizinin limiti ~~yoksa~~, $-\infty$ veya $+\infty$ ise ~~dizi~~ dizi ıraksaktır.

$-\infty$ a ıraksar $\quad$ $+\infty$ a ıraksar

$\boxed{*}$ $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ reel sayı dizisi $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

1- $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = A \mp B$ $\quad$ 2- $\lim_{n\to\infty} (k \cdot b_n) = k \cdot B$ $(k \in \mathbb{R})$

3- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = A \cdot B$ $\quad$ 4- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$ ise

3

$\boxed{\text{Teo:}}$ (Diziler için Sandviç (Sıkıştırma) Teo.):

$\forall n$ için $a_n \le b_n \le c_n$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$

ise $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ dir.

$\boxed{\text{Ör}}$ $\left\{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}\right\} \to 2$ old. göst.

Çözüm: $2 \le \sqrt{4+\frac{1}{n^2}} \le \underbrace{\sqrt{\frac{1}{n^2}+4+\frac{4}{n}}}_{=\sqrt{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}}$

$\Rightarrow 2 \le \sqrt{4+1/n^2} \le 2+1/n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt{4+1/n^2} \le \lim_{n\to\infty} (2+1/n)$

$\Rightarrow 2 \le \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt{4+1/n^2}}_{L=2} \le 2$

Ör $\left\{\frac{\cos n}{n}\right\} \to 0$ old. göst.

~~$\forall n \ge 1$~~ $\forall n \in [0, 2\pi]$ için $-1 \le \cos n \le 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} -1/n \le \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$\Rightarrow 0 \le \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}}_{L=0} \le 0$

$\boxed{\text{Ör}}$ $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, \dots\}$ dizinin limiti olmadığından ıraksaktır.

$\boxed{\text{Ör}}$ $\left\{\sqrt{n^2+2n}-n\right\} \to 1$ göst.

$\lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n^2+2n}-n\right\} \cdot (\infty-\infty) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+2/n}+1\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

Teo: (Diziler için sürekli fonk. teo.): $\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi ols. Eğer $a_n \to L$ ise ve f fonk. her a_n de tanımlı olup L de sürekli ise o zaman $f(a_n) \to f(L)$ dir.

Ör $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ dır. Teo. göre $a_n = 1/n$

$f(x) = 2^x$ ve $L = 0$ alırsak $2^{1/n} = f(1/n) \to f(L) = 2^0 = 1$

o halde $\{2^{1/n}\}$ dizisi 1 e yakınsar.

Sıkça Rastlanan Limitler

1- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ 2- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 3- $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1, (x>0)$

4- $\lim_{n\to\infty} x^n = 0, (|x|<1)$ 5- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ ($\forall x$ için)

6- $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ ($\forall x$ için)

Ör $\frac{\ln(n^2)}{n} = 2\frac{\ln n}{n} \to 2.0 = 0$ (Formül 1)

Ör $\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = (n^{1/n})^2 \to (1)^2 = 1$ (Formül 2)

Ör $\sqrt[n]{3n} = 3^{1/n}(n^{1/n}) \to 1.1 = 1$ (formül 2 ve $x=3$ ile Formül 3)

Ör $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, ($x = -1/2$ ile formül 4)

Ör $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1+\frac{-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$ ($x=-2$ ile formül 5)

Ör $\frac{100^n}{n!} \to 0$, ($x=100$ ile formül 6)

Sınırlı Monoton Diziler

Tanım: $\forall n$ için $a_n \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlı bir dizidir.
M sayısı $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır.

Eğer $\forall n$ için $M \leq a_n$ olacak şekilde bir M // $\{a_n\}$ // alttan sınırlı // // // //

M sayısı $\{a_n\}$ için bir alt sınırdır.

(*) Bir dizi hem alttan hem de üstten sınırlı ise diziye sınırlı dizi denir. Eğer $|a_n| \leq K$ olacak şekilde K sınırlı değil ise sınırsız dizi denir.

Tanım: $\forall n$ için $a_n < a_{n+1}$ ise a_n artan dizi
// // $a_n \leq a_{n+1}$ // a_n azalmayan dizi
// // $a_n > a_{n+1}$ // a_n azalan dizi
// // $a_n \geq a_{n+1}$ // a_n artmayan dizi

Tanım: $\forall n$ için $a_n \geq 0$ ise $\{a_n\}$ pozitiftir. $a_n < 0$ ise $\{a_n\}$ negatif.

(*) Bir dizi azalmayan ve artmayan dizi ise monoton dizi denir.

Tanım: $\forall n$ için $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ ise $\{a_n\}$ dizisine alterne dizi denir.

Monoton Dizi Teo. Eğer bir $\{a_n\}$ dizisi hem sınırlı hem de monoton ise bu dizi yakınsaktır.

(*) Yakınsak diziler sınırlıdır.

Ör. $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\right\}$

$n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1$

alt sınırı: $1/2$ old. üst sınırı 1

üst sınır: $n \to \infty$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} > a_n = \frac{n}{n+1}$ old. artandır. pozitif

Örn $\{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ alt sınır $= 1$
üst sınır yok.

pozitif, artan

Örn $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{e^n}\right\} = \left\{\frac{1}{e}, \frac{2}{e^2}, \dots\right\}$ artan mı? azalan mı?

$a_n = f(x) = x/e^x \Rightarrow f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
		$+$	0	$-$	
		↗		↘	

$\forall n \in \mathbb{N}$ için dizi azalan

~~$\forall n < 1$ dizi artan~~

~~alt~~ üst sınır $\frac{1}{e}$

~~üst~~ alt sınır $\lim \frac{n}{e^n} = 0$

yakınsak

Örn $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \dots\right\}$ $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

→ azalan

$\forall n \in \mathbb{N}$ için azalan

~~alt~~ üst sınır $\frac{1}{2}$

~~üst~~ alt sınır $\lim \frac{n}{n^2+1} = 0$

Monoton ve sınırlı old. yakınsak.

~~$n \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ için azalan~~ ~~$n \in (-1, 1)$ için artan~~

SERİLER

Tanım: Verilen bir $\{a_n\}$ dizisi için, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ifadesine bir <u>sonsuz seri</u> denir. a_n, serinin n. inci terimidir.

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\vdots$

$\{s_n\}$ dizisine serinin kısmi toplamlar dizisi denir.

Eğer kısmi toplamlar dizisi bir L limitine yakınsıyorsa seri yakınsaktır. ve L toplamına sahiptir.

Bu durumda

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Eğer kısmi toplamlar dizisi yakınsamıyorsa seri ıraksaktır.

Tanım: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ olmak üzere $\sum_n a_n$ serisine pozitif terimli seri denir.

Ör. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (Teleskopik seri)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1$ old. seri yakınsaktır. toplamı da 1 dir.

Tanım (Geometrik seri): Eğer $|r|<1$ ise

$a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ geometrik serisi $a/1-r$ ye yakınsar.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r|<1$$

$|r| \geq 1$ ise ıraksak

Ör. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1-(1/3)} = 1/6$

Ör. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = 5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \cdots = \frac{5}{1-(-1/4)} = 4$

03) Bir topu yatay bir yüzeye a metre yükseklikten bırakıyoruz. Top her seferinde rh m yükseklikten aşağı düşüp yere çarptıktan sonra rh m kadar yukarı zıplamaktadır. Burada r pozitif bir sayıdır ama 1 den küçüktür. Topun yukarı ve aşağı kat ettiği toplam mesafeyi bul

Çözüm:

Topun kat ettiği toplam dikey mesafe şöyledir

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}$$

$$= a + \frac{2ar}{1-r} = a\,\frac{1+r}{1-r}$$

Eğer $a = 6$ m ve $r = 2/3$ alınırsa

Topun kat ettiği mesafe şöyledir

$$s = 6 \cdot \frac{1+(2/3)}{1-(2/3)} = 6\,\frac{(5/3)}{(1/3)} = 30 \text{ m}$$

04) $5.232323\ldots$ ~~[illegible]~~ sayısını iki tam sayının oranı biçiminde yazınız

Çözüm

$$5.232323\ldots = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots$$

$5 + 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + \ldots$

$$= 5 + \frac{23}{100}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right)}_{1/(1-0.01)}, \quad a = 1,\ r = 1/100$$

$$= 5 + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{0.99}\right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}$$

Teo: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $a_n \to 0$ olmalıdır. Eğer $a_n \to 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak da olabilir ıraksak da olabilir.

Teo: Eğer $\lim_{n\to\infty} a_n$ mevcut değilse veya sıfırdan farklı ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır. (n. terim testi)

Ör: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+1}{4k^2+2k+5}$ serisi için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3k^2+1}{4k^2+2k+5} = 3/4 \neq 0 \text{ old. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+1}{4k^2+2k+5} \text{ ıraksak}$$

Teo: $\sum a_n = A$ ve $\sum b_n = B$ yakınsak iki seri ise

1- $\sum (a_n \mp b_n) = \sum a_n \mp \sum b_n = A \mp B$

2- $\sum k a_n = k \sum a_n = kA$, $(k \in \mathbb{R})$

Teo: ıraksak bir ~~de~~ serinin sıfırdan farklı sbt bir katı da ıraksaktır.

1- Eğer $\sum a_n$ yakınsak ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum (a_n + b_n)$ ve $\sum (a_n - b_n)$ nin ikisi de ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ old.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

ve $$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}$$

(10)

* Yeniden indisleme   n yerine n-h yaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1+a_2+a_3+\cdots$$

n yerine n+h yaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1+a_2+\cdots$$

Ör) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$

yerine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}$, $\sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$

yazılabilir

Ör) $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ serisinin karakterini inceleyiniz

$\lim_{k\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log\left(\lim_{k\to\infty} 1+\frac{1}{k}\right) = \log 1 = 0$ old. bir şey denilmez.

Çözüm: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\log(k+1) - \log k\right]$$

$$= (\cancel{\log 2} - \log 1) + (\cancel{\log 3} - \cancel{\log 2}) + (\log 4 - \cancel{\log 3})$$

$$+\cdots+ \left[\log(n+1) - \cancel{\log n}\right]$$

$$= \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1) \quad \text{olup}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \infty$ dır. O halde

$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ıraksaktır.

$\boxed{*}$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$$= \log(1+1) + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \log 2 + \log 3/2 + \log 4/3 + \cdots + \log \frac{n+1}{n}$$

$$= \log\left(2 \cdot 3/2 \cdot 4/3 \cdots \frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1)$$

11. Hafta

POZİTİF TERİMLİ SERİLER İÇİN YAKINSAKLIK TESTLERİ

1- İntegral Testi: f bir $[1,+\infty)$ aralığında sürekli, azalan ve pozitif bir fonk. ols. Eğer $n \geq 1$ tamsayısı için $f(n)=a_n$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olabilmesi için $\int_1^{\infty} f(n)\,dn$ integralinin yakınsak olması gerekir.

Not: İmproper integralin belli bir değer çıkması serinin toplamının o değer olacağı anlamına gelmez. Eğer belli bir değer çıkarsa seri yakınsaktır. Değilse ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n + \dots$ (harmonik seri)

serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $a_n = \frac{1}{n} = f(n)$, $f'(n) = -\frac{1}{n^2} < 0$, f, azalan, pozitif, sürekli dir.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n}\,dn = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{1}{n}\,dn = \lim_{R\to\infty} \ln n \Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} (\ln R - \ln 1) = \infty \text{ old.}$$

seri ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ (p-serisi)

Çözüm: $p=1$ ise harmonik seridir.

$p \neq 1$ için $a_n = \frac{1}{n^p} = f(n)$ sürekli, pozitif $f'(n) = \frac{-p}{n^{p+1}} < 0$ old.

f azalan dır.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^p}\,dn = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{1}{n^p}\,dn = \lim_{R\to\infty} \frac{n^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{R^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{1-p}\right)$$

1- $1-p>0$, $p<1$, $\lim_{R\to\infty}\left(\frac{R^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \infty$ old. ıraksak seri ($R^{-p+1} \to \infty$)

~~2- $1-p<0$, $p>1$~~

2- $1-p<0$, $p>1$, $\lim\limits_{R\to\infty}\left(\frac{R^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=-\frac{1}{1-p}$ old.

$\phantom{R^{1-p}}0$

Seri yakınsar.

O halde $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} \text{ıraksak} & p\leq 1 \text{ ise} \\ \text{yakınsak} & p>1 \text{ ise} \end{cases}$

$\boxed{\text{ÖR}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ serisinin karakterini inceleyin.

Çözüm: $a_n=\ln(1+1/n)=f(n)$ sürekli pozitif

$f'(n)=\dfrac{-1/n^2}{1+\frac{1}{n}}=-\dfrac{1}{n(n+1)}=-\dfrac{1}{n^2+n}<0$ old. f azalan

$\int_1^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)dn=\lim\limits_{R\to\infty}\int_1^R\ln(1+1/n)\,dn$

$=\left(\begin{array}{ll}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=u, & dn=dv \\ \dfrac{-1/n^2}{1+1/n}dn=du, & n=v\end{array}\right)$

$=\lim\limits_{R\to\infty}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Big|_1^R+\underbrace{\int_1^R\frac{1}{n+1}dn}_{\ln(n+1)}\right]$

$=\lim\limits_{R\to\infty}\left[R\ln\left(1+\frac{1}{R}\right)-\ln 2+\ln(R+1)-\ln 2\right]$

$=\lim\limits_{R\to\infty}\underbrace{R\ln\left(1+\frac{1}{R}\right)}_{\to=1}-2\lim\limits_{R\to\infty}\ln 2+\underbrace{\lim\limits_{R\to\infty}(R+1)}_{\to\infty}=\infty$ old. seri ıraksak.

$\lim\limits_{R\to\infty}R\ln\left(1+\frac{1}{R}\right)$. $(0.\infty$ belirsizliği$)=\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{\ln(1+1/R)}{1/R}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ belirsizliği}\right)$

$=\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{\frac{-\frac{1}{R^2}}{1+1/R}}{-1/R^2}=\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{R}{R+1}=1$

2- Karşılaştırma Kriteri

$\sum a_n$, $\sum c_n$ ve $\sum d_n$ pozitif terimli seriler olsunlar. ~~Bazı N tamsayısı için aşağıdaki durum~~

$\forall n > N \in \mathbb{Z}$ için $d_n \le a_n \le c_n$

a) Eğer $\sum c_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsaktır.

b) Eğer $\sum d_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ de ıraksaktır.

$\boxed{\text{Ör}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$\boxed{\text{Çözüm}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots\right)}$ geometrik seri $a = 1/2$, $r = \frac{1}{2} < 1$ old. yakınsaktır

$\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$ old. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ yakınsaktır.

$\boxed{\text{Ör}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ serisinin karakterini inc.

$\boxed{\text{Çözüm}}$: $\sum \frac{1}{n^3}$ yakınsak ($p = 3 > 1$ old.)

$\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$ → yakınsak old. $\sum \frac{1}{(n+1)^3}$ yakınsak

$\boxed{\text{Ör}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2n^2}$ serisinin karak. inc.

$\boxed{\text{Çözüm}}$ $\sum \frac{n+1}{n^3+2n^2} = \sum \frac{n+1}{n^2(n+2)}$

$\forall n \ge 1$ için $n+1 < n+2 \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} < 1 \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ ($p = 2 > 1$ old.) yak. old. $\sum \frac{n+1}{n^3+2n^2}$ yakınsak

Ör) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)n}$ serisinin karakterini inceleyin.

Çözüm) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ~~serisidir~~ harmonik serisi ~~ot~~ ıraksaktır.

$\frac{1}{2} < \frac{n+1}{n+2} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} < \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n}$

ıraksak old.

$\sum \frac{n+1}{n(n+2)}$ ıraksaktır.

3- Limit Mukayese Testi

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli seriler ve

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ olsun. ise.

1- $0 < L < \infty$ ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ karakterleri aynıdır.

2- $L = 0$ ise $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır.

3- $L = \infty$ ise $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ de ıraksaktır.

Ör) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot 2^n}$ serisinin karakterini inceleyin

Çözüm) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ geo. seri $r = \frac{1}{2} < 1$ old. yakınsak

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2 2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0$ old. $\sum \frac{2n+1}{n^2 2^n}$ yakınsak

Ör) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4n^2-1}{n^3+1}\right]^{1/2}$ serisinin karakterini inceleyin

Çözüm) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ $p = 1/2 < 1$ ıraksak

$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4n^2-1}{n^3+1}\right)^{1/2}}{\frac{1}{n^{1/2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2-1}{n^3+1} \cdot n\right)^{1/2} = 2 > \cancel{0}$ $\sum \left(\frac{4n^2-1}{n^3+1}\right)^{1/2}$ ıraksak

Ör) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ serisinin karakterini inc.

Çözüm: $\sum \frac{1}{n^{1/3}}$, $p = 1/3 < 1$ old. ıraksak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n^{1/3}}} = \lim_{n\to\infty} 1+\ln n = \infty$$ old. $\sum \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ ıraksak

4- D'Alembert Oran Testi : $\sum a_n$ pozitif terimli bir seri ols. ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

1- $L < 1$ ise seri yakınsak
2- $L > 1$ " seri ıraksak
3- $L = 1$ " bu kural uygulanmaz

Genelde faktöriyel ifadesi varsa bu kural uygulanır

Ör) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$ old.

seri yakınsaktır.

Ör) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{10^{n-1}}$ serisinin karak. inc.

Çözüm $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{10^n}}{\frac{(n-1)!}{10^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{10} = \infty > 1$

old. ıraksak

5- Cauchy Kök Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri ols.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = L$$

1 - $L<1$ ise seri yakınsar

2 - $L>1$ " seri ıraksar

3 - $L=1$ " test uygulanamaz

Ör) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ serisinin karakterini inc.

Çözüm: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+5}{3^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+5)^{1/n}}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[2^n\left(1+\frac{5}{2^n}\right)\right]^{1/n}}{3}$

$= \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{2^n}\right)^{1/n} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{2^n}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}1^0 = \frac{2}{3} < 1$

old. seri yakınsar

Ör) ~~$\lim_{n\to\infty}$~~ $\sum_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ serisinin karakterini inc.

Çözüm $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$= e > 1$ old. ıraksar

Alterne Seriler

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n>0$ olmak üz. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$

şeklindeki bir seriye alterne (alternatif) seri denir.

Alterne serilerle ilgili tek ~~y~~ yakınsaklık kriteri vardır.

(Alterne seri testi)

Leibniz kriteri: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ alterne serisi verilsin

1 - $0<a_{n+1}<a_n$ ve

2 - $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ise (Yani $\{a_n\}$ monoton azalan bir sıfır

dizisi ise) $\sum(-1)^{n-1}a_n$ serisi yakınsaktır.

Tanım: $\sum_k a_k$ alterne serisi verilsin. Eğer (17)

$\sum_k a_k$ serisinin terimlerinin mutlak değerlerinden

oluşan $\sum |a_k|$ serisi yakınsak ise $\sum a_k$ serisine

$\boxed{\text{mutlak yakınsaktır}}$ denir. Eğer $\sum a_k$ yakınsak

fakat mutlak yakınsak değilse $\sum a_k$ alterne

serisine $\boxed{\text{şartlı yakınsaktır}}$ denir.

*Seri Mutlak yakınsak ise yakınsaktır.

Alterne seriler için yakınsaklık incelenir:

seri mutlak yakınsak mı? → Evet → O halde seri yakınsaktır
→ Hayır → Leibniz anlamında yakınsak mı? → Evet → seri şartlı yakınsak
→ Hayır → seri ıraksak

Ör) $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ alterne serisinin yakınsaklık durumunu inc.

Çözüm) $\sum \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ ıraksaktır. O halde $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ mutlak

yakınsak değil. $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ old.

seri şartlı yakınsaktır.

Ör) $\sum (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{2n}\right)$ " "

Çözüm) $\sum \left|(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2n}\right| = \sum \frac{n+1}{2n}$ için

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \neq 0$ old. seri ıraksak. Alterne uygulanır yani $\sum (-1)^{n+1}\frac{n+1}{2n}$ ıraksak

Ör) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$ alterne serisinin yakınsaklık durumunu inc.

Çözüm) $\sum \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}\right| = \sum \frac{1}{n^n}$ için .. kök kriteri $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim \frac{1}{n} = 0 < 1$

old. seri mutlak yak. yani yakınsak

KUVVET SERİLERİ

Kuvvet Serileri ve Yakınsaklık

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

şeklindeki seriye $x=a$ civarındaki kuvvet serisi denir. Burada a serinin merkezi ve $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ sabitleri de serinin katsayıları olarak ifade edilir. x değişkeninin alabileceği değerlere göre yakınsak veya ıraksak olabilir. Seri bütün x ler için yakınsak olabilir, hiçbir x için yakınsak olmayabilir ya da belirli bir aralıkta yakınsak olabilir.

Tanım: $\sum_k c_k (x-a)^k$ kuvvet serisinin $|x-a|<R$ $(R\in\mathbb{R})$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına $\sum_k c_k (x-a)^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı denir. Seriyi yakınsak yapan x in değerleri kümesine de yakınsaklık aralığı denir.

$\sum_k c_k (x-a)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık durumu için,

$u_k = c_k (x-a)^k$, $u_{k+1} = c_{k+1}(x-a)^{k+1}$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}(x-a)^{k+1}}{c_k(x-a)^k}\right| = \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|}_{L}\cdot|x-a| = L|x-a|<1$$

yakınsak olabilmesi için

$\Rightarrow |x-a|<\frac{1}{L} \Rightarrow -\frac{1}{L} < x-a < \frac{1}{L} \Rightarrow a-\frac{1}{L} < x < a+\frac{1}{L}$

$\Rightarrow$ seri $\left(a-\frac{1}{L}, a+\frac{1}{L}\right)$ yakınsak

$\frac{1}{L} = R$ yakınsaklık yarıçapı

Benzer şekilde

$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow R = \frac{1}{L}$ ~~yazılabilir~~ hesaplanabilir.

Not: Seri aralığın uç noktalarında da yakınsak olabilir.

Ör $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve aralığını bulunuz.

Çözüm: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-1)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(x-1)\cdot\frac{n}{n+1}\right|$

$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)|x-1| < 1 \Rightarrow R = 1$ $\quad -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$

$x = 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksaktır.

$2n-1 \to$ tek sayı

$x = 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum\frac{1}{n}$ ıraksak old. mutlak yakınsak değil

$a_{n+1} = \frac{1}{n} < a_n = \frac{1}{n}$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ old. $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ şartlı yakınsak

O halde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $0 < x \le 2$ dir.

Ör $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{2^n \cdot n^2}$ serisinin yakınsaklık aralığını bul.

Çözüm $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^2}\cdot\frac{2^n n^2}{(x+1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right||x+1|$

$\Rightarrow |x+1| < 2$

$\Rightarrow R = 2$

$\Rightarrow -3 < x < 1$

$x=-3$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{2^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n . n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$p = 2 > 1$ old. yakınsak

$x=1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n . n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ alterne seri

$\sum \left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$ yakınsak old. $\sum (-1)^n \frac{1}{n^2}$ mutlak yakınsak

Yani $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{(x+1)^n}{2^n n^2}$, $x=1$ için yakınsaktır.

Yakınsaklık ~~[illegible]~~ aralığı
$-3 \le x \le 1$

03 $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ yakınsaklık yarıçapı nedir?

Çözüm: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} n+1 = \infty$

old. $\forall x$ için seri yakınsaktır

[illegible] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! . x^n$ yakınsaklık yarıçapı nedir?

Çözüm: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$x=0$ da yakınsaktır.

Teo (kuvvet serileri için yakınsaklık

(Teo): Eğer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

kuvvet serisi $x = c \neq 0$ değeri için yakınsak

ise bu durumda $|x| < |c|$ şartını sağlayan tüm x'ler için

mutlak yakınsaktır.

$\boxed{\text{Teo:}}$ Herhangi bir $\sum a_n (x-x_0)^n$ serisi için mümkün olan 3 durum vardır. (21)

$\boxed{a)}$ Seri sadece $x=x_0$ da yakınsak olabilir.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{L=\infty}|x-x_0|$$

$R=\frac{1}{L}=0$ old. sadece $x=x_0$ da yakınsak diğer noktalarda ıraksak.

$\boxed{b)}$ Seri x değişkeninin alacağı tüm değerler için yakınsak olabilir. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{L=0}|x-x_0|$

$R=\frac{1}{L}=\infty$

$\forall x\in\mathbb{R}$ için seri yakınsaktır.

$\boxed{c}$ Seri $|x-x_0|<R$ eşitsizliğini sağlayan tüm x değerleri için yakınsak olabilir ~~iken $|x-x_0|>R$~~

~~şartını sağlayan x değerlerinde ıraksayabilir.~~

$\boxed{Ö}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,\frac{(x-2)^n}{3^n}$ serisi için $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}(n+1)\,|x-2|<1$

$\rightarrow \frac{|x-2|}{3}\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)}_{\infty}<1 \Rightarrow R=0.$ O halde seri sadece $x=2$ de yakınsar

$\boxed{Ö}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{(n+1)!}$ serisi için $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(3x)^{n+1}}{(n+2)!}\,\frac{(n+1)!}{(3x)^n}\right|$

$$=|3x|\,\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}}_{0}<1 \Rightarrow R=\frac{1}{L}=\frac{1}{0}=\infty$$

Seri $\forall x\in\mathbb{R}$ için yakınsaktır.

Teo (Kuvvet serileri için Seri Çarpım Teoremi): (22)

Eğer $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $|x|<R$

aralığında mutlak yakınsak iseler

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

olarak verilirse o zaman $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ serisi $|x|<R$

aralığında $A(x)B(x)$ 'e yakınsar:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Teo Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x|<R$ için mutlak yakınsak

ise o zaman her sürekli f fonk. için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$

serisi de $|f(x)|<R$ için yakınsak.

Teo: Eğer $\sum c_n (x-a)^n$ serisi $R>0$ yakınsaklık yarıçapına sahipse $a-R<x<a+R$ aralığında bir fonk. tanımlar;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n.$$

Bu f fonk. aralığın iç noktalarında her mertebeden türevi vardır ve bu türevleri bulmak için serinin terimlerinin teker teker türevleri alınır.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2}$$

ve böyle devam eder. Bu yeni elde edilmiş türev serilerinden her biri $a-R<x<a+R$ aralığının her noktasında yakınsaktır.

Ör) $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1$

~~olarak verilmişse~~ $\Rightarrow f'(x) = ?$ ve $f''(x) = ?$

Çözüm) $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + n x^{n-1} + \dots$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad -1 < x < 1$

$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \dots + n(n-1) x^{n-2} + \dots$

$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}, \quad -1 < x < 1$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x)$

$|r| < 1$ olmüşü. $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ dir.

Geometrik seridir. $|r| \geq 1$ de ıraksaktır.

Eğer $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ de tanımlıdır.

$r = x$, $|x| < 1$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = f(x)$.

$x > 1$ veya $x < -1$ olduğunda bu eşitlik olmaz

$f(2) = -1$ için $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$ ıraksar

Genel olarak $a > 0$ için

$|x| < a$ olmüşü. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{a}{a-x}$

Ör) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $|-x^2| < 1$, $x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$ olmüşü

$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$

b) $$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{2x}{3}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{2x}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2x}{3}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{3^{k+1}} x^k$$

$$\left|-\frac{2x}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x < 3/2$$

c) $h(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$; ~~fonksiyonunu~~ ~~edin~~ ~~kuvvet serisini~~

bulalım

~~kullan~~ $f(x) = \frac{1}{1-x}$; ~~kullanalım~~

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+x}\right) = -\frac{1}{(2+x)^2} \Rightarrow \frac{1}{(2+x)^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+x}\right)$$

$$f(-x-1) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{1-(-x-1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (x+1)^k$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}(x+1)^{k+1}}{(-1)^k (x+1)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}|(x+1)| \Rightarrow |x+1| < 1$$

$$\Rightarrow -2 < x < 0$$

$$\frac{1}{(2+x)^2} = -\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (x+1)^k\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k (x+1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} k (x+1)^{k-1}, \quad -2 < x < 0$$

~~$-2 < x < 0$~~

Teo: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, $a-R<x<a+R$ $(R>0)$ için yakınsak old. kabul edelim. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}, \quad a-R<x<a+R \text{ için ve}$$

$$\int_0^x f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}, \quad a-R<x<a+R$$

için yakınsaktır.

Ö) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots \quad -1\le x\le 1$$

fonk. kapalı formunu bulunuz

Çözüm: $$f'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots, \quad -1<x<1$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^x f'(x)\,dx=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x$$

~~x = 0 olduğunda seri f(x) sıfırdır yani C = 0 dır~~

Bu durumda $$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\arctan x, \quad -1\le x\le 1$$

Ö) $$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots$$ serisi $-1<t<1$ açık aralığında yakınsaktır. Bu nedenle

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \Rightarrow \ln(1+x)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots\Big|_0^x$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

veya $$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1<x<1$$

8) $\ln(1+x^2)$ temsil eden kuvvet serisi ve yakınsaklık aralığını bul.

Çözüm $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln|1+x^2| + C$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad (|x|<1)$$ (Sayfa 23 de var.)

$$\Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k x^{2k+1}$$

$$\rightarrow \ln(1+x^2) = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k x^{2k+1}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{2}(-1)^k x^{2(k+1)}}{\cancel{2}(k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2(k+1)}}{k+1}, \quad -1<x<1$$

9) kuvvet serilerini kullanarak $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{3^{k+1}} = \frac{9}{4}$ olduğunu göster.

Çözüm $\displaystyle f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (|x|<1)$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1} n x^{n-1}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad |x|<1$$

$$x f''(x) = \frac{2x}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-1}, \quad |x|<1$$

$x = 1/3$ ve $n = k+2$ alalım.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \frac{2\cdot(1/3)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{9}{4}$$

27

~~$\frac{1}{1+x^2}$ 'in kuvvet serisi temsilini elde ediniz ve yakınsaklık aralığını bulunuz.~~

~~Çözüm~~

$$\cancel{\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}}$$

~~elde ederiz~~ $\cancel{|-x^2| < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1}$

Örnek $h(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$ ile verilen h fonk. temsil eden kuvvet serisini ve onun yakınsaklık aralığını bulunuz için $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in kuvvet seri temsilinden faydalanınız.

Çözüm

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{1-(-x-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x+1)^k$$

her iki tarafın türevini alırsak

$$\Rightarrow -\frac{1}{(2+x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, k \, (x+1)^{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2+x)^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, k \, (x+1)^{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2+x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \, k \, (x+1)^{k-1}$$

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} k}{(-1)^{k+2}(k+1)} \right| = 1$$

$|x+1| < 1 \Rightarrow -1 < x+1 < 1 \Rightarrow -2 < x < 0$

$x = -2$ için $\sum_{k=1}^{\infty} k$ ıraksak

$x = 0$ için $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k$ ıraksak

$(-2, 0)$

9) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ in temsil ettiği kuvvet serisini kullanarak $\phi(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ile tanımlı ϕ fonk. temsil eden kuvvet serisini bulunuz.

Çözüm

$$\phi(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

$$\phi'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$$

$$\to \phi'(x)=\frac{2}{1-x^2}$$

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\dots=\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

$$\to \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\int\frac{2\,dx}{1-x^2}=2\int\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}\,dx=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

O halde $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ dir.

Bu serinin yakınsaklık aralığı $(-1,1)$ dir. Yani $f(x)=\frac{1}{1-x}$ in temsil ettiği seri ile aynıdır.

29

03 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$ old. göst.

Çözüm $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx$

$\Rightarrow \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n} dx$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

04 $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ old. göst.

Çözüm $\int \frac{1}{1-x} = \int \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad , \quad |x|<1$

$\Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$

$k \to k-1$ alınırsa

$\Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

$\Rightarrow x=-1$ yazılırsa $-\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

her iki tarafı (-1) e bölersek

$\Rightarrow \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

CamScanner ile

9) $\ln x$ fonk.nun $(x-2)$ nin kuvvetleri şeklinde bir serisini bulunuz.

Çözüm: $\ln x = \ln(2+(x-2)) = \ln\left[2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)\right]$, $\quad t = \frac{x-2}{2}$

$= \ln 2 + \ln(1+t)$

$\frac{d}{dx}[\ln(1+x)] = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$

$\Rightarrow \int\left[\frac{d}{dx}\ln(1+x)\right]dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int x^k dx$

$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

$\ln x = \ln 2 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$

$= \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2.2^2} + \frac{(x-2)^3}{3.2^3} - \frac{(x-2)^4}{4.2^4} + \cdots$

$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.2^n}(x-2)^n$

IV. Hafta

TAYLOR VE MACLAURIN SERİLERİ

Tanım: f fonk. bir a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonk. ols. Bu durumda f tarafından $x=a$ noktasında üretilen Taylor serisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots$$

f tarafından üretilen Maclaurin serisi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

olarak tanımlanır. Yani $x=0$ daki Taylor serisidir.

Ö) $f(x) = 1/x$ tarafından $a=2$ noktasında üretilen Taylor serisini bulunuz. Hangi noktalarda (eğer varsa) bu seri $1/x$ e yakınsar?

4. örnek: $f(x)=x^{-1}$, $f'(x)=-x^{-2}$, $f''(x)=2x^{-3}$

$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\, x^{-(n+1)}$

$f(2)=2^{-1}=\frac{1}{2}$, $f'(2)=-\frac{1}{2^2}$, $f''(2)=2\cdot\frac{1}{2^3}$,

$f^{(n)}(2)=(-1)^n n!\,\frac{1}{2^{n+1}}$

$$\Rightarrow f(x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+\dots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\dots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{(x-2)}{2}\right]^n$$ geometrik seri

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^{n+2}}{(-1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}2=2$$

$|x-2|<2\Rightarrow -2<x-2<2\Rightarrow 0<x<4$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left[-\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{x}=\frac{1}{x}$$

O halde bu seri $0<x<4$ aralığında $1/x$'e yakınsar.

Tanım: f fonk. bir a noktasını içeren bir aralıkta $k=1,2,\dots,N$ olmak üzere k'ıncı mertebeden türevlerinin bulunduğunu varsayalım. Bu durumda 0'dan N'ye kadar n herhangi bir tamsayı olmak üzere f tarafından $x=a$ noktasında üretilen n-inci mertebeden Taylor polinomu aşağıdaki polinom olarak tanımlanır;

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ör: $f(x)=e^x$ fonk. tarafından $x=0$ da üretilen Taylor serisini ve Taylor polinomlarını bulunuz.

Teorem: $\forall n \in \mathbb{R}$ için $f^{(n)}(x) = e^x$ ve $f^{(n)}(0) = 1$

old. $x=0$ civarında f nin ürettiği Taylor serisi

aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (e^x \text{ in Maclaurin serisi})$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{1}\right| = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty \quad \text{old.}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için bu seri yakınsaktır.

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Sık Kullanılan Maclaurin Serileri

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-x)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad |x| < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1 < x \le 1$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \le 1$$

07 a) $\frac{1}{3}(2x+x\cos x)$ b) $e^x \cos x$

~~seriler~~ fonksiyonların Maclaurin ~~Taylor~~ serilerini bulunuz

Çözüm a) $\frac{1}{3}(2x+x\cos x) = \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\dots\right)$

$$= \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{3.4!}-\dots$$

$$= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{72}-\dots$$

b) $e^x\cos x = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)$

$$= \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)-\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{2!2!}+\frac{x^5}{2!3!}+\dots\right)$$

$$+\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{2!4!}+\dots\right)+\dots$$

$$= 1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\dots$$

07 $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ fonk. Maclaurin serisini elde ediniz ve serinin yakınsaklık aralığını belirleyiniz

Çözüm $f(x) = \ln\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \ln\sqrt{1+x}-\ln\sqrt{1-x}$

$$= \ln(1+x)^{1/2}-\ln(1-x)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]$$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(\underset{(1-x)}{\frac{1}{1+x}}+\underset{(1+x)}{\frac{1}{1-x}}\right) = \frac{1}{1-x^2}$

$|x|<1$ için $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots$ geometrik serisinde

$x=t^2$ alalım

$|t|<1$ için

$$\frac{1}{1-t^2} = 1+t^2+(t^2)^2+(t^2)^3+\dots = 1+t^2+t^4+t^6+\dots+t^{2n}+\dots$$

olup $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\dots+\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\dots\Big|_0^x$

$$= x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ dir.}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2(n+1)+1}{1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1} = 1.$$

$|x|<1 \Rightarrow -1<x<1$

$x=-1$ için $\sum \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow \sum\left|\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right| = \sum \frac{1}{2n+1}$ lim. test'e göre

ıraksak. O halde mutlak yak. değil. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ ve

$\frac{1}{2n+1}=a_n > \frac{1}{2n+3}=a_{n+1}$ old. aralık Leibniz $\sum\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$ şartlı yakınsak

$x=1$ için $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ serisi ile $\sum\frac{1}{n}$ serilerinin karakterleri

aynıdır. (Limit karşılaştırma testi)

~~O halde~~ Buradan $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ serisinin yakınsaklık aralığı

$-1\le x<1$ dir.

3) $\int \sin x^2\,dx$ integralini bir kuvvet serisi olarak ifade ediniz.

Çözüm

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

$x\to x^2$ alınırsa

$$\sin x^2 = x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\dots$$

$$\int \sin x^2\,dx = C+\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7.3!}+\frac{x^{11}}{11.5!}-\frac{x^{15}}{15.7!}+\dots$$

07 $e^{-x^2/3}$ fonk. Maclaurin serisini elde ediniz.

Çözüm $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$x \to -x^2/3$ alınırsa

$$e^{-x^2/3} = \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}} \; 1 - \left(\frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\,3^n} \cdot x^{2n}, \quad (\forall x \in \mathbb{R} \text{ için geçerli})$$

08 a) $f(x) = \tan x$ ~~ve~~ b) $f(x) = \ln(\cos x)$

fonks. ları için Maclaurin serilerini elde ediniz

Çözüm a) $f(x) = \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$

$$\text{b) } \ln(\cos x) = \overbrace{\ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\right)}^{\ln(1+t)}$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^3 + \cdots$$

$$= -\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \cdots$$

*

09 $\cos 43°$ değerini $\frac{1}{10000}$ den daha az hata ile bulunuz

Çözüm $\cos 43° = \cos\left(\frac{43\pi}{180}\right) = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^6 + \cdots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-2)!} \left(\frac{43\pi}{180}\right)^{2n-2}$$

$\frac{43\pi}{180} \approx 0,75049\ldots < 1$

$n=5$ için $\frac{1}{8!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^8 < \frac{1}{10000}$

o halde $\cos 43° \approx 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^4-\frac{1}{6!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^6$

$\approx 0,73135\ldots$

07) $E(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ nin yaklaşık değerini Maclaurin serisini kullanarak bulunuz ~~~~

~~~~ Çözüm $E(x)=\int_0^x \left(1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}-\ldots\right)dt$

$=\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5.2!}-\frac{t^7}{7.3!}+\frac{t^9}{9.4!}-\ldots\right)\Big|_0^x$

$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5.2!}-\frac{x^7}{7.3!}+\frac{x^9}{9.4!}-\ldots$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1).n!}$

08) $\ln(6/5)$ değerini 5.10^{-5} den daha az hatayla hesaplayınız

Çözüm: $\ln(6/5)=\ln\left(1+\frac{1}{5}\right)\cong\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3$

$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5$

$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^6 < 5.10^{-5}$ old. $\cong 0.18233$
~~~~

Taylor serisinden yararlanarak Belirsizlik durumundaki limitlerin Hesaplaması

01) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

*

Çözüm $\lim_{x\to 0} \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots\right)$

$= \frac{1}{6}$

02) $\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

Çözüm

$\lim_{x\to 0} \frac{\left((1+2x)+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots-1\right)\left(x^3-\frac{x^6}{2}+\cdots\right)}{\left[1-\left(1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\cdots\right)\right]^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^4+2x^5+\frac{8x^6}{3!}+\cdots}{\left(\frac{9}{2}x^2-\frac{3^4}{4!}x^4+\cdots\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2+2x+\frac{8}{6}x^2+\cdots}{\left(\frac{9}{2}-\frac{3^4}{4!}x^2+\cdots\right)^2} = \frac{2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2}$

$= \frac{8}{81}$

03) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

*

Çöz $\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots$ old.

$\ln x = \ln(1+\underbrace{(x-1)}_{=t}) = (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots$

$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} 1-\frac{1}{2}(x-1)+\cdots$

$= 1$

PARAMETRİK DENKLEMLER VE KUTUPSAL KOORDİNATLAR

Parametrik Denklemler

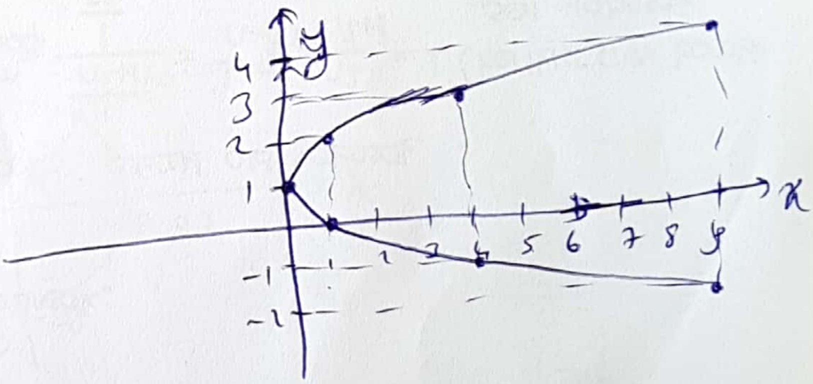
Tanım Eğer f fonk. x, y ve t değerlerinin I aralığında $x=f(t)$, $y=g(t)$ şeklinde tanımlarsa $(x,y)=(f(t),g(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğridir. Bu denklemlere eğri için parametrik denklemler denir.

Ör Aşağıdaki parametrik denklemlerle tanımlanan eğrinin grafiğini çiziniz.

$$x=t^2, \quad y=t+1, \quad -\infty<t<\infty$$

Çözüm:

t	x	y
-3	9	-2
-2	4	-1
-1	1	0
0	0	1
1	1	2
2	4	3
3	9	4

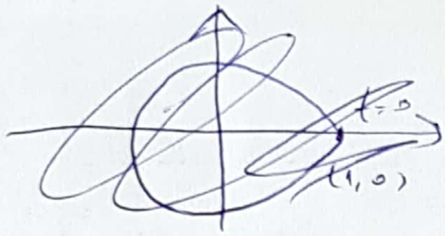


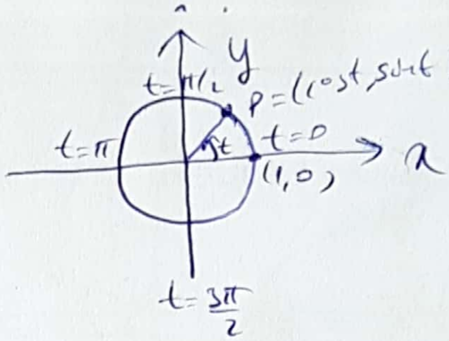
Ör Aşağıda verilen parametrik denklemlerin grafiklerini çiziniz.

a) $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le 2\pi$

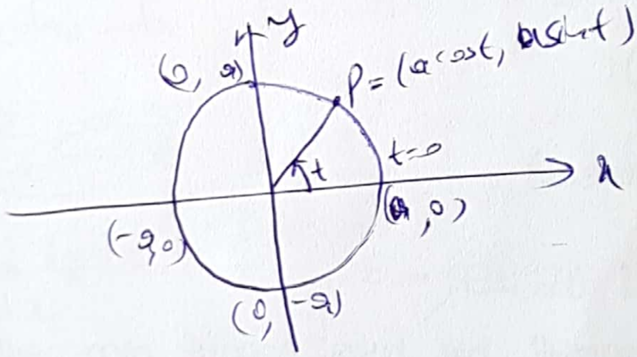
b) $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\le t\le 2\pi$

Çözüm a) $x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$ old. $x^2+y^2=1$ birim çemberini verir. ~~t değeri 0 dan 2π ye arttıkça (x,y) = (cos t, sin t) noktası (1,0)~~ noktasından başlayıp saat yönünün ters yönünde birim çemberi izler.





~~b) $x^2+y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2$, Bu parametrizasyon $(a,0)$ noktasından başlayıp $x^2+y^2=a^2$ çemberinde saatin aksi yönünde hareket eden ve $t=2\pi$ de başladığı $(a,0)$ noktasında biten yolu tanımlar. Grafiğin merkezi orijindedir, yarıçapı $r=a$ ve koordinatları $(a\cos t, a\sin t)$ olan bir çemberdir.~~



08) (a,b) noktasından geçen ve eğimi m olan doğruyu parametrize ediniz.

Çözüm: $y-b=m(x-a)$,

$t=x-a$ alınırsa $y-b=mt \Rightarrow \begin{cases} x=a+t \\ y=b+mt \end{cases}, \quad -\infty<t<\infty$

09) Koordinatları aşağıda parametrize edilen $P(x,y)$ noktasının hareket ettiği yolu tanımlayarak grafiğini çiziniz.

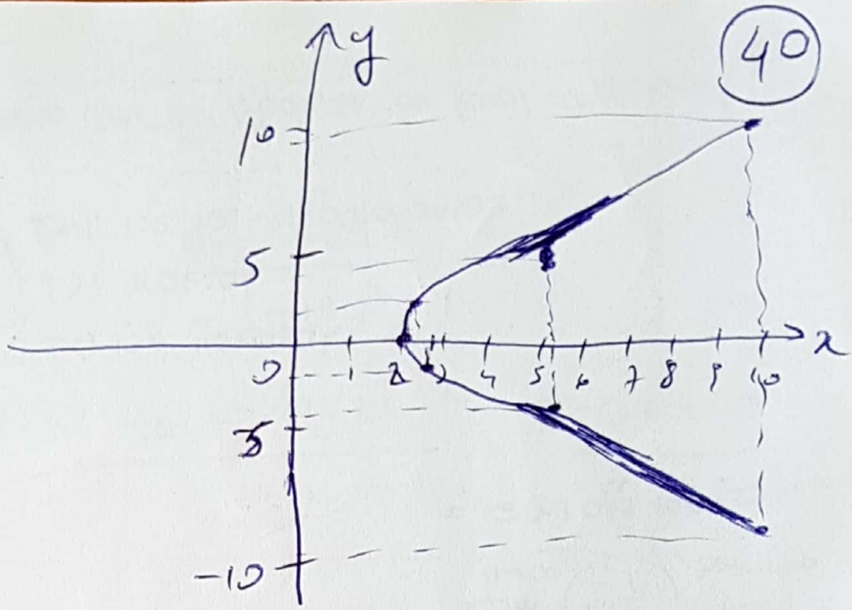
$$x=t+\frac{1}{t}, \quad y=t-\frac{1}{t}, \quad t>0$$

Çözüm:

$$x-y=\left(t+\frac{1}{t}\right)-\left(t-\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{t} \Rightarrow (x-y)(x+y)=4$$

$$x+y=\left(t+\frac{1}{t}\right)+\left(t-\frac{1}{t}\right)=2t \Rightarrow x^2-y^2=4$$

t	x	y
0.1	10.1	-9.9
0.2	5.2	-4.8
0.4	2.9	-2.1
1.	2	0
2	2.5	1.5
5	5.2	4.8
10	10.1	9.9



Teğetler ve Alanlar

Eğer f ve g fonks. ları t noktasında türevlenebilir ise $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ parametrik eğrisi de t noktasında türevlenebilirdir.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt} \text{ old.}$$

$y\to y'$ yazılırsa

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(y')=\frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

Ör) Aşağıdaki eğrinin $x=\sec t$, $y=\tan t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$

$(\sqrt{2},1)$ noktasındaki teğetini bulunuz (yani $t=\pi/4$)

Çözüm: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t}$

~~t yerine π/4 yaz~~ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4}=\frac{\sec(\pi/4)}{\tan(\pi/4)}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$

$y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \Rightarrow y=\sqrt{2}x-1$

Ör) $\begin{cases} x=t-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$ için $\frac{d^2y}{dx^2}=?$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right) = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2-6t+6t^2)/(1-2t)^2}{1-2t} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}$$

Parametrik Olarak Tanımlı Eğrilerin Uzunluğu

Tanım: Eğer C eğrisi $x=f(t)$ ve $y=g(t)$, $a \le t \le b$ ile parametrik olarak tanımlanıyorsa (burada f' ve g', $[a,b]$ aralığında sürekli ve aynı anda sıfır olmayan fonk. dır.) ve $t=a$ dan $t=b$ ye artarken C eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiliyorsa bu durumda C eğrisinin uzunluğu aşağıdaki belirli integraldir.

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

ÖR $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ çemberinin uzunluğunu bulunuz

Çözüm $\frac{dx}{dt} = -r\sin t$, $\frac{dy}{dt} = r\cos t$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = r^2\sin^2 t, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2\cos^2 t$$

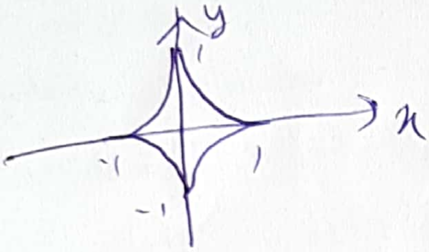
$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2, \quad L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi r \text{ br}$$

9) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

astroidinin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm



$$\frac{dx}{dt} = 3\cos^2 t(-\sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t(\cos t)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t \quad , \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9\sin^4 t\cos^2 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t\,(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1})}$$

$$= 3|\cos t\sin t| \quad , \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ için } \cos t\sin t \geq 0$$

Birinci bölgedeki uzunluğu $= \int_0^{\pi/2} 3\cos t\sin t\,dt$

$$= 3\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt$$

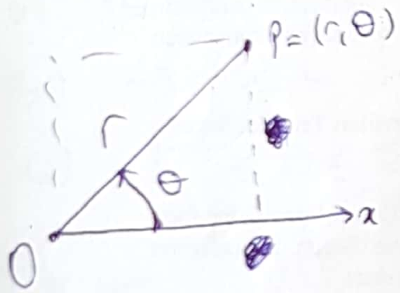
$$= -\frac{3}{4}\cos 2t \Big|_0^{\pi/2}$$

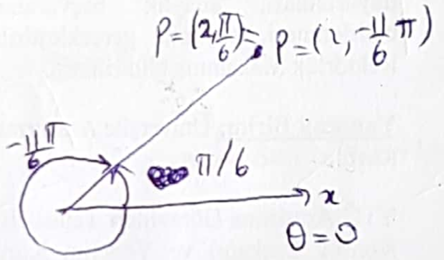
$$= \frac{3}{2}$$

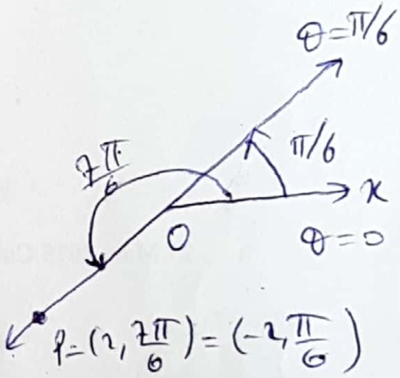
Toplam uzunluk $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ br

Kutupsal Koordinatlar

Kutupsal koordinatı tanımlamak için önce bir O orijini (buna kutup diyeceğiz) ve bir başlangıç ışını sabitliyoruz. Bu durumda düzlemde herhangi bir P noktasını (r,θ) kutupsal koordinat çifti ile gösterebiliriz. Burada r, P'nin orijine olan yönlü uzaklığı ve θ da başlangıç ışını ile OP arasındaki yönlü açıyı vermektedir.







$P=(r,\theta)$

r → O dan P ye olan yönlü uzaklık

θ → Başlangıç ışınından OP ye olan yönlü açı

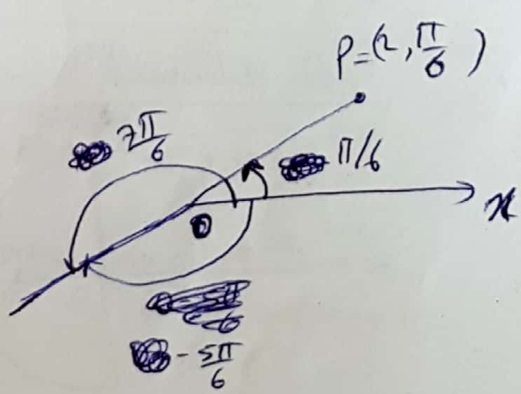
Ö1 $P=(2,\frac{\pi}{6})$ noktasının tüm kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: $P=(2,\frac{\pi}{6}+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

$P=(-2,-\frac{5\pi}{6}+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

yukarıdaki izleniyor $P=(-2,\frac{7\pi}{6}+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

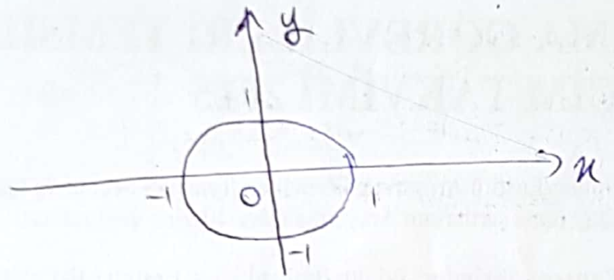
$P=(2,-\frac{11}{6}\pi+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$



Kutupsal Denklemler ve Grafikleri

Denklem	Grafiği
$r=a$	Merkezi orijin O da yarıçapı $\lvert a\rvert$ olan çember
$\theta=\theta_0$	O'dan geçen ve başlangıç ışını ile θ_0 açısı yapan doğru

Ö) $r = 1$ ve $r = -1$, merkezi O da ve yarıçapı 1 olan çember ~~denklemleridir.~~ denklemleridir. $(0 \le \theta \le 2\pi)$



Ö) Kutupsal koordinatları aşağıdaki şartları sağlayan noktalar kümesinin grafiğini çiziniz.

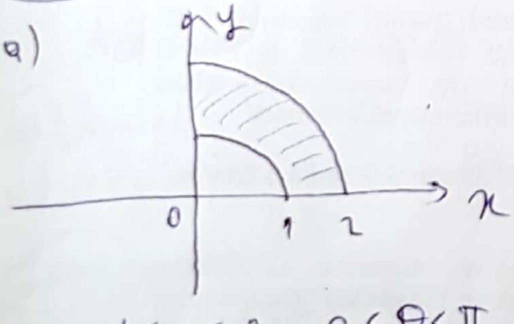
a) $1 \le r \le 2$ ve $0 \le \theta \le \pi/2$

b) $-3 \le r \le 2$ ve $\theta = \pi/4$

c) $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ (r üzerinde kısıtlama yok.)

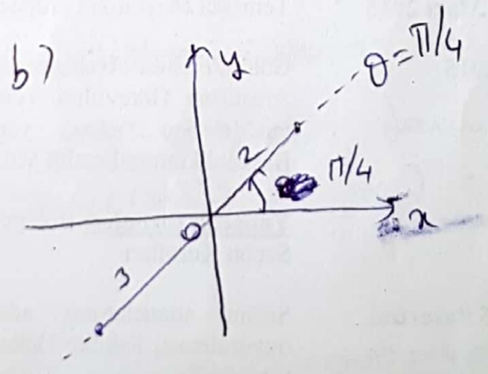
Çözüm

a)



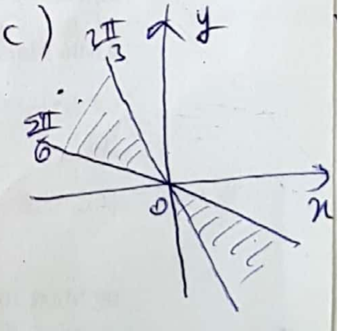
$1 \le r \le 2, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

b)



$-3 \le r \le 2$

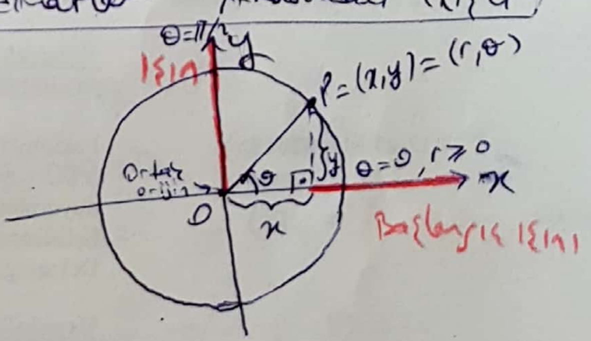
c)



$\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$

Kutupsal ve Kartezyen Koordinatlar Arasındaki İlişki

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

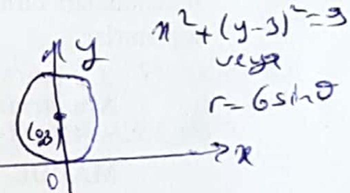


Bir düzlemde kutupsal ve kartezyen koordinatları birlikte kullandığımızda ışı orijini üst üste koyarak başlangıç ışını x-ekseni olarak seçeriz. $\theta = \pi/2$, $r > 0$ ışını pozitif y-eksenini verir.

Ö7) kutupsal denklem — kartezyen denkliği

kutupsal denklem	kartezyen denkliği
$r\cos\theta = 2$	$x = 2$
$r^2\cos\theta\sin\theta = 4$	$xy = 4$
$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$r = 1 + 2r\cos\theta$	$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$
$r = 1 - \cos\theta$	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$

Ö) $x^2 + (y-3)^2 = 9$ çemberi için kutupsal bir denklem bulunuz.



Çözüm: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - 3)^2 = 9$

$\Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 6r\sin\theta \cancel{+9} = \cancel{9}$

$\Rightarrow r^2 - 6r\sin\theta = 0$

$\Rightarrow r(r - 6\sin\theta) \Rightarrow \cancel{r=0}$ veya $r = 6\sin\theta$

Ö7) Aşağıdaki kutupsal koordinatların yerine denk olan kartezyen denklemini bulunuz ve bu ~~grafik~~ grafikleri tanımlayınız.

a) $r\cos\theta = -4$ b) $r^2 = 4r\cos\theta$,   c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

Çözüm

a) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $r^2 = x^2 + y^2$ olur. $r\cos\theta = -4 \Rightarrow x = -4$

Grafiği: x-ekseninde $x=-4$ noktasında geçen dik doğru

b) $r^2 = 4r\cos\theta$, kartezyen denklemi: $x^2 + y^2 = 4x$

$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$

Grafiği: ~~çember~~ yarıçapı 2 merkezi $(2,0)$ olan çember

c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \sin\theta} \Rightarrow 2r\cos\theta - r\sin\theta = 4$

$\Rightarrow 2x - y = 4 \rightarrow y = 2x - 4$

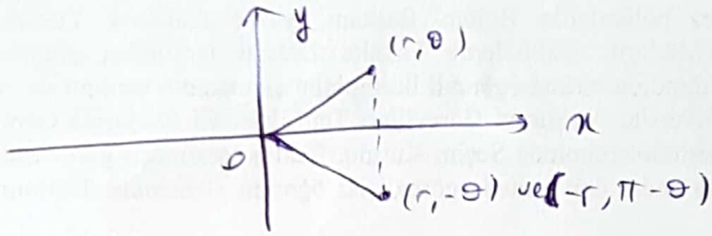
Grafiği: eğimi 2, olan doğru

Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi

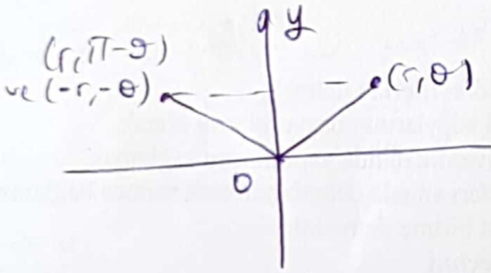
Simetri

Kutupsal Grafiklerde simetri testleri

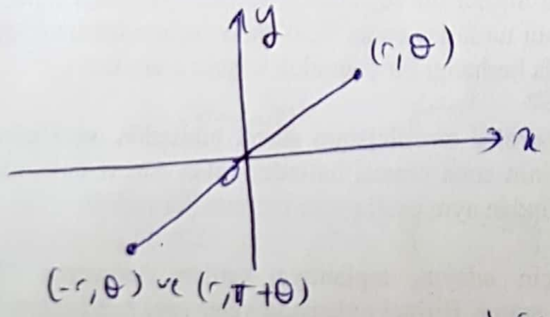
1- x-eksenine göre simetri: Eğer (r,θ) noktası grafik üzerinde ise $(r,-\theta)$ veya $(-r,\pi-\theta)$ noktası da grafik üzerindedir.



2- y-eksenine göre simetri: Eğer (r,θ) noktası grafik üzerinde ise $(r,\pi-\theta)$ veya $(-r,-\theta)$ noktası da grafik üzerindedir.



3- Orijine göre simetri: Eğer (r,θ) noktası grafik üzerinde ise $(-r,\theta)$ veya $(r,\pi+\theta)$ noktası da grafik üzerindedir.



$r=f(\theta)$ eğrisinin teğet doğrusunun eğimi:

(r,θ) noktasında $\frac{dx}{d\theta}\neq 0$ olmalı. $r=f(\theta)$ kutupsal eğrisinin eğimi

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(f(\theta)\sin\theta\right)}{\frac{d}{d\theta}\left(f(\theta)\cos\theta\right)} = \frac{\frac{df}{d\theta}\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{\frac{df}{d\theta}\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

03 $r = 2(1+\sin\theta)$ eğrisinin grafiğini çiz

Çözüm:

1- Fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

2- $f(T+\theta) = f(\theta)$ — $\sin\theta$, 2π periyotlu old. dır. 2π periyotludur.

$\Rightarrow \cancel{2}(1+\sin(T+\theta)) = \cancel{2}(1+\sin\theta)$ — Şu halde inceleme 2π

$\Rightarrow \sin(T+\theta) = \sin\theta$ — uzunluğundaki bir ara

$\Rightarrow T+\cancel{\theta} = \cancel{\theta}+2\pi$ — lıktaki bir aralıkta

$\Rightarrow T = 2\pi$ — yapılmalıdır.

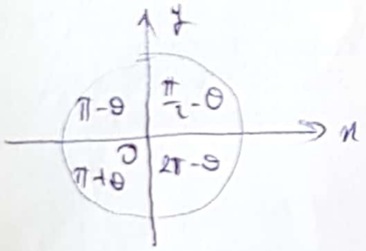
3- $(r, \pi-\theta)$ denklemi sağlandığından

$r = 2(1+\sin\theta)$

$r = 2(1+\sin(\pi-\theta)) \rightarrow \sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ old. eğri

y-eksenine göre simetriktir. O halde ~~sadece~~ incelemeyi

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında yapmak yeterlidir.



4- $r' = f'(\theta) \Rightarrow r' = 2\cos\theta$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında $\cos\theta \geq 0$ old. $r' \geq 0$ dır.

Açı büyüdükçe r büyümekte yani eğrinin noktaları kutuptan uzaklaşmaktadır.

5- Bazı özel noktalarda aldığı değerleri bulalım

$\sin(-\theta) = \sin\theta$

$f(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(-\frac{\pi}{3}) = 2-\sqrt{3} \cong 0{,}27$, $f(-\frac{\pi}{4}) = 2-\sqrt{2} \cong 0{,}59$

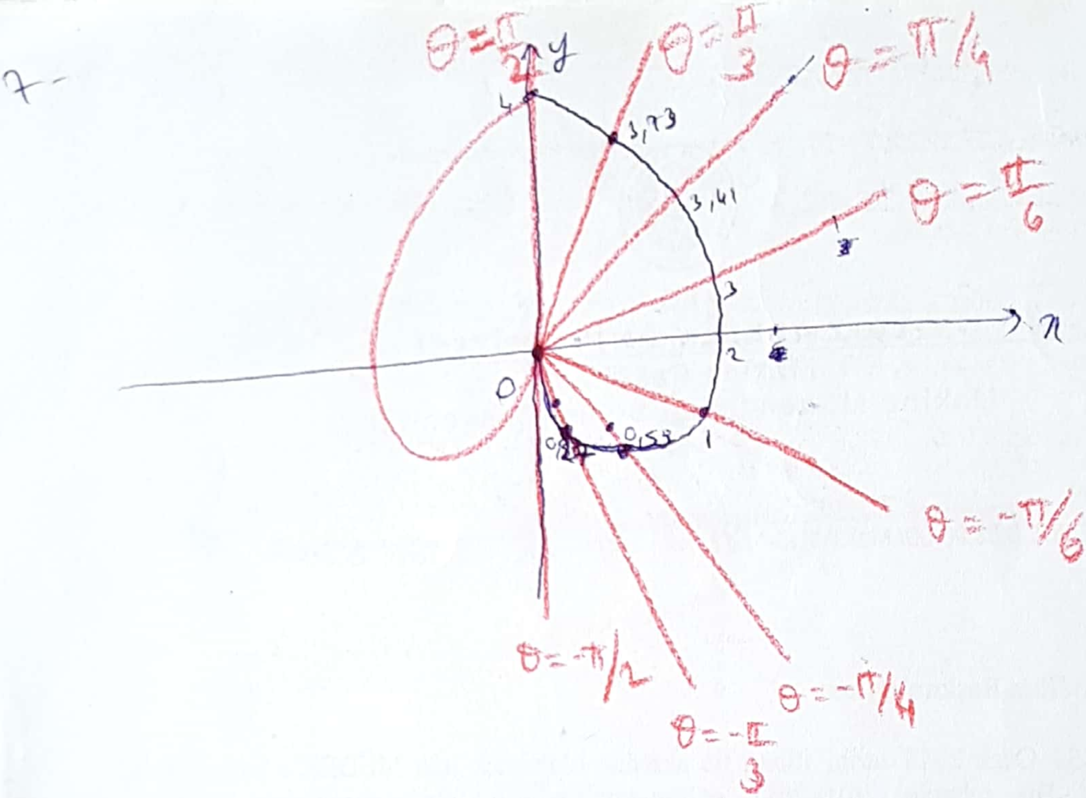
$f(-\frac{\pi}{6}) = 1$, $f(0) = 2$, $f(\frac{\pi}{6}) = 3$, $f(\frac{\pi}{4}) = 2(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) \cong 3{,}41$

$f(\frac{\pi}{3}) = 2(1+\frac{\sqrt{3}}{2}) \cong 3{,}73$, $f(\frac{\pi}{2}) = 4$

6. Değişim tablosu

θ	$-\infty$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$+\infty$
r'		0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$ 0	
r		0	$0{,}27$	$0{,}59$	1	2	3	$3{,}41$	$3{,}73$	4	

7-



Bu eğriye kardiyoid adı verilir.

$r = a(1-\sin\theta)$

$r = a(1+\cos\theta)$ denklemleri birer kardiyoiddir.

$r = a(1-\cos\theta)$

8) $r = 2+4\cos\theta$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm: 1- Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

2- $f(T+\theta) = f(\theta)$

$\Rightarrow \cancel{2}+4\cos(T+\theta) = \cancel{2}+4\cos\theta$

$\Rightarrow \cos(T+\theta) = \cos\theta$

$\Rightarrow T+\theta = \theta+2\pi$

$\Rightarrow T = 2\pi$

3- (r,θ) ve $(r,-\theta)$ için $f(\theta) = f(-\theta) \Rightarrow$ old. grafik kutup eksenine (x-eksenine) göre simetriktir. O halde $[0,\pi]$ de grafiği çizip bulunan eğrinin x-eksenine göre simetriğini almak yeterlidir.

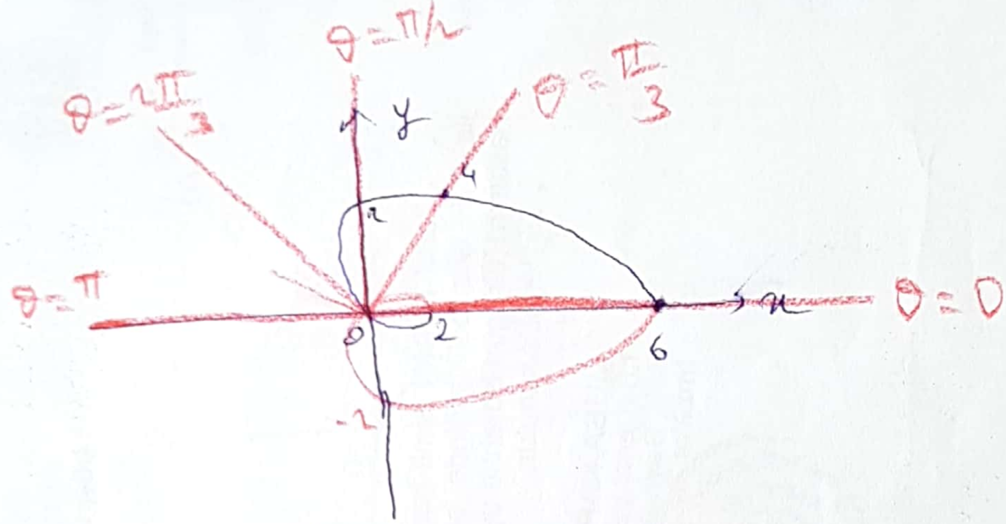
4- $r' = -4\sin\theta$, $\forall\theta\in[0,\pi]$ için $r' \le 0$ azalandır

5- $f(0) = 6$, $f(\pi/3) = 4$, $f(\pi/2) = 2$, $f(\frac{2\pi}{3}) = 0$, $f(\pi) = -2$ dir.

6-

θ	$-\infty$	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$+\infty$
r'		0 —	—	—	—	— 0	
r		6	4	2	0	-2	

7-



Limaçon

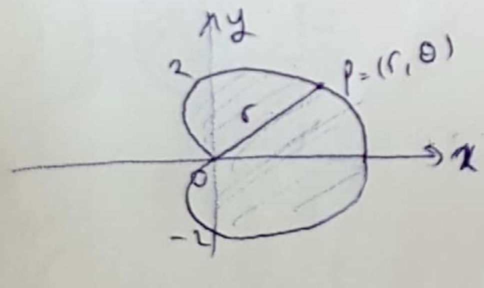
Kutupsal Koordinatlarda Alanlar ve Uzunluklar

$r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ eğrisi ile orijin arasındaki bölgenin alanı:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta \Rightarrow \left(dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} (f(\theta))^2 d\theta \right)$$

Ö3) $r = 2(1+\cos\theta)$ ~~kardioid~~ kardioidi ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz

Çözüm:



$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2 + 4\cos\theta + 2\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= 3\theta + 4\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{2\pi}$$

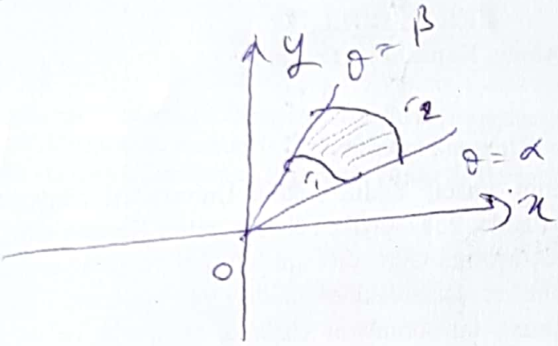
$$= 6\pi \text{ br}^2$$

$0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ bölgesinin 50

alanı:

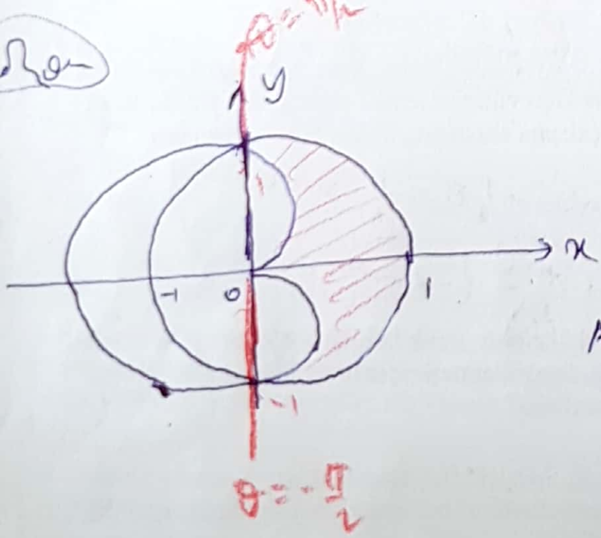
$$A = \int_\alpha^\beta \cancel{\tfrac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)} \, \frac{1}{2} r_2^2 \, d\theta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_1^2 \, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \, d\theta$$



(3) $r = 1$ çemberinin içinde ve $r = 1 - \cos\theta$ kardioidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm



$1 - \cos\theta = 1$

$\to \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = -\pi/2$ ve $\pi/2$

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \left(1^2 - (1-\cos\theta)^2\right) d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \left(\cancel{1} - \cancel{1} + 2\cos\theta - \cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[2\cos\theta - \frac{(1+\cos 2\theta)}{2}\right] d\theta$$

$$= 2\sin\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 2 - \frac{\pi}{4} \text{ br}^2$$

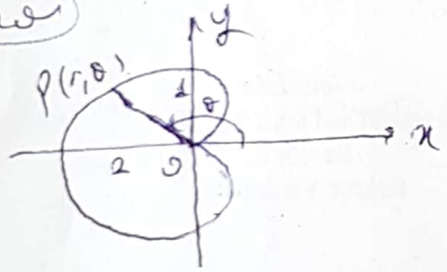
Kutupsal Eğrinin Uzunluğu.

Eğer $\alpha \le \theta \le \beta$ aralığında $r=f(\theta)$ fonk. sürekli birinci türevleri varsa ve θ değeri α dan β ya değişirken $P=(r,\theta)$ noktası $r=f(\theta)$ eğrisini sadece bir kez geçiyor ise bu durumda eğrinin uzunluğu aşağıdaki gibidir.

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Ör) $r=1-\cos\theta$ kardiodinin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm



$$\frac{dr}{d\theta}=\sin\theta$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta$$

$$1-\cos\theta=2\sin^2(\theta/2)$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$, $0\le\theta\le 2\pi$ için $\sin(\theta/2)\ge 0$

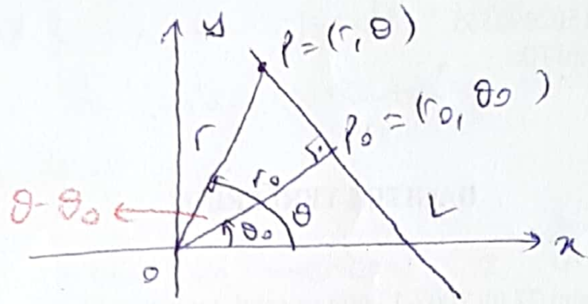
$$=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=-4\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}=8 \text{ br}$$

Doğruların Standart Kutupsal Denklemi:

$P_0 = (r_0, \theta_0)$ noktası orijinden L doğrusuna gelen dikmenin ayağı ve $r_0 \geq 0$ ise, L nin denklemi şu şekildedir.

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$$



$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{r_0}{r} \Rightarrow r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$$

Ör: $\theta_0 = \pi/3$ ve $r_0 = 2$ seçersek doğrunun denklemini bulunuz

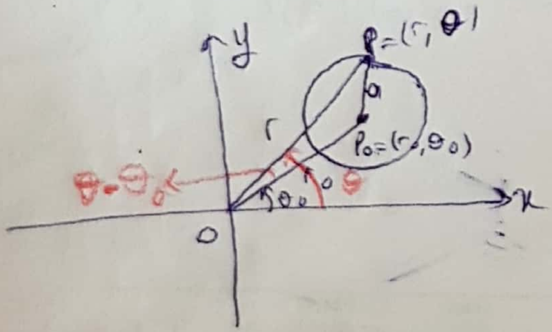
Çözüm: $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \Rightarrow r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} r\sin\theta = 2$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{3}y = 4$$

Çemberler

Merkezi $P_0 = (r_0, \theta_0)$ da olan a yarıçaplı çemberin kutupsal denklemini bulmak için $P = (r, \theta)$ yı çember üzerinde bir nokta olarak alıp ve OP_0P üçgeninde Kosinüs ~~teorem~~ kuralını uygularız ve aşağıdaki ifadeyi elde ederiz



$$a^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0)$$

Çember orijinden geçiyorsa $r_0 = a$ olur ve bu denklem sadeleşir.

$$\cancel{a^2} = \cancel{a^2} + r^{\cancel{2}} - 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$

$$\Rightarrow \cancel{r^2} = 2a\cancel{r}\cos(\theta - \theta_0) \Rightarrow r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$$

Çemberin merkezi pozitif x-ekseni üzerinde ise $\theta_0 = 0$ olur ve $r = 2a\cos\theta$ elde edilir.

Merkez, pozitif y-ekseninin üzerinde ise

$\theta_0 = \pi/2$, $\cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$ olur ve

$$r = 2a\cos(\theta - \underset{\pi/2}{\theta_0})$$

$$\Rightarrow r = 2a\sin\theta$$

Merkezleri negatif x ve y-eksenlerinde olan ve orijinden geçen çemberlerin denklemleri yukarıdaki eşitlikte r yerine −r yazarak elde edilebilir.

8) Orijinden geçen ve merkezi x veya y-ekseninde olan çemberlerin birkaç kutupsal denklemi aşağıda verilmektedir.

Yarıçap	Merkez (kutupsal koordinatlar)	kutupsal denklem
3	$(3, 0)$	$r = 6\cos\theta$
2	$(2, \pi/2)$	$r = 4\sin\theta$
$1/2$	$(-1/2, 0)$	$r = -\cos\theta$
1	$(-1, \pi/2)$	$r = -2\sin\theta$

8) $r = 1 - \cos\theta$ eğrisine $\theta = \pi/2$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulun.

Çözüm: $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = 1 - \cos(\pi/2) = 1$, $\dfrac{dr}{d\theta} = \sin\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\sin\theta\sin\theta + (1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta - (1-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{\sin 2\theta - \sin\theta}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta = \pi/2} = -1 \quad , \quad x(\pi/2) = r\cos\theta = 1.\cos(\pi/2) = 0$$

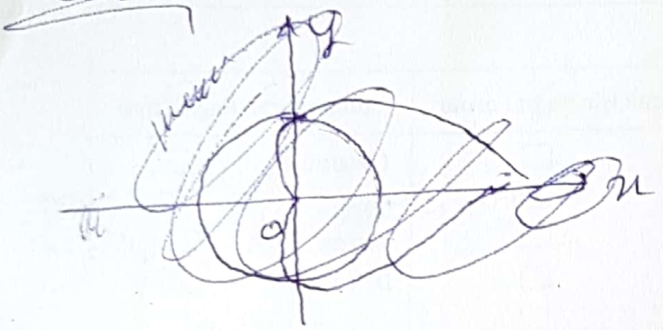
$$y(\pi/2) = r\sin\theta = 1.\sin(\pi/2) = 1$$

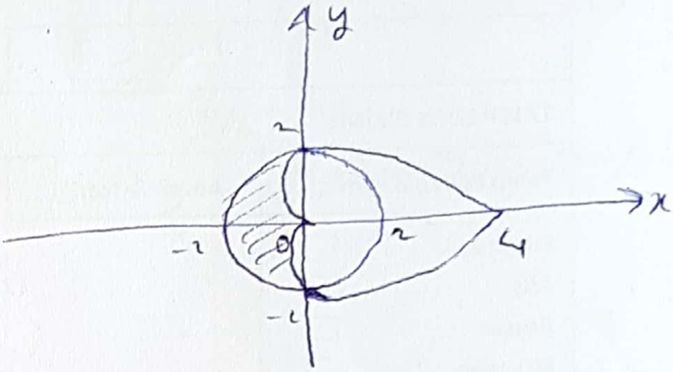
$$y - 1 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 1$$

CamScanner ile

8) $r=2$ kapalı eğrisi içinde $r=2(1+\cos\theta)$ kapalı eğrisi dışında kalan bölgenin alanını hesaplayınız (E4)

Çözüm





$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\left[2^2 - [2(1+\cos\theta)]^2\right]d\theta$$

$$\Rightarrow A = \int_{\pi/2}^{\pi}\left[4 - 4(1+\cos\theta)^2\right]d\theta$$

$$= 4\int_{\pi/2}^{\pi}\left[1-(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\right]d\theta$$

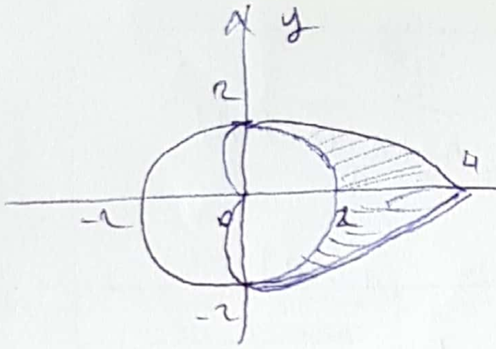
$$= 4\int_{\pi/2}^{\pi}\left[-2\cos\theta - \frac{1+\cos2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$= 4\left[-2\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin2\theta\right]\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= 4\left[\left(-2\sin\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin2\pi\right) - \left(-2\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi\right)\right]$$

$$= (8-\pi)\ br^2$$

9) $r=2$ kapalı eğrisinin dışında $r=2(1+\cos\theta)$ kapalı eğrisinin içinde kalan bölgenin alanını hesaplayınız



$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left\{\left[2(1+\cos\theta)\right]^2-2^2\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}4\left[(1+\cos\theta)^2-1\right]d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}(\cancel{1}+2\cos\theta+\cos^2\theta-\cancel{1})\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\left(2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=4\left(2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$=4\left[\left(2\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi\right)-\left(2\sin0+\frac{0}{2}+\frac{1}{4}\sin(2.0)\right)\right]$$

$$=\pi+8 \text{ br}^2$$

(07) Kabul edelim ki y, x in bir fonksiyonudur ve

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

dir. Bu denklemin kutupsal koordinatlardaki alacağı şekli belirleyiniz.

Çözüm:
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \Rightarrow dx=\cancel{\cos\theta\,dr+}\ dr\cos\theta-r\sin\theta\,d\theta \\ y=r\sin\theta \Rightarrow dy=dr\sin\theta+r\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta}}=\frac{r\cos\theta+r\sin\theta}{r\cos\theta-r\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \cancel{r\sin\theta\cos\theta\,dr-r\sin^2\theta\,dr+r^2\cos^2\theta\,d\theta-r^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta}$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta\,dr+r\cos^2\theta\,d\theta-\sin^2\theta\,dr-\cancel{r\sin\theta\cos\theta\,d\theta}=\cos^2\theta\,dr-\cancel{r\sin\theta\cos\theta\,d\theta}+\cancel{\sin\theta\cos\theta\,dr}-r\sin^2\theta\,d\theta$$

$$\rightarrow r\cos^2\theta\,d\theta+r\sin^2\theta\,d\theta=\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}dr$$

$$\rightarrow r\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}d\theta=dr \Rightarrow dr=r\,d\theta \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{d\theta}=r}$$

9) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $a \in \mathbb{R}$ eğrisinin grafiğini çiziniz. 56

Çözüm

1- Tanım kümesi $T.K = \mathbb{R}$ dir.

2- $f(T+\theta) = f(\theta)$

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$

$\Rightarrow r = \mp a\sqrt{\cos 2\theta} = f(\theta)$

$\Rightarrow \cancel{\mp a\sqrt{\cos 2\theta}}$

$\Rightarrow \mp a\sqrt{\cos[2(T+\theta)]} = \mp a\sqrt{\cos 2\theta}$

$\Rightarrow \cos[2(T+\theta)] = \cos 2\theta \Rightarrow 2T + 2\theta = 2\theta + 2\pi$

$\Rightarrow T = \pi$

3- $(r,\theta) \leftrightarrow (r,-\theta)$

$r = \mp a\sqrt{\cos 2\theta}$ $\quad r = \mp a\sqrt{\cos(2(-\theta))} = \mp a\sqrt{\cos 2\theta}$

old. x-eksenine göre simetrik

$(r,\theta) \leftrightarrow (r,\pi-\theta)$

$r = \mp a\sqrt{\cos 2\theta}$, $r = \mp a\sqrt{\cos 2(\pi-\theta)} = \mp a\sqrt{\cos 2\theta}$

old. y-eksenine göre simetrik

$(r,\theta) \leftrightarrow (r,\pi+\theta)$

$r = \mp a\sqrt{\cos 2\theta}$, $r = \mp a\sqrt{\cos 2(\pi+\theta)} = \mp a\sqrt{\cos 2\theta}$

old. orijine göre simetrik

4- $r' = f'(\theta) \Rightarrow r' = \mp \dfrac{2a \sin 2\theta}{2\underbrace{\sqrt{\cos 2\theta}}}$

x, y-eksenlerine göre simetrik olduğundan sadece I. bölgede bütün işlem yapıp daha sonra simetrik olan bölgeleri belirleyelim

$r = \mp a\sqrt{\cos 2\theta}$ old. $\cos 2\theta \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$r = a\sqrt{\cos 2\theta} \Rightarrow r' = -\dfrac{2a \sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}} \leq 0$, $a>0$ için

birinci bölge old.

5- x-eksenine göre de simetrik old.

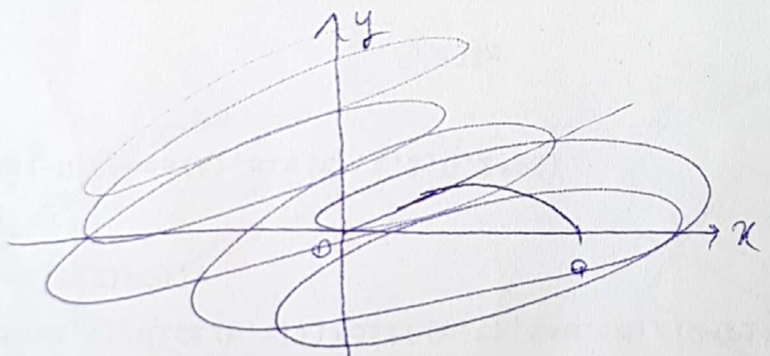
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ ~~...~~ inceleme yapmak yeterlidir.

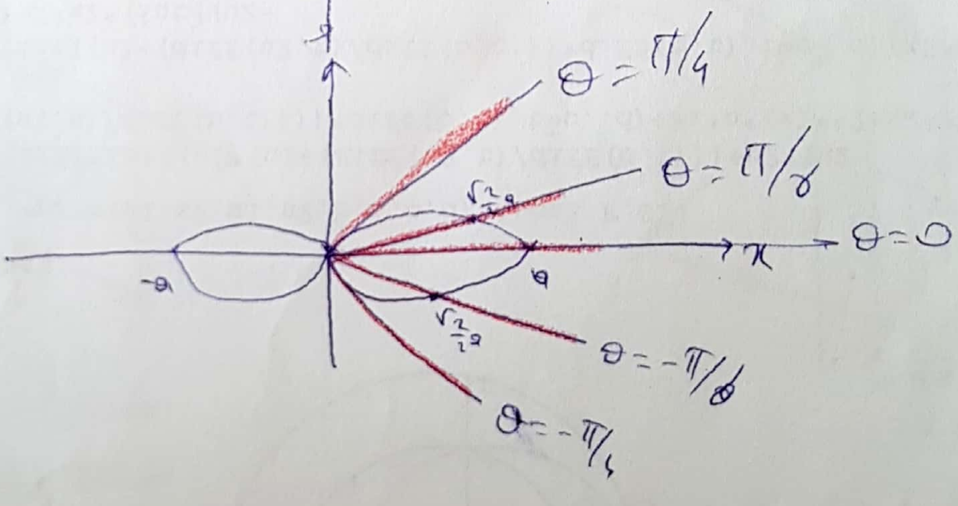
$f(0) = a, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} a, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

6-

θ	$-\infty$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	0	$+\infty$
r'		$-$	$-$			
r		$a \searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a \searrow$	0		

7-

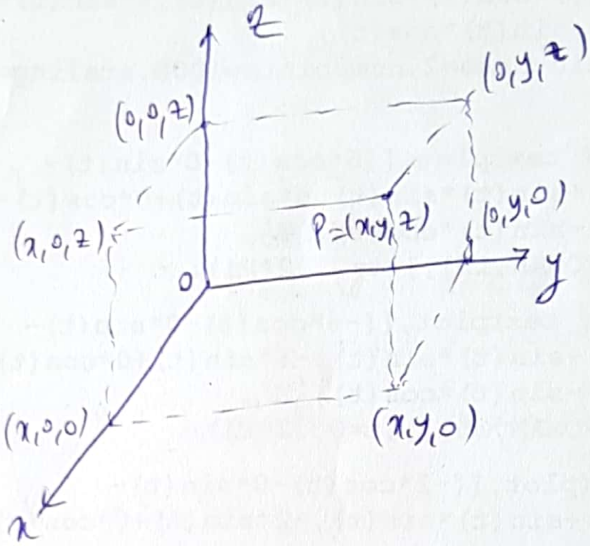


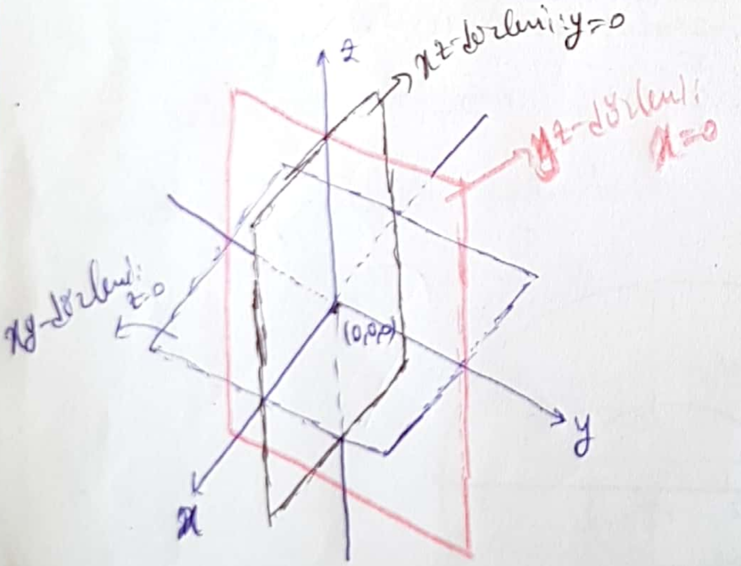


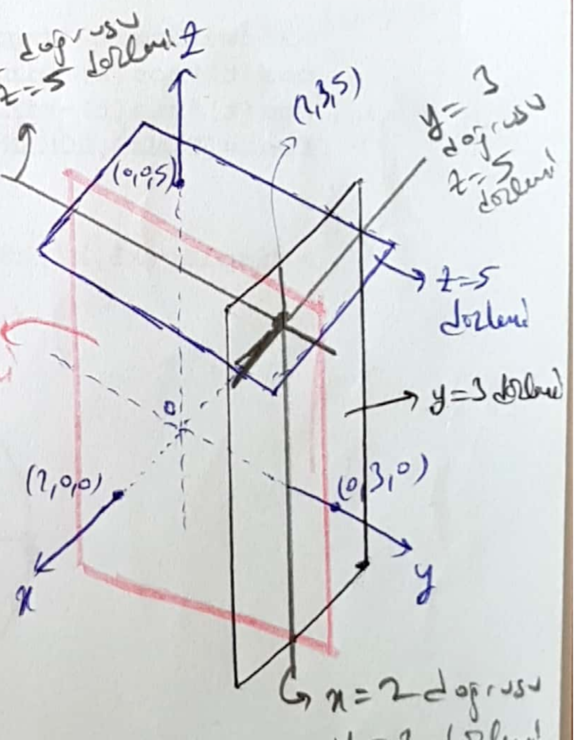
VI - Hafta

VEKTÖRLER VE UZAY GEOMETRİSİ

Üç Boyutlu Koordinat Sistemleri







$x=0, y=0, z=0$ düzlemleri uzayı sekiz adet sekizde birlik bölgeye ayırır.

$x=2, y=3, z=5$ düzlemleri $(2,3,5)$ noktasından geçen doğruyu belirler.

Ör a) $z \geq 0$, xy-düzleminin ~~üstünde~~ üstündeki noktaların üst yarı uzayı

b) $x=-3$, x-ekseninin $x=-3$ de dik kesen düzlem. Bu düzlem yz-eksenine paraleldir ve 3 birim arkada kalır.

c) $z=0$, $x \le 0, y \ge 0$, xy-düzlemi üzerinde 8 de 1 lik parça

d) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, 8 de 1 lik bölge

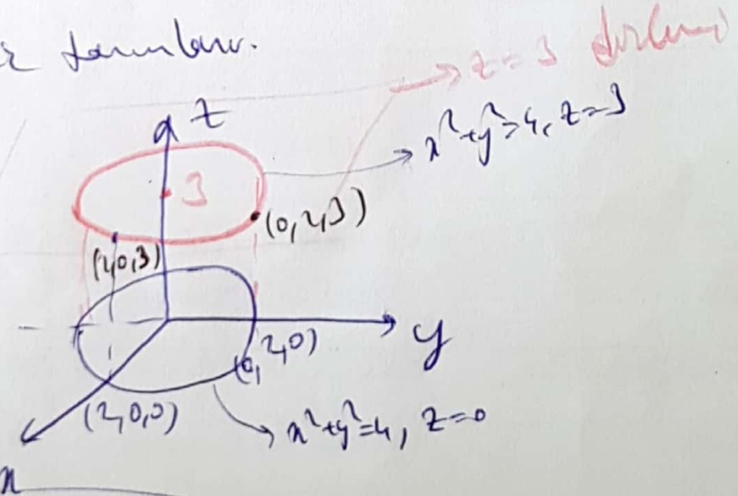
e) $-1 \le y \le 1$, $y=-1$ ve $y=1$ düzlemlerinin arasındaki dilim

f) $y=-2$, $z=2$, $y=-2$ ve $z=2$ düzlemlerinin kesiştiği doğru. Diğer bir ifadeyle x-eksenine paralel ve $(0,-2,2)$ noktasından geçen doğru.

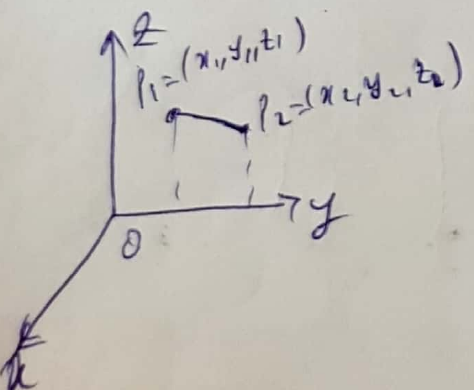
(8) Hangi $P=(x,y,z)$ noktaları aşağıdaki denklemleri sağlar?

$$x^2+y^2=4 \text{ ve } z=3$$

Çözüm: Noktalar $z=3$ yatay düzlem üzerinde bulunur. Bu düzlem üzerinde $x^2+y^2=4$ çemberini oluşturur. Bu noktalar kümesi $z=3$ düzleminde $x^2+y^2=4$ çemberi olarak tanımlanır.



Uzayda Uzaklık ve Küreler



$P_1=(x_1,y_1,z_1)$ ile $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

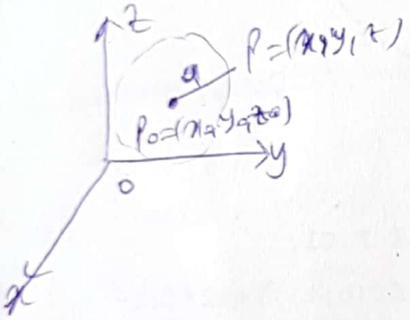
$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(Ö) $P_1=(2,1,5)$ ve $P_2=(-2,3,0)$ noktaları arasındaki uzaklık;

$$|P_1P_2|=\sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2+(0-5)^2}$$
$$=\sqrt{16+4+25}$$
$$=\sqrt{45}$$
$$\cong 6.708$$

Yarıçapı a olan ve Merkezi (x_0,y_0,z_0) olan küre denklemi: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$

$P=(x,y,z)$ ile $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ noktaları arasındaki uzaklık



(Ö) Aşağıdaki kürenin merkezini ve yarıçapını bulun

$$x^2+y^2+z^2+3x-4z+1=0$$

Çözüm

$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2+z^2-4z+\left(-\frac{4}{2}\right)^2=-1+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{4}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=-1+\frac{9}{4}+4=\frac{21}{4}=a^2$$

$$\rightarrow a=\frac{\sqrt{21}}{2},\quad P_0=\left(-\frac{3}{2},0,2\right)$$

(Ö) a) $x^2+y^2+z^2<4$, $x^2+y^2+z^2=4$ küresinin iç noktaları

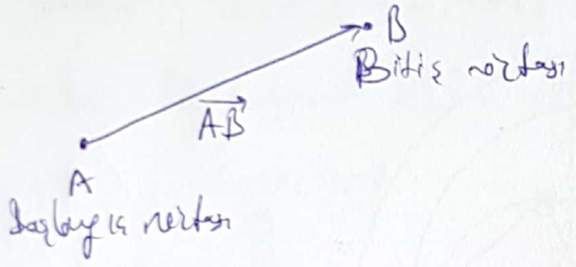
b) $x^2+y^2+z^2\leq 4$, iç dolu top olarak $x^2+y^2+z^2=4$ küresinin kendisi

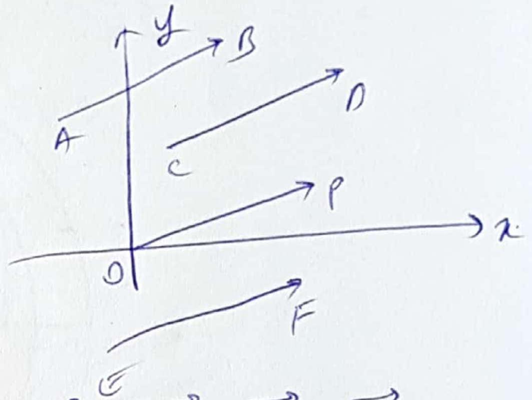
c) $x^2+y^2+z^2>4$, $x^2+y^2+z^2=4$ küresinin dış noktaları

d) $x^2+y^2+z^2=4$, $z\leq 0$, xy-düzlemi tarafından kesilen $x^2+y^2+z^2=4$ küresinin alt yarısı

Vektörler

Bir yönlü doğru parçasının ~~ve~~ paralellik bağıntısıyla belirlenmiş denklik sınıfına vektör denir.





$|\vec{AB}|$ vektörün uzunluğu

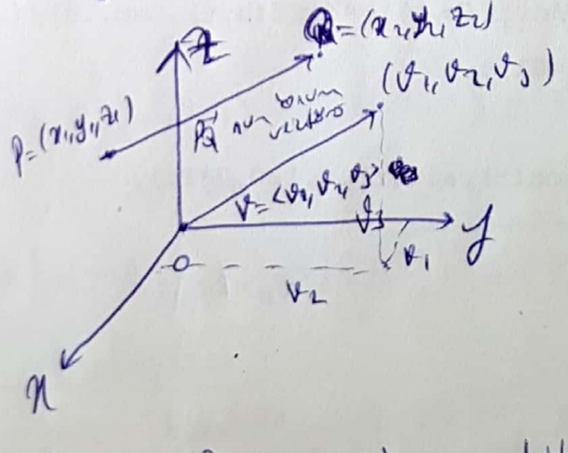
$\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{OP} = \vec{EF}$

~~Eğer v vektörü, başlangıç no~~

Eğer üç boyutlu bir $\vec{v}$ vektörü başlangıç noktası orijinde ve bitiş noktası (v_1, v_2, v_3) olan bir vektöre eşit ise $\vec{v}$ nin bileşen formu $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ şeklindedir.

$\vec{v} = \vec{PQ}$ vektöründen boyutları veya uzunluğu

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$



$\vec{v}$, $\vec{PQ}$ nun birim vektörüdür

Ör) Başlangıç noktası $P=(-3,4,1)$ ve bitiş noktası $Q=(-5,2,2)$ olan vektörün a) Bileşen formunu b) vektörün uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: a) $v_1 = x_2 - x_1 = -5-(-3) = -2$, $v_2 = y_2 - y_1 = 2-4 = -2$

$v_3 = z_2 - z_1 = 2-1 \Rightarrow v = \langle -2, -2, 1 \rangle$

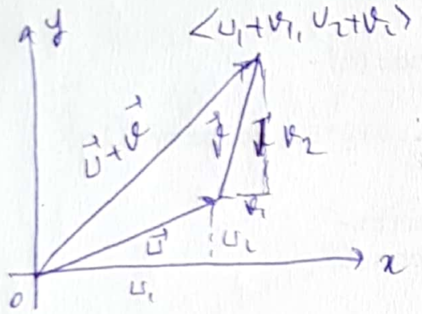
b) $\vec{v} = \vec{PQ}$ vektörünün uzunluğu $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$

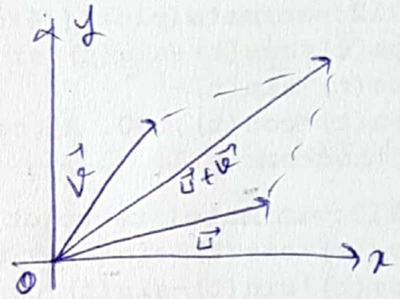
Vektörlerde cebirsel işlemler

$\vec{U}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$, ve $\vec{V}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ birer vektör ve k bir skaler olsun.

Toplama ve çıkarma: $\vec{U}\mp\vec{V}=\langle u_1\mp v_1,\ u_2\mp v_2,\ u_3\mp v_3\rangle$

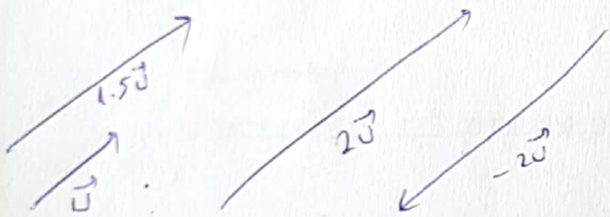
Skaler ile çarpım: $k\vec{U}=\langle ku_1, ku_2, ku_3\rangle$

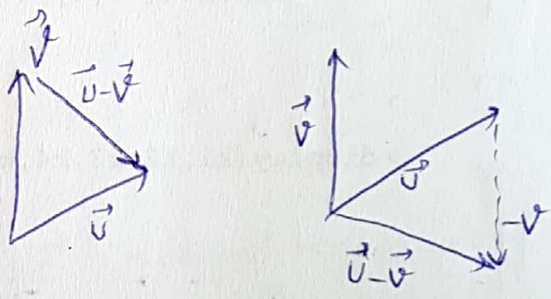




vektör toplamının geometrik formu

vektör toplamının paralelkenar kuralı





Ö $\vec{U}=\langle -1,3,1\rangle$ ve $\vec{V}=\langle 4,7,0\rangle$ için

a) $2\vec{U}+3\vec{V}=?$ b) $\vec{U}-\vec{V}=?$ c) $\left|\frac{1}{2}\vec{U}\right|=?$

Çözüm a) $2\vec{U}+3\vec{V}=2\langle -1,3,1\rangle+3\langle 4,7,0\rangle=\langle 10, 27, 2\rangle$

b) $\vec{U}-\vec{V}=\langle -1,3,1\rangle-\langle 4,7,0\rangle=\langle -5,-4,1\rangle$

c) $\left|\frac{1}{2}\vec{U}\right|=\left|\langle -\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{11}$

Vektör işlemlerinin özellikleri

$\vec{U}$, $\vec{V}$ ve $\vec{W}$ birer vektör, a ve b skaler olsun

1- $\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}$

2- $(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W}=\vec{U}+(\vec{V}+\vec{W})$

3- $\vec{U}+\vec{0}=\vec{U}$

4- $\vec{U}+(-\vec{U})=\vec{0}$

5- $0.\vec{U}=\vec{0}$

6- $1.\vec{U}=\vec{U}$

7- $a(b\vec{U})=(ab)\vec{U}$

8- $a(\vec{U}+\vec{V})=a\vec{U}+a\vec{V}$

9- $(a+b)\vec{U}=a\vec{U}+b\vec{U}$

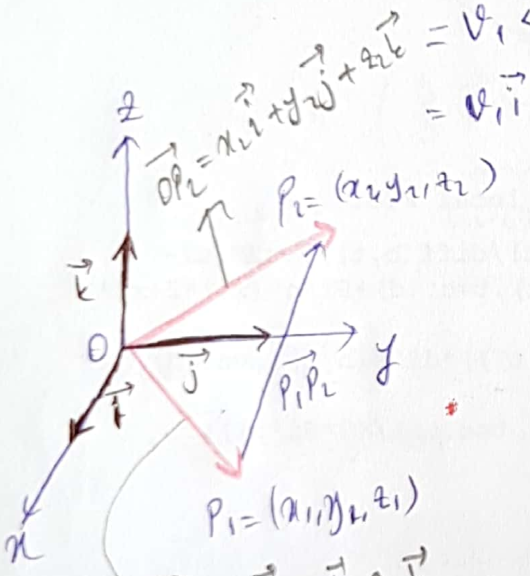
Birim Vektörler

Uzunluğu 1 olan $\vec v$ vektörüne birim vektördür. Standart birim vektörler şunlardır:

$\vec i = \langle 1,0,0\rangle$, $\vec j = \langle 0,1,0\rangle$, ve $\vec k = \langle 0,0,1\rangle$

$\vec v = \langle v_1,v_2,v_3\rangle$ vektörü standart birim vektörlerin bir lineer birleşimi olarak

$$\vec v = \langle v_1,v_2,v_3\rangle = \langle v_1,0,0\rangle + \langle 0,v_2,0\rangle + \langle 0,0,v_3\rangle$$
$$= v_1\langle 1,0,0\rangle + v_2\langle 0,1,0\rangle + v_3\langle 0,0,1\rangle$$
$$= v_1\vec i + v_2\vec j + v_3\vec k$$



$\vec{OP_1} = x_1\vec i + y_1\vec j + z_1\vec k$

v_1'e $\vec v$ vektörünün $\vec i$-bileşeni
v_2'ye " " $\vec j$- "
v_3'e " " $\vec k$- "

$\vec v \neq \vec 0$ olduğu sürece vektörün uzunluğu $|\vec v|$ sıfırdan farklıdır.

$$\left|\frac{1}{|\vec v|}\vec v\right| = \frac{1}{|\vec v|}\cdot|\vec v| = 1$$

$$\vec{P_1P_2} = (x_2-x_1)\vec i + (y_2-y_1)\vec j + (z_2-z_1)\vec k$$
$$= \vec{OP_2} - \vec{OP_1}$$

$\vec v/|\vec v|$, $\vec v$ yönündeki bir birim vektördür, buna sıfırdan farklı $\vec v$ vektörünün yönü denir.

Ör) $P_1 = (1,0,1)$ den $P_2 = (3,2,0)$ noktasına olan vektör yönünde $\vec u$ birim vektörünü bulunuz

Çözüm $\vec{P_1P_2} = (3-1)\vec i + (2-0)\vec j + (0-1)\vec k = 2\vec i + 2\vec j - \vec k$

$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$, $\vec u = \dfrac{\vec{P_1P_2}}{|\vec{P_1P_2}|} = \dfrac{2\vec i + 2\vec j - \vec k}{3}$

$$\Rightarrow \vec u = \frac{2}{3}\vec i + \frac{2}{3}\vec j - \frac{1}{3}\vec k$$

$\vec u$, $\vec{P_1P_2}$ yönündedir.

(03) Eğer $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ bir hız vektörü ise $\vec{v}$ yi sürat ile hareket ~~yön~~ yönündeki birim vektörün çarpımı olarak ifade ediniz.

Cevap: $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ile $\vec{v}$ aynı yöndedir.

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3\vec{i} - 4\vec{j}}{5} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j} = \underset{\substack{\text{uzunluk} \\ \text{(sürat)}}}{5} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}\right)}_{\text{hareketin yönü}}$$

Not: ~~Eğer~~ $\vec{v} \neq \vec{0}$ ise ~~Burada~~

1- $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $\vec{v}$ yönünde bir birim vektördür.

2- $\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ denklemi $\vec{v}$ yi uzunluk ve yönün çarpımı olarak ~~ifade eder~~

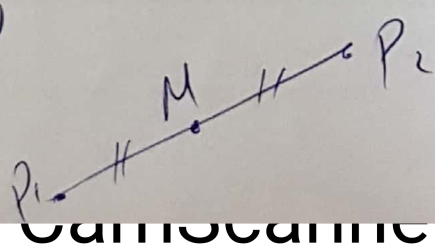
Bir Doğru Parçasının Orta Noktası

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktası M aşağıdaki gibidir.

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

(07) $P_1 = (3,-2,0)$ ve $P_2 = (7,4,4)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktası

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (5,1,2)$$



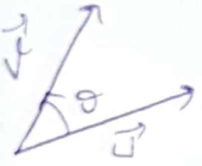
Nokta Çarpım

İki vektör arasındaki açı:

Sıfırdan farklı $\vec{u}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ ve $\vec{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ vektörleri arasındaki θ açısı aşağıdaki denklemle verilir.

$$\theta=\arccos\left(\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$$

$\arccos \leftrightarrow \cos^{-1}$



Tanım $\vec{u}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle\neq\vec{0}$ ve $\vec{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle\neq\vec{0}$ vektörlerin nokta çarpımı

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

Ör) a) $\langle 1,-2,-1\rangle\cdot\langle -6,2,-3\rangle = 1.(-6)-2.2+1.(-3)=-7$

b) $\left(\frac{1}{2}\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}\right)\cdot\left(4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)=\frac{1}{2}.4+3.(-1)+1.2=1$

Ör) $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ ile $\vec{v}=6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz

Çözüm: $\vec{u}\cdot\vec{v}=1.6+(-2).3+(-2).2=6-6-4=-4$

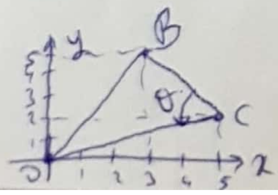
$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=3$

$|\vec{v}|=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=7$

$$\theta=\arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)=\arccos\left(\frac{-4}{3.7}\right)\cong 1.76 \text{ radyan}$$

Ör) $A=(0,0)$, $B=(3,5)$ ve $C=(5,2)$ köşelerinin belirlediği $\widehat{ABC}$ üçgenindeki θ açısını bulunuz

Çözüm: $\vec{CB}=\langle -2,3\rangle$, $\vec{CA}=\langle -5,-2\rangle$



$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (-5)(-2) + (-2) \cdot 3 = 4$

$|\vec{CA}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$, $|\vec{CB}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|}\right) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{29}}\right) \cong 1.36 \text{ radyan}$$

Dik (ortogonal) Vektörler

Eğer $\vec{u} \neq \vec{0}$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ vektörleri arasındaki açı $\pi/2$ ise ~~($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$)~~ tersine bu vektörler birbirine diktir.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{0}{\underset{\neq 0}{|\vec{u}|} \cdot \underset{\neq 0}{|\vec{v}|}} = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$

Tanım: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ör) Aşağıdaki vektörlerin diklik durumunu inceleyiniz.

a) $\vec{u} = \langle 3, 2 \rangle$ ve $\vec{v} = \langle 4, 6 \rangle$

b) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{v} = 2\vec{j} + 4\vec{k}$

c) $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$, $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

Çözüm: a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3.4 - 2.6 = 0$ old. $\vec{u} \perp \vec{v}$ dir.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3.0 - 2.2 + 1.4 = 0$ old. $\vec{u} \perp \vec{v}$ dir.

c) $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$, $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = 0$ old. $\vec{0}$ vektörü her $\vec{u}$ vektörüne diktir.

Nokta Çarpımın Özellikleri

$\vec{u}, \vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri ve c skaleri için aşağıdaki özellikleri sağlanır:

1- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2- $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (c\vec{v}) = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$

3- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

4- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

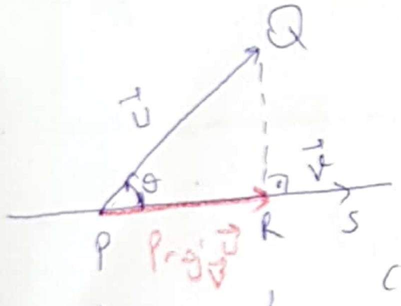
5- $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

Vektör izdüşümleri

$\vec{u}=\overrightarrow{PQ}$ vektöründen sıfırdan farklı $\vec{v}=\overrightarrow{PS}$ vektörüne izdüşümü Q dan PS doğru parçasına dik bir dikme inilmesiyle elde edilen $\overrightarrow{PR}$ vektörüdür. Bu vektörün notasyonu

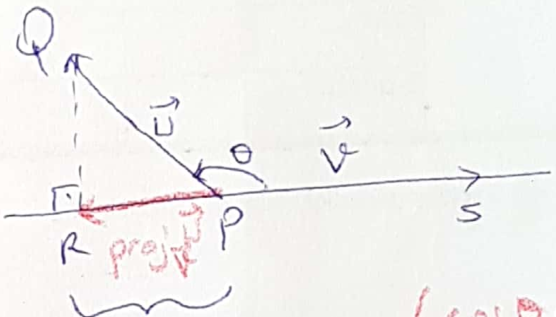
$proj_{\vec{v}}\vec{u}$ ($\vec{u}$ nun $\vec{v}$ ye izdüşümü)

şeklindedir. Eğer $\vec{u}$ bir kuvvet vektörünü gösteriyorsa, $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ notasyonu $\vec{v}$ yönündeki etkin kuvveti temsil eder.



$$\cos\theta = \frac{\overbrace{|proj_{\vec{v}}\vec{u}|}^{\text{uzunluk}}}{|\vec{u}|}$$

uzunluk $= |\vec{u}|\cos\theta$ ($\cos\theta > 0$ old.)



uzunluk $= -|\vec{u}|.\cos\theta$ ($\cos\theta < 0$ old)

Eğer $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ arasındaki θ açısı dar açı ise $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ nun uzunluğu $|\vec{u}|\cos\theta$ ve yönü $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ dir.

Eğer θ geniş açı ise $\cos\theta < 0$ old. $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ nun uzunluğu $-|\vec{u}|.\cos\theta$ ve yönü $-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ dir. Her iki durumda da izdüşüm şöyledir.

$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = (|\vec{u}|.\cos\theta)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \qquad |\vec{u}|\cos\theta = \frac{|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\theta}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$= \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}.\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$= \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right).\vec{v}$$

$|\vec{u}|.\cos\theta$ sayısına $\vec{u}$'nun $\vec{v}$ yönündeki skaler bileşeni (veya $\vec{u}, \vec{v}$ üzerinde) denir.

9) $\vec{u}=6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ vektörünün $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ vektörüne izdüşümünü ve $\vec{u}$ vektörünün $\vec{v}$ yönündeki skaler bileşenini bulunuz.

Çözüm:

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}.\vec{v}=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}.\vec{v}=\frac{6+3.(-2)+2.(-2)}{1+2^2+2^2}(\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k})$$

$$=-\frac{4}{9}\vec{i}+\frac{8}{9}\vec{j}+\frac{8}{9}\vec{k}$$

$|\vec{v}|^2=\vec{v}.\vec{v}$

$$|\vec{u}|\cos\theta=\vec{u}.\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=(6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}).\left(\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}\right)$$

$$=2-2-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}$$

Vektörel Çarpım

Uzayda iki vektörün vektörel çarpımı:

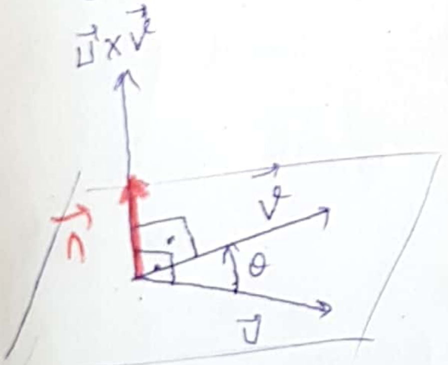
$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta)\,\vec{n}$

ile tanımlanır.

$\vec{u}\perp\vec{u}\times\vec{v}$

$\vec{v}\perp\vec{u}\times\vec{v}$

$\vec{n}$ bir birim vektör.



Tanım: Sıfırdan farklı $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri paraleldir.

$\Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$

Vektörel çarpımın özellikleri:

Eğer $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ birer vektör r ve s birer skaler ise aşağıdaki özellikleri sağlar.

1- $(r\vec{u})\times(s\vec{v})=(rs)(\vec{u}\times\vec{v})$

2- $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$

3- $\vec{v}\times\vec{u}=-(\vec{u}\times\vec{v})$

4- $(\vec{v}+\vec{w})\times\vec{u}=(\vec{v}\times\vec{u})+(\vec{w}\times\vec{u})$

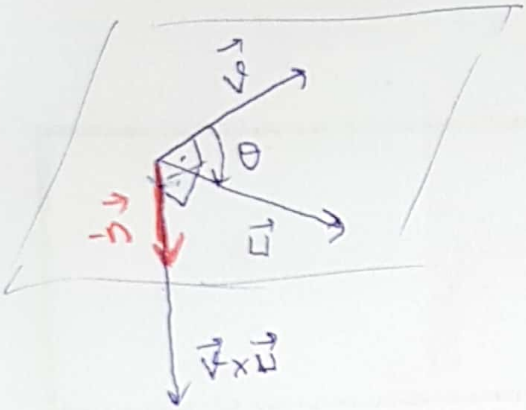
5- $\vec{0}\times\vec{u}=\vec{0}$

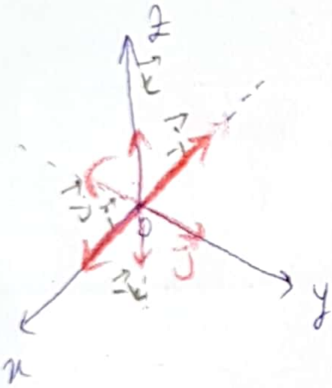
6- $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}.\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$

~~7- $\vec{u}\times\vec{0}=\vec{0}$~~

7- $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$

$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$





$\vec{i}\times\vec{j} = -(\vec{j}\times\vec{i}) = \vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k} = -(\vec{k}\times\vec{j}) = \vec{i}$

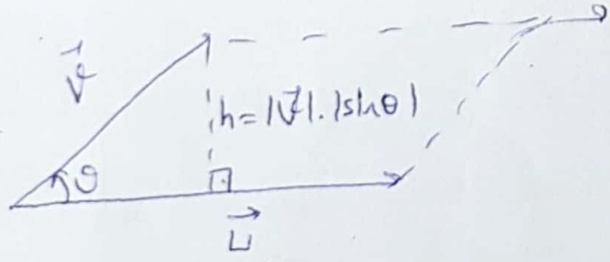
$\vec{k}\times\vec{i} = -(\vec{i}\times\vec{k}) = \vec{j}$

$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$

$\vec{u}\times\vec{v}$ bir paralelkenar alanıdır. $\vec{n}$ bir birim vektör old. $\vec{u}\times\vec{v}$ vektörünün büyüklüğü şu şekilde ifade edilir.

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.|\sin\theta|.|\vec{n}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$$

Bu ifade $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörü boyunca belirlenen paralelkenarın alanıdır. Burada $|\vec{u}|$ paralelkenarın tabanı ve $|\vec{v}||\sin\theta|$ yüksekliğidir.



Alan = taban. yükseklik
$= |\vec{u}|.|\vec{v}|.|\sin\theta|$
$= |\vec{u}\times\vec{v}|$

$\vec{u}\times\vec{v}$ için determinant formülü

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, ve $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

$\cancel{\vec{u}\times\vec{v} =}$

$$\vec{u}\times\vec{v} = (u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k})\times(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})$$

$$= (u_1v_1)(\vec{i}\times\vec{i})+(u_1v_2)(\vec{i}\times\vec{j})+(u_1v_3)(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+(u_2v_1)(\vec{j}\times\vec{i})+u_2v_2(\vec{j}\times\vec{j})+u_2v_3(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+(u_3v_1)(\vec{k}\times\vec{i})+u_3v_2(\vec{k}\times\vec{j})+u_3v_3(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$$

Buradan $\Rightarrow$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

elde edilir.

Ö) $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ve $\vec{v}=-4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ için $\vec{u}\times\vec{v}=?$
$\vec{v}\times\vec{u}=?$

Çözüm: $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i}-6\vec{j}+10\vec{k}$

$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i}+6\vec{j}-10\vec{k}$

Ö) $P=(1,-1,0)$, $Q=(2,1,-1)$ ve $R=(-1,1,2)$ noktalarının bulunduğu düzleme dik vektörü bulunuz.

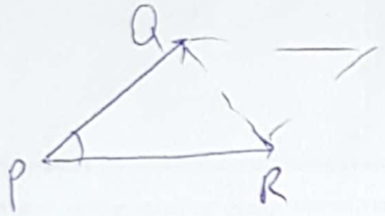
Çözüm: $\vec{PQ}\times\vec{PR}$ vektörü düzleme diktir.

$\vec{PQ}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{PR}=-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

$\vec{PQ}\times\vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i}+6\vec{k}$

Ö) Köşeleri $P=(1,-1,0)$, $Q=(2,1,-1)$ ve $R=(-1,1,2)$ noktaları olan üçgenin alanını bulunuz

Çözüm:



$$\frac{1}{2}|\vec{PQ}\times\vec{PR}| = \frac{1}{2}|6\vec{i}+6\vec{k}| = \frac{1}{2}6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Ö) $P=(1,-1,0)$, $Q=(2,1,-1)$ ve $R=(-1,1,2)$ noktalarının bulunduğu düzleme dik birim vektörü bulunuz

Çözüm: $\vec{PQ}\times\vec{PR}$ düzleme dik old. onun yönü $\vec{n}$ düzleme dik bir birim vektördür.

$$\vec{n} = \frac{\vec{PQ}\times\vec{PR}}{|\vec{PQ}\times\vec{PR}|} = \frac{6\vec{i}+6\vec{k}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

Üçlü Skaler (Karma) Çarpım:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Çarpımı $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ nün üzerine kurulmuş paralelyüzlünün hacmini verir.

Ö) ~~$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} =$~~ $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{k}$ ve $\vec{w}=7\vec{j}-4\vec{k}$ vektörlerinin belirlediği paralelyüzlünün hacmini bulunuz

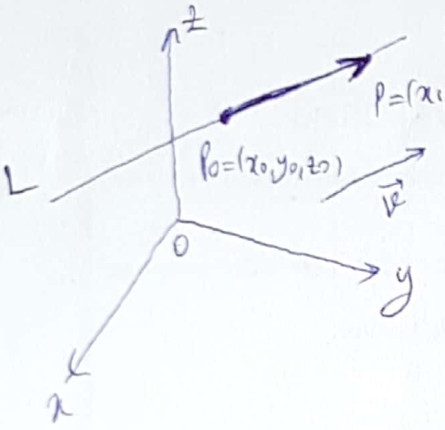
Çözüm:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -23$$

Hacim old $|-23| = 23\ br^3$

UZAYDA DOĞRULAR VE DÜZLEMLER

Uzayda Doğrular ve Doğru Parçaları



$$\overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{v}$$

$$(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k} = t(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})$$

$$\Rightarrow \underbrace{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}_{\vec{r}(t)} = \underbrace{x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}}_{\vec{r}_0}+t(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})$$

$P_0=(x_0,y_0,z_0)$ noktasından geçen $\vec{v}$ ye paralel olan L doğrusunun vektörel denklemi

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+t\vec{v}, \quad -\infty<t<\infty$$

şeklindedir. Burada $\vec{r}$, L üzerindeki bir $P=(x,y,z)$ noktasının konum vektörü ve $\vec{r}_0$ da $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ noktasının konum vektörüdür.

$$x=x_0+tv_1, \quad y=y_0+tv_2, \quad z=z_0+tv_3, \quad -\infty<t<\infty$$

Burada doğrunun parametrik denklemidir.

Ör) $(-2,0,4)$ noktasından geçen ve $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ vektörüne paralel doğrunun parametrik denklemini bulunuz.

Çözüm: $x=-2+2t, \quad y=4t, \quad z=4-2t, \quad t\in\mathbb{R}$

Ör) $P=(-3,2,-3)$, $Q=(1,-1,4)$ noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemini bulunuz.

Çözüm: $\overrightarrow{PQ} = (1-(-3))\vec{i}+(-1-2)\vec{j}+(4+3)\vec{k}$

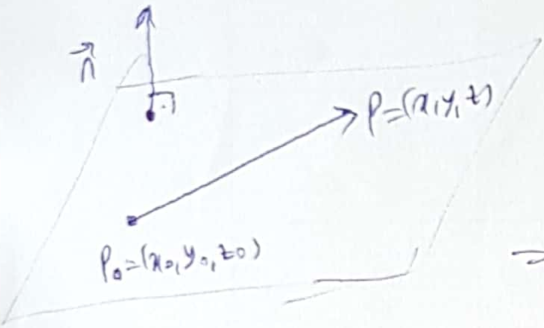
$$=4\vec{i}-3\vec{j}+7\vec{k}$$

$x=-3+4t, \quad y=2-3t \quad z=-3+7t, \quad t\in\mathbb{R}$

veya

$x=1+4t \quad y=-1-3t \quad z=4+7t, \quad t\in\mathbb{R}$

Uzaydaki Bir Düzlem İçin Denklem



$\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$

$\Rightarrow (A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) \cdot [(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}] = 0$

$\Rightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

$\Rightarrow Ax + By + Cz = D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

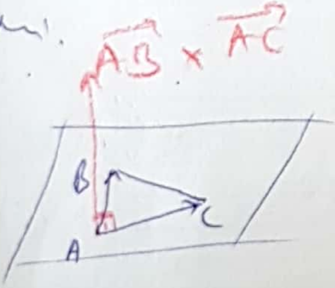
Ö1) $P_0 = (-3,0,7)$ noktasından geçen ve normali $\vec{n} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ olan düzlem için bir denklem bulunuz.

Çözüm: $5(x-(-3)) + 2(y-0) - 1(z-7) = 0$

$\Rightarrow 5x + 2y - z = -22$

Ö2) $A = (0,0,1)$, $B = (2,0,0)$, $C = (0,3,0)$ noktalarından geçen düzlem için bir denklem bulunuz.

Çözüm:

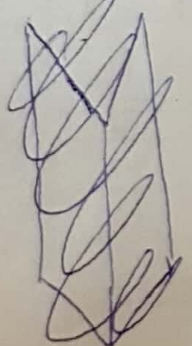


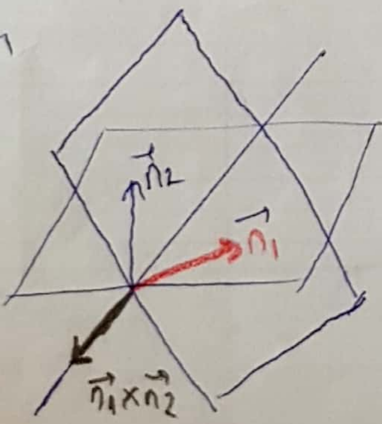
$\vec{AB} = \langle 2,0,-1 \rangle$, $\vec{AC} = \langle 0,3,-1 \rangle$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$3(x-0) + 2(y-0) + 6(z-1) = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 6z = 6$

Kesişen Doğrular





ÖR) $3x - 6y - 2z = 15$ ve $2x + y - 2z = 5$ düzlemlerinin kesişim doğrusuna paralel olan bir vektör bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 2\vec{j} + 15\vec{k}$$

Ö) $3x-6y-2z=15$ ve $2x+y-2z=5$ düzlemlerinin kesiştiği doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz. (74)

Çözüm: I. yol $\vec{v} = 14\vec{i} + 2\vec{j} + 15\vec{k}$

Her iki düzleme ait bir nokta bulmamız gerekiyor.

Keyfi olarak $z=0$ için $3x-6y=15$, $2x+y=5$ $\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

$(3,-1,0)$ noktası her iki düzleme de aittir.

$x=3+14t$, $y=-1+2t$, $z=15t$, $(t \in \mathbb{R})$

II. yol $z=t$ alırsak ortak çözümden $x=3+\frac{14}{15}t$, $y=-1+\frac{2}{15}t$ elde edilir.

Ö) Aşağıdaki $x=\frac{8}{3}+2t$, $y=-2t$, $z=1+t$ doğrusunun $3x+2y+6z=6$ düzlemi ile kesiştiği noktayı bulunuz.

Çözüm: Ortak çözelim. $3\left(\frac{8}{3}+2t\right)+2(-2t)+6(1+t)=6$

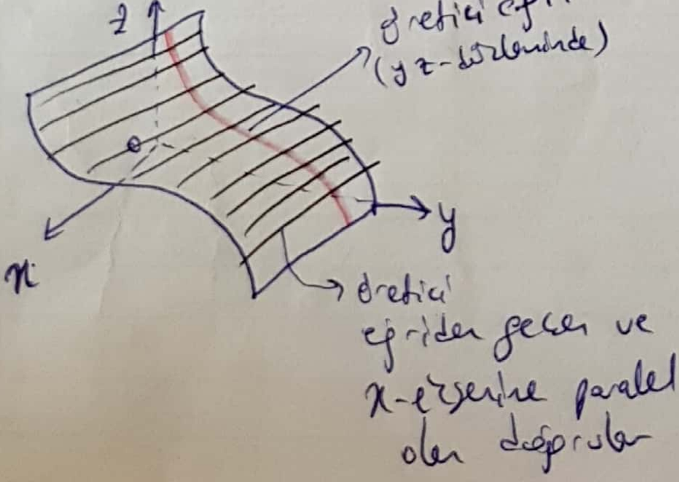
$\Rightarrow t=-1$

Kesişim noktası $(x,y,z)\big|_{t=-1} = \left(\frac{8}{3}+2.(-1), -2.(-1), 1+(-1)\right) = \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$

Silindirler ve İkinci Dereceden (Kuadratik) Yüzeyler

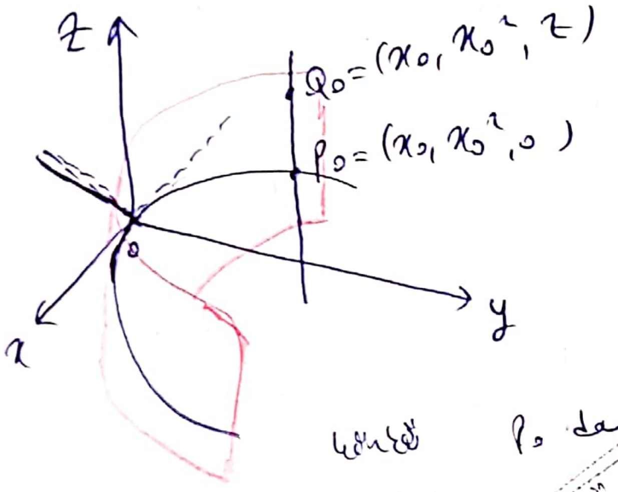
Silindirler: Bir silindir, verilen sbt bir doğruya paralel olan ve verilen bir düzlem eğrisi boyunca hareket eden doğrunun ürettiği bir yüzeydir. Bu eğriye silindirin üreteci eğrisi denir.

ÖR)



02) z-eksenine paralel olan ve $y=x^2$, $z=0$ paraboloünden geçen doğruların oluşturduğu silindirin denklemini bulunuz ve çiziniz.

Çözüm:



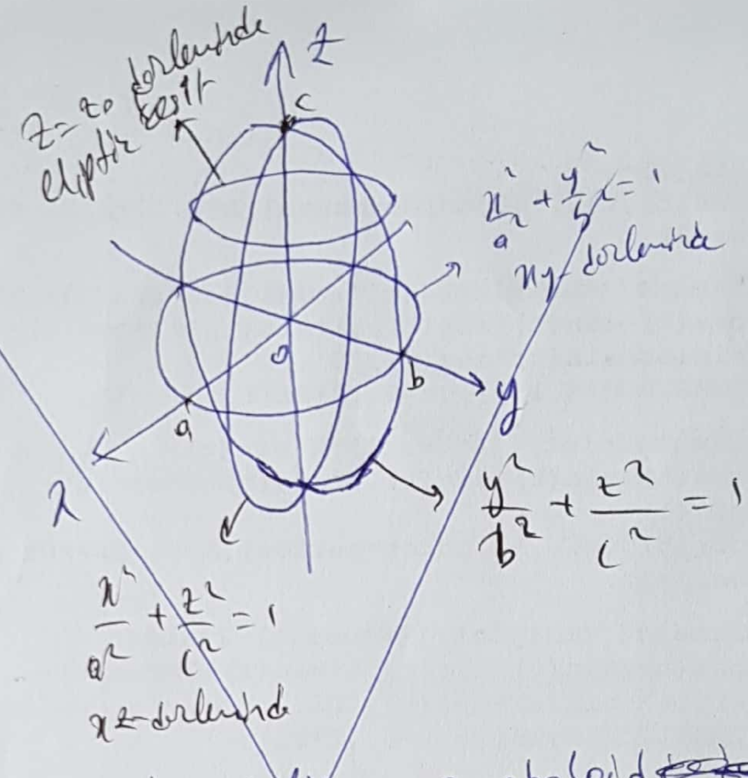
$P_0=(x_0, x_0^2, 0)$ noktasının xy-düzlemindeki $y=x^2$ parabolünde bulunduğunu varsayalım. Bu durumda z nin herhangi bir değeri için $Q_0=(x_0, x_0^2, z)$ noktası silindir üzerinde bulunacaktır. Çünkü P_0 dan geçen ve z-eksenine paralel olan $x=x_0$, $y=x_0^2$ doğrusu üzerindedir. Bunun tersine y-koordinatı x-koordinatının karesi olan herhangi $Q_0=(x_0, x_0^2, z)$ noktası silindirin üzerindedir, çünkü P_0 dan geçen ve z-eksenine paralel olan $x=x_0$, $y=x_0^2$ doğrusu üzerindedir. Dolayısıyla silindirin denklemi $y=x^2$ dir.

03) **İkinci dereceden yüzeyler:** Bir kuadratik yüzey, x, y, z cinsinden ikinci derece bir denklemin uzaydaki grafiğidir. A, B, C, D, E birer sbt olmak üzere

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dz=E$$

özel denkleme odaklanalım. Temel kuadratik yüzeyler elipsoidler, paraboloidler, eliptik koniler ve hiperboloidlerdir. Küreler elipsoidlerin özel durumlarıdır.

03) Aşağıdaki $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoidi $(\mp a,0,0)$, $(0,\mp b,0)$, $(0,0,\mp c)$ koordinat eksenlerini keser. Bu elips $|x|\leq a$, $|y|\leq b$, $|z|\leq c$ eşitsizliklerini sağlayan kutunun içinde yer alır. Eğriyi tanımlayan denklemde tüm terimler kare old. yüzey tüm koor. düzlemlerine göre simetriktir.



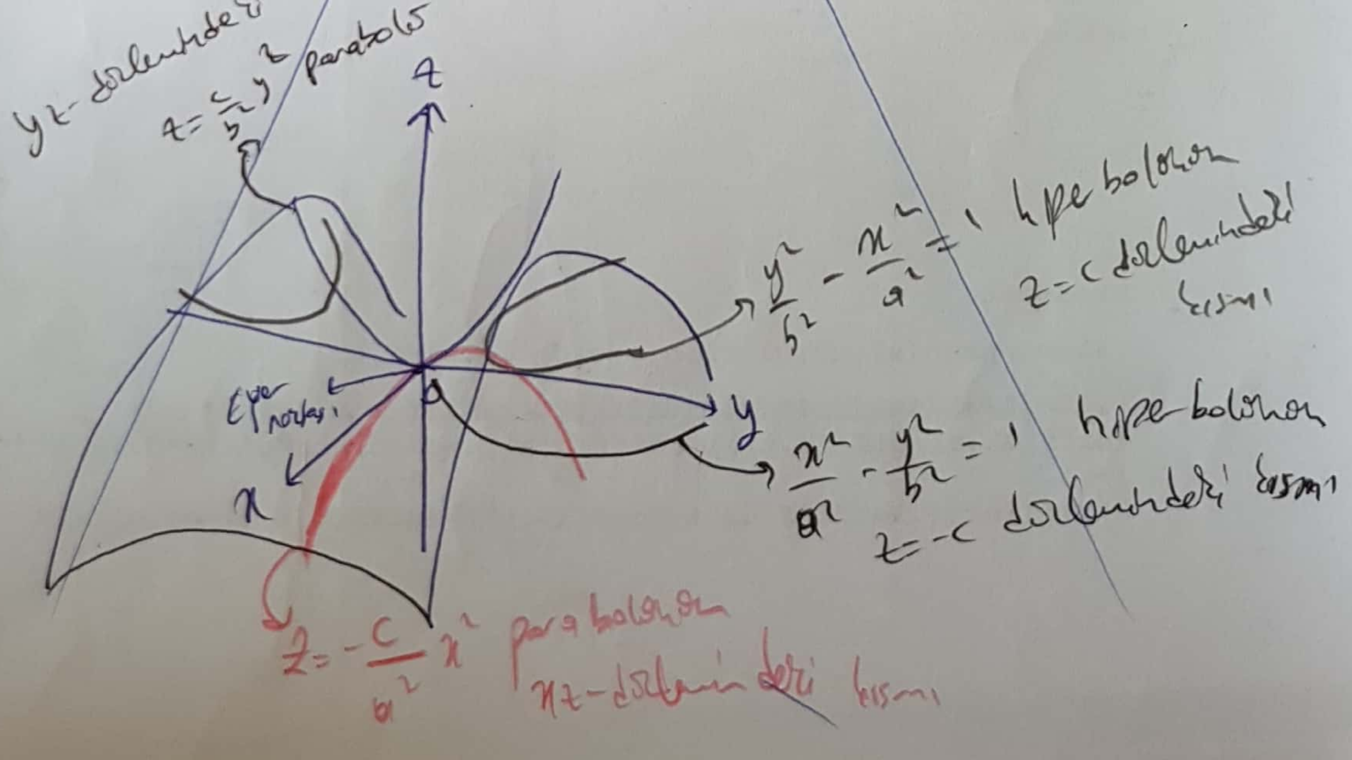
7) Aşağıdaki hiperbolik paraboloid

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}, \quad c>0$$

$x=0$ ve $y=0$ düzlemlerine göre simetriktir. Bu düzlemdeki kesitler şunlardır.

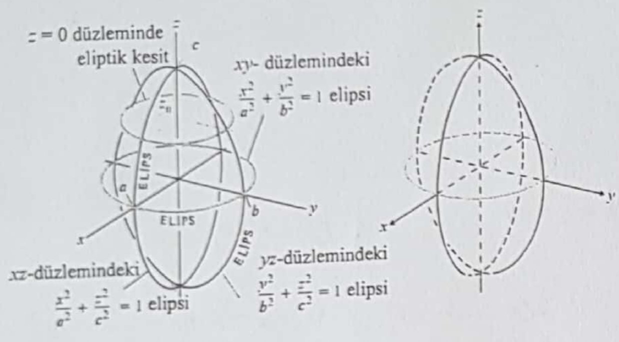
$x=0$ için $z=\frac{c}{b^2}y^2$

$y=0$ için $z=-\frac{c}{a^2}x^2$

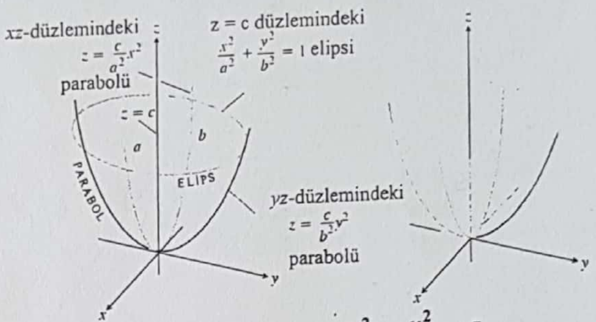


77

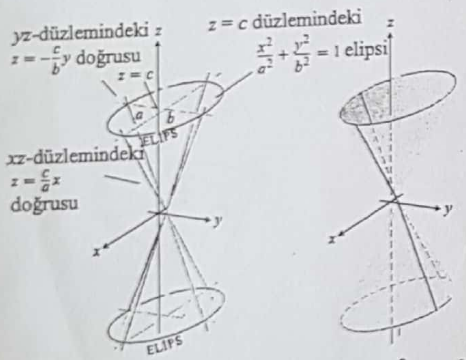
Kuadratik Yüzeylerin Grafiği



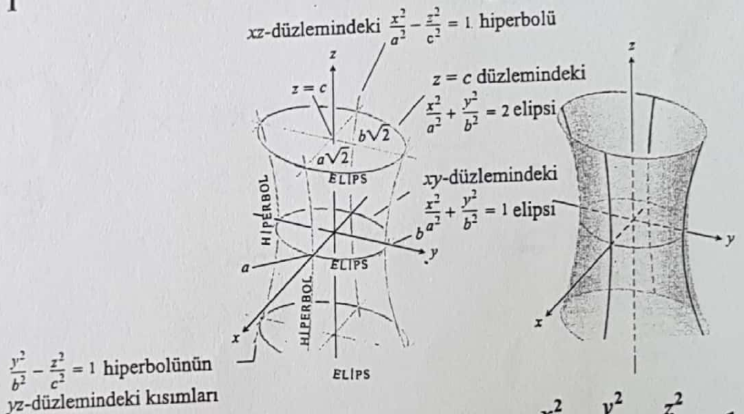
ELİPSOİD $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



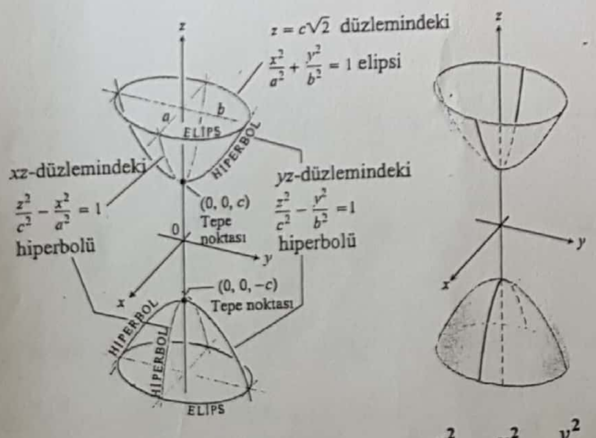
ELİPTİK PARABOLOİD $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$



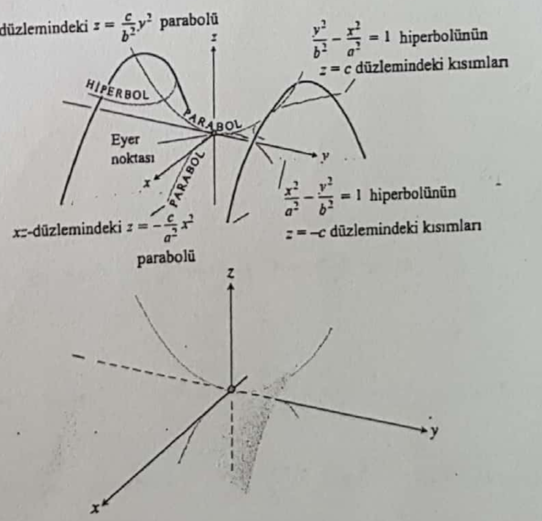
ELİPTİK KONİ $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$



KANATLI HİPERBOLOİD $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



İKİ KANATLI HİPERBOLOİD $\quad \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

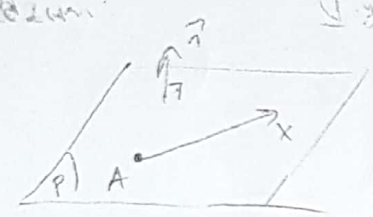


HİPERBOLİK PARABOLOİD $\quad \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{z}{c}, \quad c > 0$

ANALİTİK GEOMETRİ UYGULAMA 23.03.2010 → Salı

1) $A=(2,0,0)$ noktasından geçen ve $\vec{n}=(3,-5,11)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm: I. yol



$X=(x,y,z)$ olsun.

$\langle \vec{AX}, \vec{n} \rangle = 0 \Rightarrow \langle (x-2, y-0, z-0), (3,-5,11) \rangle = 0$

$\Rightarrow 3(x-2) - 5y + 11z = 0$

$\Rightarrow 3x - 5y + 11z - 6 = 0$

II. yol $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$ $\quad a n_1 + b n_2 + c n_3 + d = 0 \Rightarrow 3x - 5y + 11z + d = 0$

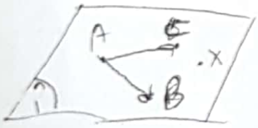
$(x,y,z)=(2,0,0)$ alınırsa

$\Rightarrow 3.2 - 5.0 + 11.0 + d = 0 \Rightarrow d = -6$

$3x - 5y + 11z - 6 = 0$ elde edilir.

2) $A=(0,1,2)$, $B=(0,0,3)$, $C=(1,1,0)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm: I. yol



$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \perp \vec{AB}$, $\perp \vec{AC}$

$X=(x,y,z)$

$\langle \vec{AB} \wedge \vec{AC}, \vec{AX} \rangle = 0$

$\Rightarrow \det(\vec{AX}, \vec{AB}, \vec{AC}) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2x + y + z - 3 = 0$

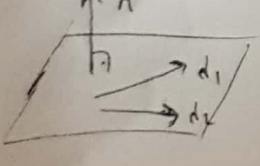
II. yol

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2,1,1)$$

$\langle \vec{AX}, \vec{n} \rangle = 0 \Rightarrow \langle (x, y-1, z-2), (2,1,1) \rangle = 0 \Rightarrow 2x + y + z - 3 = 0$

3) $\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y+4}{10} = \dfrac{z-12}{4}$ doğrusuna ve $\vec{d}_1=(0,3,2)$ vektörüne paralel olan ve $A=(-1,0,8)$ noktasından geçen düzlem denklemini yazınız.

Çözüm: $\vec{d}_1=(0,3,2)$, $\vec{d}_2=(1,10,4)$



$\langle \vec{AX}, \vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \det(\vec{AX}, \vec{d}_1, \vec{d}_2) = 0$

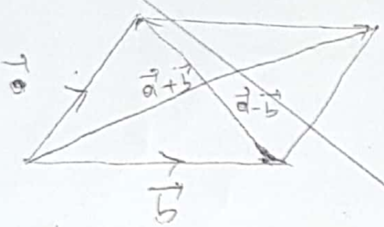
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y & z-8 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -8x + 2y - 3z + 16 = 0$

79

4) Köşegenleri $\vec{c}=(3,1,-2)$, $\vec{d}=(1,-3,4)$ olan paralelkenarın alanını bulunuz.

Çözüm:



$(3,1,-2)=\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{b}=(-1,-2,3)$

$(1,-3,4)=\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$

$+$

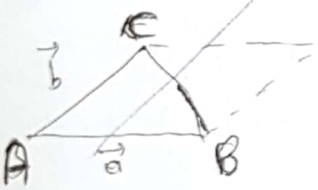
$\vec{a}=(2,-1,1)$

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=(-1,-7,-5) \Rightarrow Alan=\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2+(-5)^2}$$

$$=5\sqrt{3}$$

) $\vec{A}=(\frac{1}{2},2,4)$ $\quad$ $\vec{B}=(\frac{3}{2},1,4)$, $\vec{C}=(\frac{1}{2},1,2)$ noktaları için $A\hat{B}C$ üçgeninin alanını bulunuz

Çözüm:



$\vec{AB}=\vec{a}=(\frac{3}{2}-\frac{1}{2},1-2,4-4)=(1,-1,0)$

$\vec{AC}=\vec{b}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2},1-2,2-4)=(0,-1,-2)$

$Alan=\frac{1}{2}\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3/2$

2) $d_1 \ldots \frac{x}{2}=y-1=\frac{z-2}{3}$ $\qquad$ $d_2 \ldots \frac{x-1}{5}=y=z-3$ doğrularına paralel olan $(1,1,3)$ noktasından geçen düzlem denklemini elde ediniz.

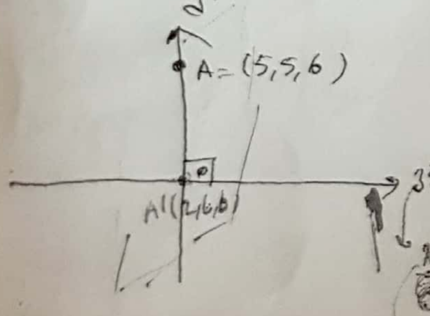
Çözüm: $\vec{d_1}=(2,1,3)$, $\quad$ $\vec{d_2}=(5,1,1)$

$X=(x,y,z)$ olsun.

$$\det(\vec{AX},\vec{d_1},\vec{d_2})=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2x+13y-3z=2$$

3) $A=(5,5,6)$ noktasından geçen $3x=y=z$ doğrusunu dik olarak kesen doğrunun denklemini bulunuz

Çözüm:



$\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{3}=\lambda$

doğrultman vek. $(1,3,3)$

A nok. geçen ve d doğrusuna dik olan düzlem denklemi:

$<(x-5,y-5,z-6),(1,3,3)>=0$

$\Rightarrow x-5+3y-15+3z-18=0$

$\rightarrow x+3y+3z-38=0$

d doğrusunun düzlemi dediği nok. bulalım $\quad x+9x+9x=38 \Rightarrow A'=(x,y,z)=(2,6,6)$

A ve A' den geçen doğrunun denk. $\quad \frac{x-5}{5-2}=\frac{y-5}{5-6}=\frac{z-6}{6-6}=\mu$

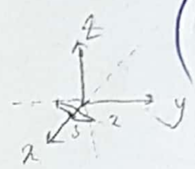
ANALİTİK GEOMETRİ UYGULAMA 30.03.2010 → Salı

80

1) Koordinat eksenlerinin $(3,0,0)$, $(0,-4,0)$ ve $(0,0,-2)$ noktalarından kesen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{-2} = 1 \Rightarrow 4x - 3y - 6z - 12 = 0$

(4) (3) (6)



2) önemli hafta

$x+y-z+1=0$ ve $2x-y+4z+3=0$ denklemleriyle verilen düzlemlerin arakesit doğrusunun denklemini bulunuz

Çözüm:

I. yol $z=0$ alınırsa $\begin{array}{l} x+y=-1 \\ 2x-y=-3 \end{array}$ $x=-\frac{4}{3}$, $y=\frac{1}{3}$ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

$y=0$ alınırsa $\begin{array}{l} x-z=-1 \\ 2x+4z=-3 \end{array}$ $x=-7/6$, $z=-1/6$ $\left(-\frac{7}{6}, 0, -\frac{1}{6}\right)$

Bu iki noktadan geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x+\frac{4}{3}}{-\frac{4}{3}+\frac{7}{6}} = \frac{y-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-0} = \frac{z-0}{0+\frac{1}{6}} \Rightarrow \frac{x+\frac{4}{3}}{-\frac{1}{6}} = \frac{y-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{1/6} = \lambda$$

II. yol $z=\lambda$ için $\begin{array}{l} x+y=\lambda-1 \\ 2x-y=-4\lambda-3 \end{array}$ $x=-\lambda-\frac{4}{3}$, $y=2\lambda+\frac{1}{3}$

$$\frac{x+\frac{4}{3}}{-1} = \frac{y-\frac{1}{3}}{2} = \frac{z-0}{1} (=\lambda)$$

3) $5x-7y+2z-3=0$ düzleminin yoz düzlemi ile arakesiti olan doğru denklemini bulunuz

Çözüm $\left.\begin{array}{l} 5x-7y+2z-3=0 \\ x=0 \end{array}\right] \Rightarrow -7y+2z-3=0$, $z=\lambda$ alınırsa

$\Rightarrow -7y=3-2\lambda \Rightarrow y=-\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\lambda$, $x=0$

$$\Rightarrow x=0, \quad \frac{y+\frac{3}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{z}{1} = \lambda$$

Ox-ekseni ve $P=(3,2,-5)$ noktasından geçen E düzlemi ile $3x-y-7z-5=0$ düzleminin arakesiti olan doğruyu bulunuz

Çözüm: $x=0$, $D=0$, $Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow By+Cz=0$, $2B-5C=0 \Rightarrow \frac{B}{C}=\frac{5}{2}$

$By+Cz=0 \Rightarrow \frac{B}{C}y+z=0 \Rightarrow \frac{5}{2}y+z=0 \Rightarrow 5y+2z=0$

$$\begin{cases} 5y+2z=0 \\ 3x-y-7z-5=0 \end{cases} \quad x=\lambda \text{ alınırsa } \begin{cases} 5y+2z=0 \\ -y-7z=5-3\lambda \end{cases} \Rightarrow y=\frac{-10+6\lambda}{-33}, \quad z=\frac{25-15\lambda}{-33}$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y+\frac{10}{33}}{-\frac{6}{33}}=\frac{z+\frac{25}{33}}{\frac{15}{33}}=\lambda$$

81

S) $x+2y-4z+10=0$ düzlemi ile $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{-2}$, $z-5=0$ doğrusunun ortak noktasını bulunuz.

Çözüm: Düzlemin $\vec{n}=(1,2,-4)$ Doğrunun $\vec{u}=(3,-2,0)$

$\langle \vec{n},\vec{u}\rangle=-1\neq 0$ olduğundan doğru düzlemi bir noktada keser.

O halde $x=-3+3\lambda$, $y=4-2\lambda$, $z=5+0.\lambda$ değerleri düzlem denkleminde yerine yazılırsa

$x+2y-4z+10=0 \Rightarrow -3+3\lambda+2(4-2\lambda)-4(5+0.\lambda)+10=0 \Rightarrow \lambda=-5$

$x=-3+3.(-5)=-18$

$y=4-2\lambda=4-2.(-5)=14$

$z=5$

$\Rightarrow (x,y,z)=(-18,14,5)$

S) $3y+z+21=0$ düzlemi ile $\frac{x+1}{15}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-6}$ doğrusunun ortak noktasını bulunuz

Çözüm: $\vec{n}=(0,3,1)$, $\vec{u}=(15,2,-6)$

$\langle \vec{n},\vec{u}\rangle=0$ dır. O zaman doğru düzleme paralel veya doğru düzlem üzerindedir.

$A=(-1,0,0)$ noktası için $0.(-1)+3.0+0+21=0 \Rightarrow 21\neq 0$ dır. Yani A düzleme ait bir nokta değil, O halde doğru düzleme paraleldir.

S) $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{-20}$ doğrusu ile $10x-20y+4z-70=0$ düzleminin ortak noktasını bulunuz.

Çözüm: $\vec{n}=(10,-20,4)$, $\vec{u}=(2,-3,-20)$

$\langle \vec{n},\vec{u}\rangle=0$ dır. $A=(5,-1,0)$ $\quad 10.5-20.(-1)+4.0-70=0 \Rightarrow 0=0$ dır.

Yani A, düzleme ait bir noktadır. O halde doğru düzlem üzerindedir.

~~**S)** $A=(-1,2,3)$ noktasının $2x-2y+z=12$ düzlemine uzaklığını bulunuz~~

~~Çözüm: $l=\frac{|2.(-1)-2.2+3-12|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=5$~~

ANALİTİK GEOMETRİ UYGULAMA 13.04.2010 → Salı

82

1) $5x_1-2x_2+6x_3-5=0$, $x_1-3x_2+7x_3-5=0$ düzlemleri veriliyor

i- Bu iki düzleme dik dan ve (1,1,1) noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz ✓

ii- Verilen düzlemlerle i-) şıkkındaki bulunan üçüncü düzlemin ortak noktasının koordinatlarını bulunuz ✓

~~iii- ilk iki düzlem arasındaki açıyı bulunuz~~

~~iv- ilk iki düzlemin kesişimi olan doğruyu belirtiniz~~ ✓

Çözüm: i-

$\vec{n}_1=(5,-2,6)$, $\vec{n}_2=(1,-3,7)$, $\vec{n}_3=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(4,-29,-13)$

$A=(1,1,1)$, $\langle\vec{AX},\vec{n}_3\rangle=0 \Rightarrow 4x_1-29x_2-13x_3+38=0$

ii-
$$\begin{aligned}5x_1-2x_2+6x_3&=9\\ x_1-3x_2+7x_3&=5\\ 4x_1-29x_2-13x_3&=-38\end{aligned} \Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}5&-2&6\\1&-3&7\\4&-29&-13\end{vmatrix}=1210-82-102=1026\neq0$$

Bu üç düzlem tek bir noktada kesişir. O da (1,1,1) dir.

~~iii-~~ $\cancel{\cos\theta=\dfrac{\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{5.1+2.3+6.7}{\sqrt{5^2+2^2+6^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+7^2}}}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{53}{\sqrt{3855}}\Rightarrow\theta=\arccos\left(\dfrac{53}{\sqrt{3855}}\right)$

iv- $\cancel{5x_1-2x_2+6x_3=9}$ $\delta_2=\begin{vmatrix}5&-2\\1&-3\end{vmatrix}=-13\neq0$ old. ~~[illegible]~~ rank A=2 dir.

$\cancel{x_1-3x_2+7x_3=5}$

~~iki düzlem bir doğru boyunca kesişirler.~~

$x_3=\lambda$ diyelim

$$\begin{aligned}5x_1-2x_2&=9-6\lambda\\ x_1-3x_2&=5-7\lambda\end{aligned} \Rightarrow x_1=\frac{-4}{13}\lambda+\frac{17}{13},\ x_2=\frac{29}{13}\lambda-\frac{16}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1-17/13}{-4/13}=\frac{x_2+16/13}{29/13}=\frac{x_3}{1}=\lambda$$

2)
$$\begin{aligned}x+2y+3z&=3\\ -x+y-z&=4\\ x-y+z&=5\end{aligned}$$
düzlemlerinin birbirlerine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=0 \qquad \delta_2=\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=3\neq0 \text{ old. rank } A=2$$

VIII. Hafta

VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR VE UZAYDA HAREKET

Uzaydaki bir cisim bir I zaman aralığında hareket ederken cismin koordinatlarını I aralığında tanımlanan bir fonk. olarak düşüneceğiz:

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad z=h(t),\quad t\in\mathbb{R}$$

$(x,y,z)=(f(t),g(t),h(t))$ noktalarının uzayda meydana getirdiği eğriye parçacığın yolu denir. Yukarıdaki denklemler ve aralık eğriyi parametrize eder.

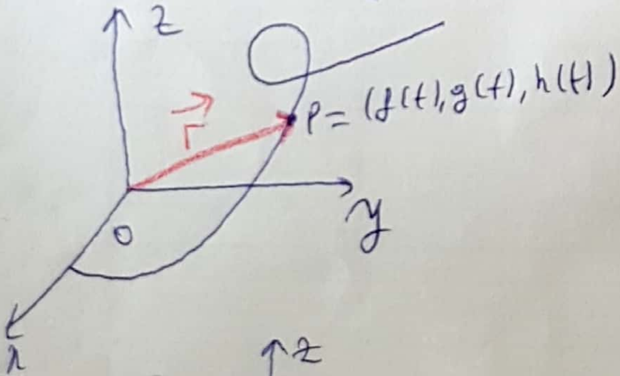
Uzaydaki bir eğri vektör formunda da gösterilebilir.

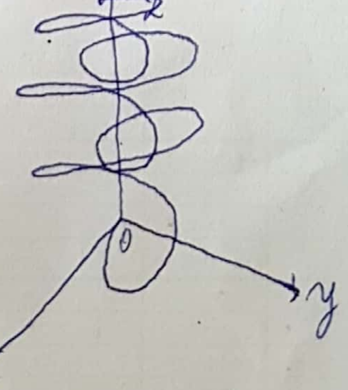
t zamanında orijinden parçacığın $P=(f(t),g(t),h(t))$ konumuna kadar

$$\vec{r}(t)=\overrightarrow{OP}=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$$

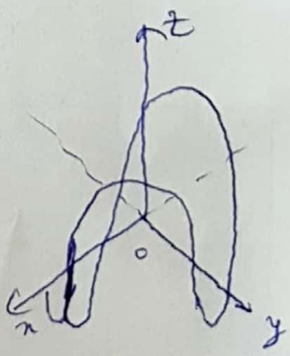
vektörü parçacığın konum vektörüdür. f, g ve h fonksiyonlarına konum vektörünün bileşen fonksiyonları (bileşenleri) denir.

Parçacığın yolunu I zaman aralığında $\vec{r}$ ile tarif edilen eğri olarak düşüneceğiz.



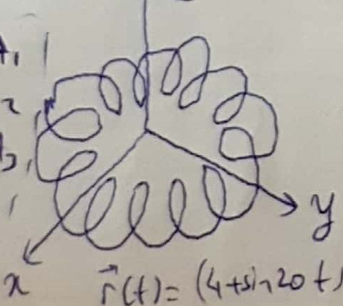


$\vec{r}(t)=(\sin 3t)(\cos t)\vec{i}+(\sin 3t)(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$



$\vec{r}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+(\sin 2t)\vec{k}$

$f(t)$ tanım kümesi A_1
$g(t)$ " " A_2
$h(t)$ " " A_3
$\vec{r}(t)$ nin
$A=A_1\cap A_2\cap A_3$



$\vec{r}(t)=(4+\sin 20t)(\cos t)\vec{i}+(4+\sin 20t)(\sin t)\vec{j}+(\cos 20t)\vec{k}$

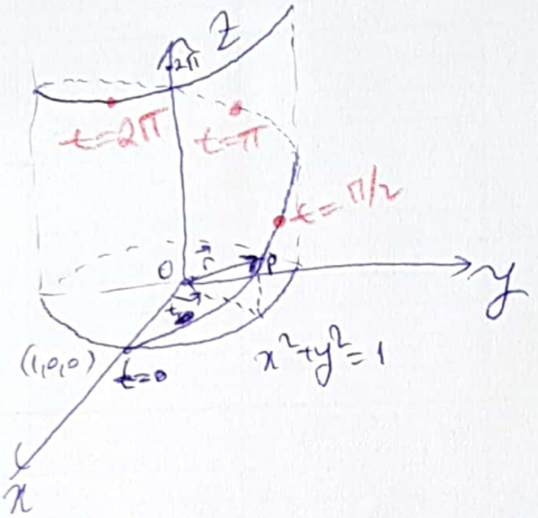
83 Aşağıdaki vektör-fonk. grafiğini çiziniz

$$\vec{r}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$$

Cevap: $\vec{r}$ tarafından çizilen eğri $x^2+y^2=1$ dairesel silindiri etrafında döner.

$$x^2+y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Bu eğriye helis denir.



Limit ve Süreklilik

$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, D bölgesinde tanımlı ~~[illegible]~~ vektör-değerli bir fonk. ve $\vec{L}$ bir vektör ols. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için tüm $t \in D$ değerlerinde $|\vec{r}(t) - \vec{L}| < \varepsilon$, $(0 < |t-t_0| < \delta$ olduğunda$)$ olacak bir $\delta > 0$ sayısı varsa t değeri t_0 a yaklaşırken $\vec{r}$, $\vec{L}$ limitine sahiptir denir ve $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{L}$ ile gösterilir.

~~$\vec{L} = L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k}$~~ ~~ise~~ $\lim_{t\to t_0} f(t) = L_1$, $\lim_{t\to t_0} g(t) = L_2$, $\lim_{t\to t_0} h(t) = L_3$

$$\Rightarrow \lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right)\vec{j} + \left(\lim_{t\to t_0} h(t)\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad L = L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k}$$

89

$$\vec{r}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to \pi/4} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to\pi/4} \cos t\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to\pi/4} \sin t\right)\vec{j} + \left(\lim_{t\to\pi/4} t\right)\vec{k}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\pi}{4}\vec{k}$$

Tanım: Eğer $\lim_{t\to t_0} \vec r(t) = \vec r(t_0)$ ise $\vec r(t)$ vektör değerli fonksiyonu tanım bölgesindeki bir $t=t_0$ noktasında süreklidir denir. Eğer bir vektör değerli fonk. tüm tanım kümesindeki her noktada sürekli ise bu fonk. süreklidir denir.

Ör) $\vec r(t) = (\sin 3t)(\cos t)\vec i + (\sin 3t)(\sin t)\vec j + t\vec k$

ve $\vec r(t) = (\cos 5t)\vec i + (\sin 5t)\vec j + t\vec k$

$\forall t \in \mathbb{R}$ için süreklidir.

Türevler ve Hareket

Tanım: Eğer f, g ve h fonk. ları t'de türevlere sahipse $\vec r(t) = f(t)\vec i + g(t)\vec j + h(t)\vec k$ vektör fonk.nu t'de türeve sahiptir (dif. bilir.). Türev az. vektör fonk. dur:

$$\vec r\,'(t) = \frac{d\vec r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}\vec i + \frac{dg}{dt}\vec j + \frac{dh}{dt}\vec k$$

Tanım) Eğer $\vec r$ uzayda düzgün bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın konum vektörü ise

1- Hız, konumun türevidir; $\vec v = \frac{d\vec r}{dt}$

2- Sürat, hızın büyüklüğü: Sürat $= |\vec v|$

3- İvme, hızın türevidir: $\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d^2\vec r}{dt^2}$

4- $\frac{\vec v}{|\vec v|}$ birim vektörü, t zamanında hareketin yönüdür.

9) Uzayda hareketi $\vec{r}(t)=2\cos t\,\vec{i}+2\sin t\,\vec{j}+5\cos^2 t\,\vec{k}$ konum vektörü ile verilen parçacığın hızını, süratini ve ivmesini bulunuz. $\vec{v}(7\pi/4)$ hız vektörünü hesaplayınız
$|\vec{v}(7\pi/4)|=?$ $\quad \vec{a}(7\pi/4)=?$

Çözüm: $\vec{v}(t)=\vec{r}'(t)=-2\sin t\,\vec{i}+2\cos t\,\vec{j}-5\sin 2t\,\vec{k}$

$\vec{a}(t)=\vec{r}''(t)=-2\cos t\,\vec{i}-2\sin t\,\vec{j}-10\cos 2t\,\vec{k}$

$$|\vec{v}(t)|=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2+(-5\sin 2t)^2}=\sqrt{4+25\sin^2 2t}$$

$\vec{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\vec{i}+\sqrt{2}\,\vec{j}+5\vec{k}$, $\quad \vec{a}\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\,\vec{i}+\sqrt{2}\,\vec{j}$, $\quad \left|\vec{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right|=\sqrt{29}$

Türev Alma Kuralları

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$, t nin dif. bilir vektör fonk. ları, $\vec{C}$ sbt bir vektör, c keyfi skaler ve f dif. bilir keyfi bir skaler fonk. ols.

1- Sbt fonk. kuralı: $\frac{d}{dt}\vec{C}=\vec{0}$

2- Skaler çarpım kuralı: $\frac{d}{dt}[c\vec{u}(t)]=c\vec{u}'(t)$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\vec{u}(t)]=f'(t)\vec{u}(t)+f(t)\vec{u}'(t)$$

3- Toplam ve fark kuralı: $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\mp\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\mp\vec{v}'(t)$

4- Noktasal çarpım kuralı: $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$

5- Vektörel çarpım kuralı: $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$

6- Zincir kuralı: $\frac{d}{dt}[\vec{u}(f(t))]=f'(t)\,\vec{u}'(f(t))$

Vektörel Fonk. ların İntegralleri

Tanım: $\vec{r}$ nin t ye göre belirsiz integrali, $\vec{r}$ nin tüm ters türevlerinin kümesidir ve $\int\vec{r}(t)\,dt$ şeklinde gösterilir. Eğer $\vec{R}$, $\vec{r}$ nin herhangi bir ters türevi ise $\int\vec{r}(t)\,dt=\vec{R}(t)+\vec{C}$ dir.

Ör) $\int [(\cos t)\vec{i} + \vec{j} - (2t)\vec{k}]\, dt = \left(\int \cos t\, dt\right)\vec{i} + \left(\int dt\right)\vec{j} - \left(\int 2t\, dt\right)\vec{k}$

$= (\sin t + c_1)\vec{i} + (t + c_2)\vec{j} - (t^2 + c_3)\vec{k}$

$\vec{C} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$

$= (\sin t)\vec{i} + t\vec{j} - t^2\vec{k} + \vec{C}$

$\boxed{\text{Tanım:}}$ Eğer $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ nın bileşenleri $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ise o halde $\vec{r}$ de int. bilir ve a dan b ye $\vec{r}$ nın belirli integrali aşağıdaki gibidir.

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\vec{k}$$

Ör) $\int_0^{\pi} \left((\cos t)\vec{i} + \vec{j} - (2t)\vec{k}\right) dt = ?$

Çözüm:

$$\int_0^{\pi} \left((\cos t)\vec{i} + \vec{j} - (2t)\vec{k}\right) dt = \left(\int_0^{\pi} \cos t\, dt\right)\vec{i} + \left(\int_0^{\pi} dt\right)\vec{j} - \left(\int_0^{\pi} (2t)\, dt\right)\vec{k}$$

$$= \sin t \Big|_0^{\pi} \vec{i} + t \Big|_0^{\pi} \vec{j} - t^2 \Big|_0^{\pi} \vec{k}$$

$$= (0-0)\vec{i} + (\pi - 0)\vec{j} - (\pi^2 - 0^2)\vec{k}$$

$$= \pi\vec{j} - \pi^2\vec{k}$$

Sürekli vektör fonk.ları için Kalkülüsün Temel Teoremi:

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \vec{R}(t)\Big|_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a)$$

Ör) Bir planörün uçtuğu yolu bilmediğimizi, sadece onun ivme vektörünün $\vec{a}(t) = -(3\cos t)\vec{i} - (3\sin t)\vec{j} + 2\vec{k}$ old. varsayalım. Ayrıca planör $(3,0,0)$ noktasından $\vec{v}(0) = 3\vec{j}$ hızıyla harekete başlamıştır ($t=0$ zamanında). Planörün konumunu t nin bir fonk. olarak bulunuz.

Çözüm: $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -(3\cos t)\vec{i} - (3\sin t)\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{v}(0) = 3j$ ve $\vec{r}(0) = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$\int \vec{a}\,dt = \vec{v}(t) = -(3\sin t)\vec{i} + (3\cos t)\vec{j} + (2t)\vec{k} + \vec{K}$

$\vec{v}(0) = 3\vec{j}$ old.

$-\underbrace{(3\sin 0)}_{0}\vec{i} + \underbrace{(3\cos 0)}_{3}\vec{j} + \underbrace{(2.0)}_{0}\vec{k} + \vec{K} = 3\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{K} = \vec{0}$

$\int \vec{v}(t)\,dt = \vec{r}(t) = (3\cos t)\vec{i} + (3\sin t)\vec{j} + t^2\vec{k} + \vec{C}$

$\vec{r}(0) = 3\vec{i} = \underbrace{(3\cos 0)}_{3}\vec{i} + \underbrace{(3\sin 0)}_{0}\vec{j} + \underbrace{0^2}_{0}\vec{k} + \vec{C}$

$t=0 \Rightarrow \vec{r}(0) = (3,0,0)$

$\Rightarrow \vec{C} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{r}(t) = (3\cos t)\vec{i} + (3\sin t)\vec{j} + t^2\vec{k}$

Bir Uzay Eğrisi Boyunca Yay Uzunluğu

Tanım: Bir $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \le t \le b$ düzgün eğrinin uzunluğu yani t, $t=a$ dan $t=b$ ye artarken yalnızca bir kez geçilen eğrinin uzunluğu aşağıdaki gibidir:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b |\vec{v}|\,dt$$

(Ö) Bir planör $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ helisi boyunca tırmanarak geçiyor. Planörün $t=0$ dan $t=2\pi$ ye kadar aldığı yolun uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $L = \int_0^{2\pi} |\vec{v}|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\,dt$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\pi\sqrt{2}$ br

P(t_0) temel noktasıyla yay uzunluğu parametresi: (89)

$$s(t)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}|\vec{v}(t)|\,dt$$

Ö) $\vec{r}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$ helisinde yay uzunluğu parametresine göre ifade ediniz

Çözüm: $s(t)=\int_0^t |\vec{v}(t)|\,dt=\sqrt{2}\,t \Rightarrow t=s/\sqrt{2}$

$t_0=0$ alırsak

$$\vec{r}(t(s))=\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{i}+\left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{j}+\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

Birim Teğet vektör

$\vec{T}=\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ vektörü eğriye teğet bir birim vektördür ve birim teğet vektör olarak adlandırılır

Ö) $\vec{r}(t)=(3\cos t)\vec{i}+(3\sin t)\vec{j}+t^2\vec{k}$ eğrisinin birim teğet vektörünü bulunuz

Çözüm: $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=-(3\sin t)\vec{i}+(3\cos t)\vec{j}+(2t)\vec{k}$

$|\vec{v}|=\sqrt{9+4t^2}$

$$\vec{T}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(-\frac{3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}}\right)\vec{i}+\left(\frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}}\right)\vec{j}+\left(\frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}}\right)\vec{k}$$

Ö) $\vec{r}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}$ birim çemberinin birim teğet vektörünü bulunuz

Çözüm: $\vec{v}=(-\sin t)\vec{i}+(\cos t)\vec{j}$, $|\vec{v}|=1$ old.

$\vec{T}=\vec{v}$ dir.

0251312 MATEMATİK II UYGULAMA 31.03.2010 → Çarşamba

1) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ eğrisinin $t \to 1$ giderken limitini hesaplayınız. Ayrıca (1,1,1) noktasında bu eğrinin hız ve ivme vektörünü bulunuz

Çözüm:

$$\lim_{t\to 1} \vec{r}(t) = \lim_{t\to 1} (t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}) = (\lim_{t\to 1} t)\vec{i} + (\lim_{t\to 1} t^2)\vec{j} + (\lim_{t\to 1} t^3)\vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

$1 = t$
$1 = t^2 \Rightarrow t = 1$
$1 = t^3$

$$\vec{v}(t)\Big|_{t=1} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2\vec{j} + 6t\vec{k} \qquad \vec{a}(t)\Big|_{t=1} = 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

2) $\vec{r}(t) = 3\cos wt\,\vec{i} + 4\cos wt\,\vec{j} + 5\sin wt\,\vec{k}$ eğrisinin hız ve ivmesini bulunuz

Çözüm:

$$\vec{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt} = -3w\sin wt\,\vec{i} - 4w\sin wt\,\vec{j} + 5w\cos wt\,\vec{k}$$

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(-3w\sin wt)^2 + (-4w\sin wt)^2 + (5w\cos wt)^2} = 5w$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -3w^2\cos wt\,\vec{i} - 4w^2\cos wt\,\vec{j} - 5w^2\sin wt\,\vec{k}$$

$$\|\vec{a}(t)\| = 5w^2$$

3) $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + e^{\tan t}\vec{j} + (\sin t - t)\vec{k}$ eğrisine $t = \frac{\pi}{4}$ noktasında teğet olan doğrunun parametrik denklemini yazınız

Çözüm:

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + e^{\tan\frac{\pi}{4}}\vec{j} + \left(\sin\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\vec{k}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + e\vec{j} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\vec{k}$$

doğru verilen eğriye $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ noktasında teğettir.

$$\vec{r}'(t) = -\sin t\,\vec{i} + (1+\tan^2 t)e^{\tan t}\vec{j} + (\cos t - 1)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 2e\vec{j} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\vec{k}$$

$$\frac{x-\frac{\sqrt2}{2}}{-\frac{\sqrt2}{2}} = \frac{y-e}{2e} = \frac{z-\left(\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt2}{2}-1} = \lambda$$

9) $\vec r(t) = \cos t\,\vec i + (t^2-\sin t)\,\vec j + e^t\,\vec k$ eğrisine $t=0$ da teğet olan doğrunun ve teğet düzlemin denklemini bulunuz

Çözüm: $\vec r(0) = \vec i + 0.\vec j + \vec k$ $\quad A=(1,0,1)$ nok. geçen

$r'(t) = -\sin t\,\vec i + (2t-\cos t)\,\vec j + e^t\,\vec k$

$r'(0) = -\vec j + \vec k$ $\quad$ (1,0,1) noktasından geçen ve $\vec u = (0,-1,1)$ vektörüne paralel olan teğet doğrusu

$x-1=0$, $\frac{y-0}{-1} = \frac{z-1}{1} = \lambda$

Teğet düzlemi $\quad \langle \vec{AX}, \vec u\rangle = 0 \Rightarrow \langle (x-1, y, z-1), (0,-1,1)\rangle = 0$

$\Rightarrow -y+z=1$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR (92)

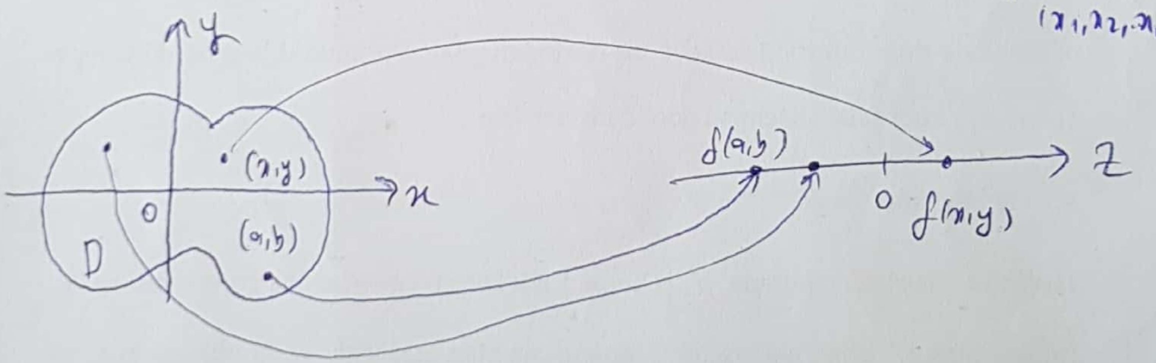
Tanım: D nin $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gibi n tane reel sayıdan oluşan bir küme olduğunu varsayalım. D üzerinde bir reel değerli f fonksiyonunun D deki her elemanına

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

gibi bir tane reel sayısı atanması bir kuraldır. D kümesi fonk.nun tanım kümesidir. f nin aldığı w değerlerinin kümesi fonksiyonun değer kümesidir. w sembolü f nin bağımlı değişkenidir ve f ye x_1 den x_n'e kadar n tane bağımsız değişkenin bir fonksiyonu denir. Ayrıca x_j lere fonksiyonun girdi değişkenleri w ye de fonksiyonun çıktı değişkeni denir.

$f: D \xrightarrow{} Z$ Tanım kümesi → değer kümesi

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(x_1, \dots, x_n) = w$



Tanım ve Değer Kümeleri

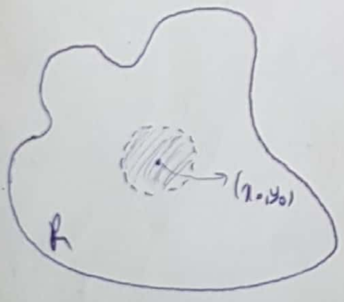
(93)

Fonksiyon	Tanım Kümesi	Değer Kümesi
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$ $D = \{(x,y) \mid y \geq x^2\}$	$[0, +\infty)$
$z = \frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$ $D = \{(x,y) \mid xy \neq 0\}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{0\}$
$z = \sin(xy)$	Düzlemin tamamı ($\mathbb{R}^2$)	$[-1, 1]$

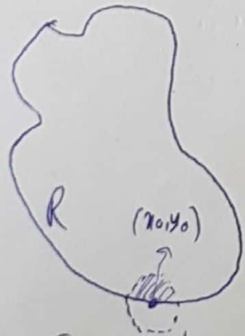
Fonksiyon	Tanım kümesi	Değer kümesi
$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	Uzayın tamamı ($\mathbb{R}^3$)	$[0,+\infty)$
$w=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$	$(x,y,z)\neq(0,0,0)$ $D=\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$	$(0,+\infty)$
$w=xy\ln z$	Uzayın yarısı $z>0$ $D=\{(x,y,z)\mid z>0\}$	$(-\infty,+\infty)$

Tanım: Eğer bir (x_0,y_0) noktası pozitif yarıçaplı tamamıyla bir R bölgesi içinde bulunan bir dairenin merkezi ise xy-düzlemindeki bir R bölgesindeki (kümesindeki) (x_0,y_0) noktası R nin bir iç noktasıdır. Eğer merkezi (x_0,y_0) noktası R nin sınırında ise bir sınır noktasıdır. (Sınır noktasının R'ye ait olması gerekmez)

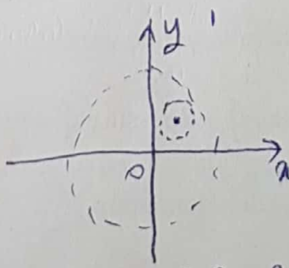
Bir bölgenin iç noktaları bir küme olarak bölgenin içini oluştururlar. Bölgenin sınır noktaları bölgenin sınırını oluşturur. ~~Bir~~ Bir bölge sadece iç noktalarından oluşuyorsa açıktır. Bir bölge bütün sınır noktalarını içeriyorsa kapalıdır.



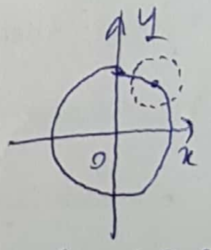
iç nokta



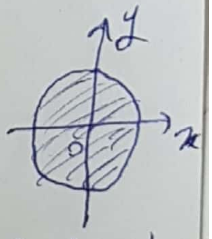
Sınır noktası



$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$
Açık birim daire
Her nokta bir iç noktadır.



$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$
Birim dairenin sınırı
(Birim çember)

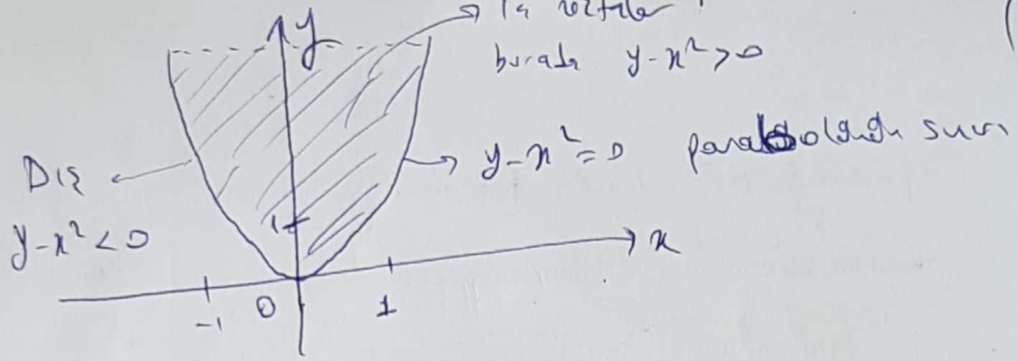


$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$
Kapalı birim daire
Bütün sınır noktalarını içerir.

Tanım: Düzlemdeki bir bölge sabit yarıçaplı bir dairenin içindeyse o bölge sınırlıdır. Bir bölge sınırlandırılmamış ise sınırsızdır.

Ö) $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ fonk. tanım kümesini tanımlayınız

Çözüm:



$y-x^2 \geq 0 \to y \geq x^2$ dir.

İki Değişkenli Fonksiyonların Grafikleri, Seviye Eğrileri ve Konturları

Tanım: Bir $f(x,y)$ fonksiyonun bir $f(x,y)=c$ sbt değerine sahip olduğu düzlemdeki noktaların kümesi f nin tanım kümesindeki seviye eğrisi olarak adlandırılır. f nin tanım kümesindeki (x,y) için uzaydaki bütün $(x,y,f(x,y))$ noktaları kümesi f nin grafiğidir. f nin grafiğine $z=f(x,y)$ yüzeyi de denir. Uzayda $z=c$ düzleminin bir $z=f(x,y)$ yüzeyini kestiği eğri $f(x,y)=c$ fonk. değerini temsil eden noktalardan oluşur. Buna $f(x,y)=c$ kontur eğrisi denir.

Ö) $f(x,y)=100-x^2-y^2$ nin grafiğini çiziniz ve düzlemde f nin tanım kümesinde $f(x,y)=0$, $f(x,y)=51$ ve $f(x,y)=100$, $f(x,y)=75$ seviye eğrilerini göst. $f(x,y)=75$ kontur eğrisini göst.

$f(x,y)=75$ kontur eğrisi, $z=75$ düzleminde $x^2+y^2=25$ çemberidir.

$z=75$, $z=100-x^2-y^2 \to x^2+y^2=25$

Çözüm:

$f(x,y)=0$ seviye eğrisi

$f(x,y)=100-x^2-y^2=0 \Rightarrow x^2+y^2=100$

$f(x,y)=100-x^2-y^2=51$

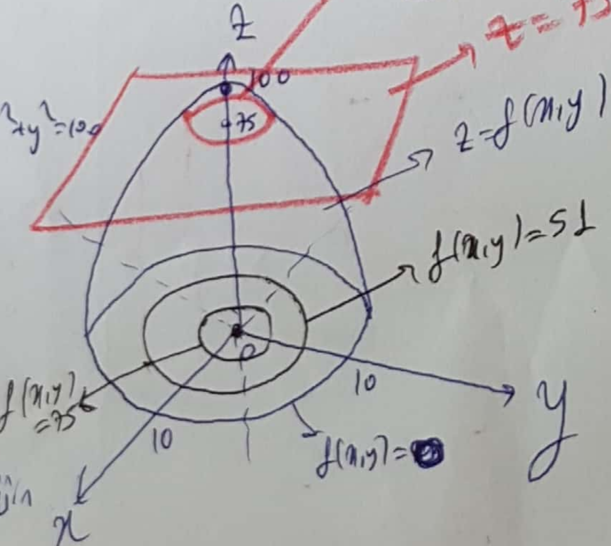
$\Rightarrow x^2+y^2=49$

$f(x,y)=100-x^2-y^2=75$

$\Rightarrow x^2+y^2=25$

$f(x,y)=100-x^2-y^2=100$

$\Rightarrow x^2+y^2=0$ sadece orijin



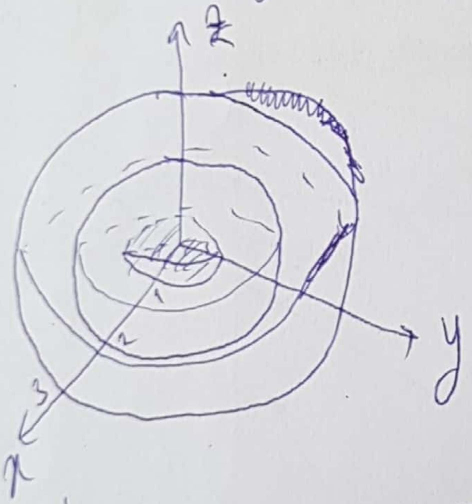
Üç Değişkenli Fonksiyonların Seviye Yüzeyleri

Tanım: Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x,y,z)=c$ değerine sahip olduğu (x,y,z) noktaları kümesine f nin seviye yüzeyi denir.

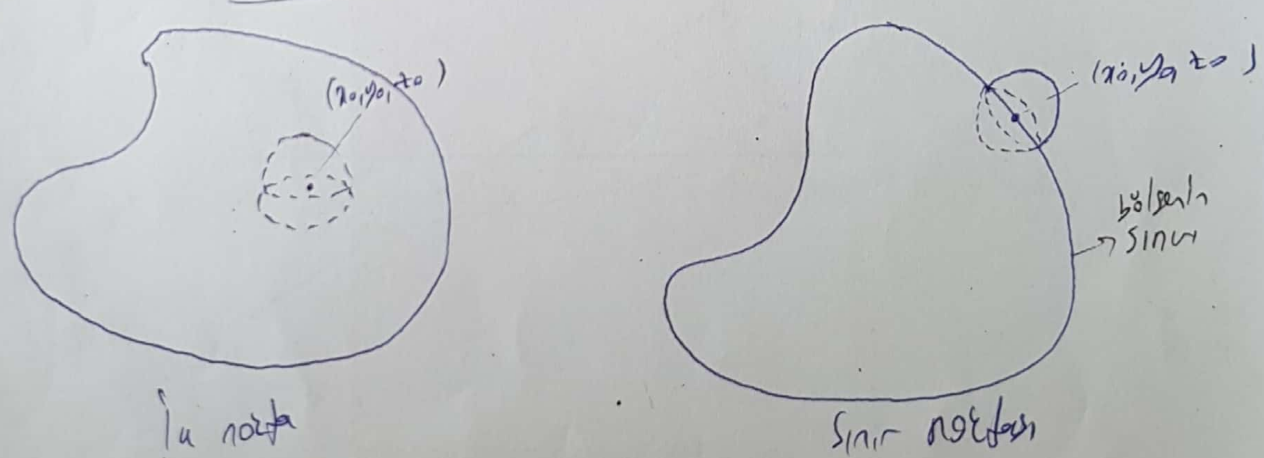
Ör. Aş. fonk. seviye yüzeyini tanımlayınız

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Çözüm: Her seviye yüzeyi $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=c$, $c>0$ (kökten büyük olur), merkezi orijinde olan c yarıçaplı bir küredir.



Küreler içiçedir.



Eğer bir bölge tamamen iç noktaları içeriyorsa bu bölge açıktır.

1) a) ~~$f(x,y) = \ln(x \ln(y-x))$~~ b) $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$

c) $f(x,y) = \arcsin(y-x)$ d) $f(x,y) = \arcsin(xy)$.

e) $f(x,y) = \ln(\ln x) + \ln(\ln(x-y))$ f) $z = f(x,y) = \ln(\tan x) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

g) $f(x,y) = \ln\left(1 - \frac{y^2}{x}\right)$ h) $f(x,y) = \sqrt{\cos(x^2+y^2)}$

i) ~~$f(x,y) = \sqrt{1-\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}$~~ j) ~~$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y-1}{x}\right)$~~

fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz

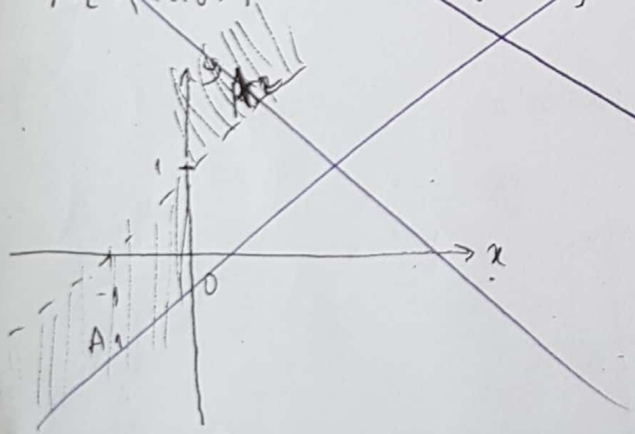
Çözüm:

a) ~~$x \ln(y-x) > 0$~~ i- ~~$x < 0$ ise $\ln(y-x) < 0 \Rightarrow y-x < e^0 = 1$~~

~~$A_1 = \{(x,y) \mid x < 0 \text{ iken } y < x+1\}$~~

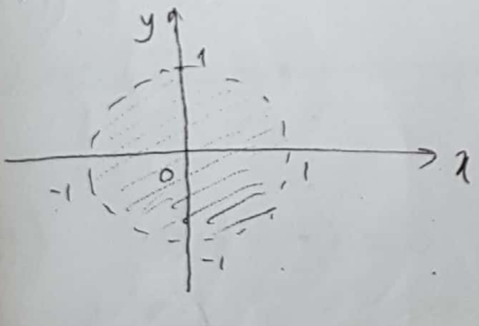
~~ii) $x > 0$ ise $\ln(y-x) > 0 \Rightarrow y-x > e^0 = 1 \Rightarrow y-x > 1$~~

~~$A_2 = \{(x,y) \mid x > 0 \text{ iken } y > x+1\}$~~

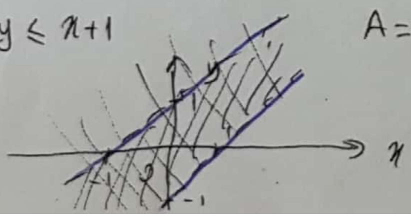


~~$A = A_1 \cup A_2$~~

b) $1-x^2-y^2 > 0 \Rightarrow x^2+y^2 < 1$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$

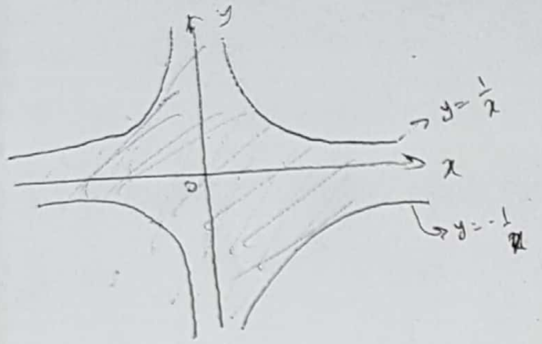


c) $-1 \leq y-x \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq y \leq x+1$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-1 \leq y \leq x+1\}$



d) $-1 \le xy \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \le y \le \frac{1}{x}$,. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{x} \le y \le \frac{1}{x}\}$

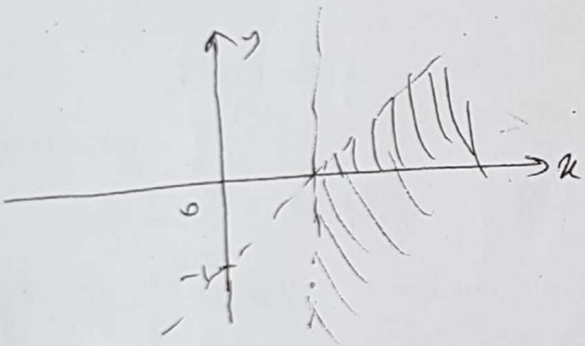
87



e) $\ln x > 0 \Rightarrow x > e^0 = 1 \Rightarrow x > 1$

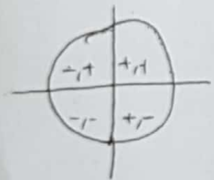
$\ln(x-y) > 0 \Rightarrow x - y > 1$
$\Rightarrow y < x - 1$

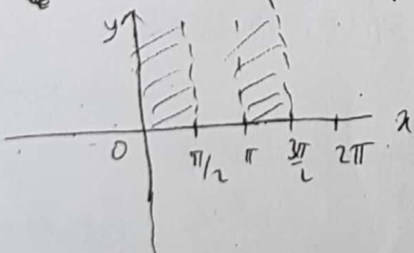
$A = \{(x,y) \mid x > 1$ ve $y < x-1\}$



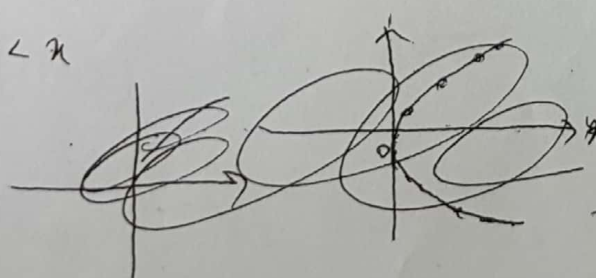
f) $\tan x > 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ $\frac{y}{x} > 0$

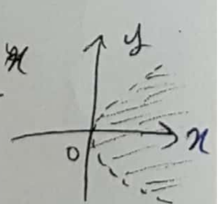
$A = \{(x,y) \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}, \frac{y}{x} > 0\}$



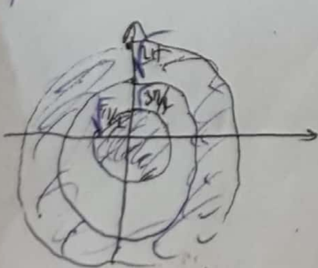


g) $1 - \frac{y^2}{x} > 0 \Rightarrow \frac{y^2}{x} < 1 \Rightarrow y^2 < x$

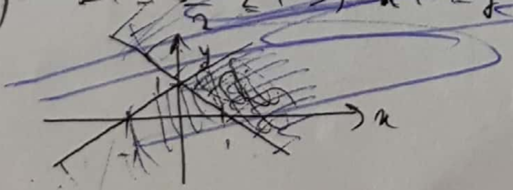




h) $\cos(x^2+y^2) \geq 0$, $0 \le x^2+y^2 \le \pi/2$ ve $\frac{3\pi}{2} \le x^2+y^2 \le 2\pi$



j) $-1 \le \frac{y-1}{2} \le 1 \Rightarrow -x+1 \le y$, $y \le x+1$



Yüksek Boyutlarda Limitler ve Süreklilik

98

İki değişkenli fonksiyonlarda limit.

Tanım: Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık f nin tanım kümesindeki $\forall (x,y)$ noktası için $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ olduğu her yerde $|f(x,y)-L| < \varepsilon$ olacak bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa (x,y) noktası (x_0,y_0) a yaklaşırken f fonksiyonu L limitine yaklaşır denir ve $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ ile gösterilir.

Teorem: İki değişkenli fonksiyonların limitlerinin özellikleri:

Eğer L, M ve k reel sayılar ve

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ ve $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$

ise aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1- Toplam ve fark kuralı: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \mp g(x,y)] = L \mp M$

2- Sabitle çarpım kuralı: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k\,f(x,y) = k.L \quad , k \in \mathbb{R}$

3- Çarpım kuralı: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y).g(x,y)] = L.M$

4- Bölüm kuralı: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0 \;, g(x,y) \neq 0$

5- Kuvvet kuralı: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = L^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$

6- Kök kuralı: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$

Ör) a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = ? \qquad \dfrac{0-0.1+3}{0^2.1+5.0.1-1^3} = -3$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$

08) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = ?$

Çözüm: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-xy}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{(x-y)}}$

$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$= 0.(\sqrt{0}+\sqrt{0}) = 0$

08) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} = ?$

Çözüm: $x\to 0$ ve $y\to 0$ olarak limit değerini hesaplayamıyoruz. Bu nedenle $y=mx$ doğrusu boyunca yaklaşalım

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{4m^2x^3}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \dfrac{4m^2x}{(1+m^2)} = 0$

09) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x} = ?$

Çözüm: $y=mx$ doğrusu boyunca yaklaşalım

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{m\cancel{x}}{\cancel{x}} = m$, m değiştirince limit değişeceğinden limit mevcut değildir.

Süreklilik

Tanım: Eğer 1- f, (x_0,y_0) da tanımlı 2- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ mevcut

3- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ ise f fonk. (x_0,y_0) noktasında sürekli dir. Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan f fonk. sürekli fonk. denir.

(100)

Ö) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

fonk. sürekli olup olmadığını göst.

Çözüm. f fonk. $(x,y) \neq (0,0)$ olan her noktada sürekli. çünkü değerleri x ve y nin rasyonel bir fonksiyonuyla verilmektedir. ve sınırlı değeri fonksiyonel ifadesinde x ve y değeri yerine koyarak elde edilir. $y=mx$ doğrusu boyunca yaklaşalım

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2m}{1+m^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

elde edilir. m değiştikçe limit değişeceğinden $(x,y)=(0,0)$ da limit yoktur. Yani fonk. $(x,y)=(0,0)$ da sürekli değildir.

$\boxed{\text{Limitin yokluğu için iki yol testi}}$

Eğer bir $f(x,y)$ fonk. f nin tanım kümesinde (x,y) noktası farklı iki yol boyunca (x_0,y_0) a yaklaşırken farklı limitleri varsa bu durumda $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ mevcut değildir.

Ö) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ limitinin var olmadığını göst.

Çözüm: $y=kx^2$ parabolü ile yaklaşalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(kx^2)}{x^4+(kx^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$$

k değiştikçe limit değişeceğinden limit yoktur. $y=mx$ doğrusu ile yaklaşalım

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2mx}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx}{x^2+m^2} = 0$$

limiti mevcuttur. Fakat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ var olmadığı söylenir.

Bileşke Fonksiyonların Sürekliliği

Eğer f fonksiyonu (x_0,y_0) da sürekli ve g de $f(x_0,y_0)$ da sürekli olan bir tek değişkenli fonk. ise bu durumda $h(x,y)=g(f(x,y))$ ile tanımlanan bileşke fonk. $h=g\circ f$, (x_0,y_0) da süreklidir.

Örneğin, e^{x-y}, $\cos\left(\frac{xy}{x^2+1}\right)$, $\ln(1+x^2y^2)$ bileşke fonk.lar!

$f(x,y)=x-y$, $g(x)=e^x$

$g(x)=\cos x$, $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+1}$

$g(x)=\ln x$, $f(x,y)=1+x^2y^2$

$\forall (x,y)$ noktasında süreklidir.

İkiden Fazla Değişkenli Fonk.lar

İki değişkenli fonk. için yapılan limit ve süreklilik tanımları ile toplam, fark, çarpım, sabitle çarpım, bölüm ve kuvvetlerin limitleri ve süreklilikleriyle ilgili sonuçlar üç veya daha fazla değişkenli fonk.lar için de geçerlidir.

Örn: $\ln(x+y+z)$ ve $\frac{y\sin z}{x-1}$ gibi fonksiyonlar tanım kümeleri boyunca süreklidirler ve

$$\lim_{P\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0} = \frac{1}{2}$$

gibi limitler doğrudan dönüşüm yoluyla bulunabilir, burada P (x,y,z) noktasını belirtmektedir.

Kısmi Türevler

İki Değişkenli Fonksiyonların Kısmi Türevleri

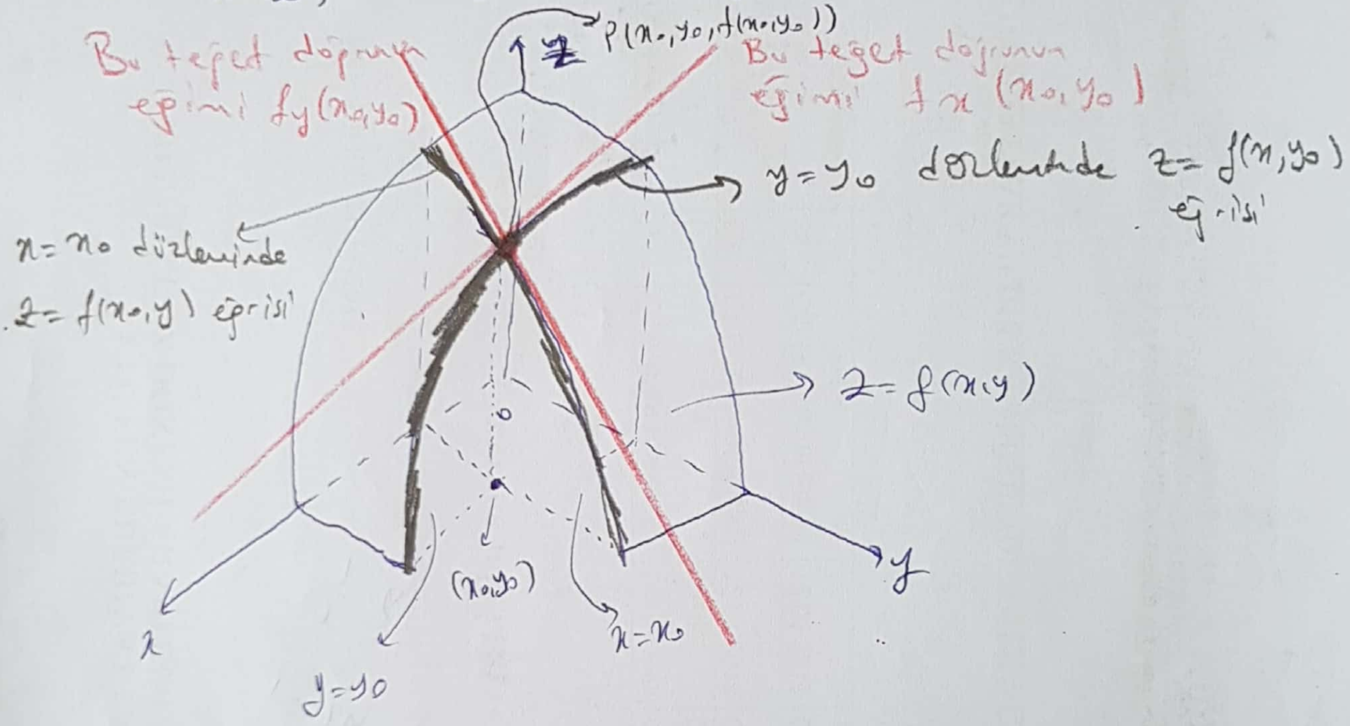
Tanım: (x_0,y_0) noktasında $f(x,y)$ fonk. x değişkenine göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{d}{dx} f(x,y_0)\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

şeklindedir.

Tanım: (x_0, y_0) noktasında $f(x,y)$ fonk. y değişkenine göre kısmi türevi

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{d}{dy} f(x_0,y)\right|_{y=y_0} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$$



Ör) $f(x,y) = x^2+3xy+y-1$ fonk. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(4,-5)} = ?$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(4,-5)} = ?$

Çözüm: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+3y \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(4,-5)} = 2.4+3(-5) = -7$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x+1 \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(4,-5)} = 3.4+1 = 13$

Ör) $f(x,y) = y\sin(xy) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = ?$

Çözüm: $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xy) + yx\cos(xy)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y^2\cos(xy)$

Ör) $f(x,y) = \frac{2y}{y+\cos x} \Rightarrow f_x = ?$ $f_y = ?$

Çözüm: $f_x = \frac{0.(y+\cos x) - 2y(-\sin x)}{(y+\cos x)^2} = \frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}$, $f_y = \frac{2(y+\cos x)-2y}{(y+\cos x)^2} = \frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}$

(Ö) Eğer aşağıdaki denklem

$$yz - \ln z = x+y$$

z yi x ve y bağımsız değişkenlerinden bir fonk. olarak ~~tanımlarsa~~ tanımlarsa ve kısmi türevi mevcutsa

$\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

Çözüm: fonk $z = f(x,y)$ dir.

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz - \ln z) = \frac{\partial}{\partial x}(x+y)$$

$$\Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \Rightarrow \left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz-1}$$

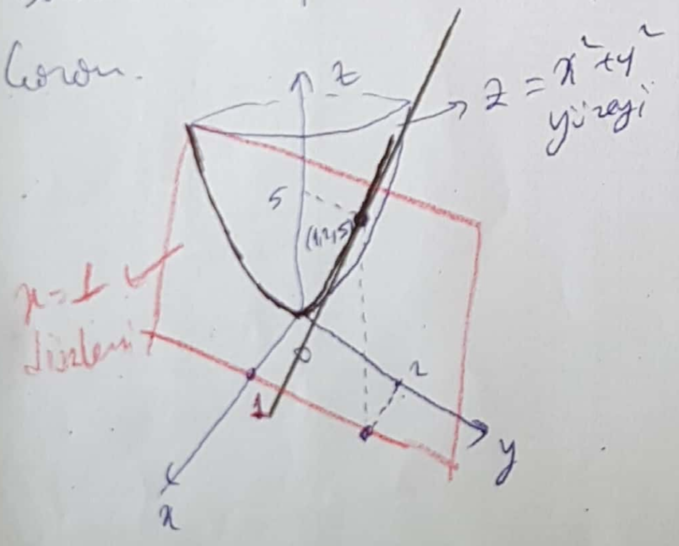
$$\frac{\partial}{\partial y}(yz - \ln z) = \frac{\partial}{\partial y}(x+y)$$

$$\Rightarrow z + y\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z(1-z)}{yz-1}$$

(Ö) $x=1$ düzlemi $z = x^2+y^2$ paraboloidi ile bir parabolde kesişmektedir. $(1,2,5)$ noktasında parabolün teğetinin eğimini bulunuz. ve doğrunun denk. bul.

Çözüm.



~~Sorulan eğim~~

$$\cancel{\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\Big|_{(1,1)} = 2y\Big|_{(1,2)} = 4}$$

Ya da

$x=1$ ile $z = x^2+y^2$ ortak çözelim

$\Rightarrow z = 1+y^2$ tek değişkenli fonk.

$$m = \frac{dz}{dy}\Big|_{(1,2,5)} = 2y\Big|_{y=2} = 4$$

$$z - 5 = 4(y-2)$$

$$\Rightarrow z = 4y - 3$$

$$\frac{dz}{dy}\Big|_{y=2} = \frac{d}{dy}(1+y^2)\Big|_{y=2} = 2y\Big|_{y=2} = 4$$

İkiden fazla değişkenli Türevler

(Ö) Eğer x,y ve z bağımsız değişken ise ve ~~f(x,y,z)=x~~

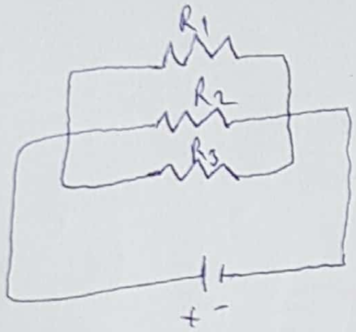
$f(x,y,z) = x\sin(y+3z)$ ise $\frac{\partial f}{\partial z} = ?$

Çözüm: $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[x\sin(y+3z)] = 3x\cos(y+3z)$

Ö7 R_1, R_2 ve R_3 ohmluk dirençler paralel bağlanarak R ohmluk bir direnç elde edilmiştir. R nin değeri aşağıdaki denklemlerle bulunur:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$R_1 = 30$, $R_2 = 45$, $R_3 = 90$ ohm olduğunda $\frac{\partial R}{\partial R_2} = ?$



Çözüm: $\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$

$$\Rightarrow -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_2} = 0 - \frac{1}{R_2^2} + 0 \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R^2}{R_2^2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2$$

$R_1 = 30$, $R_2 = 45$ ve $R_3 = 90$ olduğundan $\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} \Rightarrow R = 15$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Kısmi Türevler ve Süreklilik

Bir $f(x,y)$ fonk. belirli bir noktada hem x e hem de y ye göre kısmi türevlere sahip olduğu halde o noktada sürekli olmayabilir. Bunlar türevin sürekliliğini gerektiren tek değişkenli fonksiyonlardan farklıdır. Eğer $f(x,y)$ nin kısmi türevleri (x_0,y_0) merkezli bir dairede mevcut ve sürekli ise ilerideki bölümde de göreceğimiz gibi f fonk. (x_0,y_0) da süreklidir.

İkinci Mertebeden Kısmi Türevler

$f(x,y)$ için $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ veya f_{xx}, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ veya f_{yy}

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ veya f_{yx}, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ veya f_{xy}

105

Ö7 $f(x,y)=x\cos y+ye^x \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=?\; \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=?$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=?\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=?$

Çözüm: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x\cos y+ye^x)=\cos y+ye^x$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(x\cos y+ye^x)=-x\sin y+e^x$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(\cos y+ye^x)=-\sin y+e^x$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\cos y+ye^x)=ye^x$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(-x\sin y+e^x)=-\sin y+e^x$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(-x\sin y+e^x)=-x\cos y$

Teo. (Karışık Türev Teoremi): Eğer $f(x,y)$ ve onun kısmi türevleri f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx} (a,b) noktasını içeren açık bir bölgede tanımlı ise ve hepsi (a,b) de sürekli ise bu durumde ~~aşağıdaki eşitlik vardır~~

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b) \text{ dır.}$$

Ö8 $z=w(x,y)$ için

$w=xy+\dfrac{e^y}{y^2+1} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=?$

Çözüm: $\dfrac{\partial w}{\partial x}=y\ ,\quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}(y)=1$

$\dfrac{\partial w}{\partial y}=x+\dfrac{e^y(y^2+1)-2ye^y}{(y^2+1)^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x+\dfrac{e^y(y^2+1)-2ye^y}{(y^2+1)^2}\right)=1$

① Aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

a) ~~$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{y} = 0$~~ b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = 1$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = 1$; d) $\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} = 1/2$

Çözüm:

~~a) "$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ $|x-a|<\delta$ ve $|y-b|<\delta$ iken $(x,y)\to(a,b)$ için $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ olacak biçimde $\delta>0$ sayısı varsa $f(x,y)$ nin limiti L dir."~~

~~$|x-0|<\delta$ ve $|y-1|<\delta$ iken~~

~~$|f(x,y)-L| = \left|\frac{\sin xy}{y} - 0\right| = \frac{|\sin xy|}{|y|} \leq \frac{|xy|}{|y|} = |x| < \delta = \varepsilon$ olur. O halde~~

~~$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{y} = 0$ dır.~~

b) $u = xy$ diyelim. $(x,y)\to(0,0)$ iken $u\to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

c) $$\cos\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = \cos\left(\frac{0+0}{0+0+1}\right) = \cos 0 = 1$$

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x}.e^{-y} = \lim_{x\to 0} e^{x} \lim_{y\to \ln 2} e^{-y} = 1.e^{-\ln 2} = 1.2^{-1} = 1/2$$

$$* \boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(a+r\cos\theta,\, b+r\sin\theta)}$$

② Aş. fonk.ların $(0,0)$ noktasında limitlerinin var olup olmadığını gösterelim.

a) $f(x,y) = \frac{xy}{|xy|}$ b) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ c) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2-y^2}$

Çözüm:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{|xy|}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|y|}\right)=\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}\right)}_{\text{yok}}\underbrace{\left(\lim_{y\to 0}\frac{y}{|y|}\right)}_{\text{yok}}$

sağdan soldan: $+1$ -1 — sağdan $+1$, soldan -1

old. bu limit mevcut değildir.

(107)

b) $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x+0}=\lim_{x\to 0}1=1$

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{0-y}{0+y}\right)=\lim_{y\to 0}-1=-1$ limitler farklı çıktığından $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$ yoktur.

c) $y=mx$ doğrularıyla $(0,0)$ noktasına yaklaşalım.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2-y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2-m^2x^2}=\frac{1}{1-m^2}$ olup m değiştikçe farklı limitler bulunduğundan limit yoktur.

3) a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}=?$ b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\arctan\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=?$

Çözüm:

a) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $\quad\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta-r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to 0}r\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=0$

b) $\lim_{r\to 0}\arctan\left(\frac{|r\cos\theta|+|r\sin\theta|}{r^2}\right)=\lim_{r\to 0}\arctan\left(\frac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{r}\right)=\pi/2.$

c) $\lim_{r\to 0}\frac{\cancel{r^2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cancel{r^2}}=\lim_{r\to 0}\cos 2\theta=\cos 2\theta$

θ değeri ile limit değiştiğinden limit yoktur.

~~025152 MATEMATİK II UYGULAMA 21/04/2010~~

108

(4) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise.} \end{cases}$$

fonk. $\mathbb{R}^2$ de (her yerde) sürekli old. göst.

Çözüm:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r\cos\theta\, r^2\sin^2\theta)}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^3\cos\theta\sin^2\theta)}{r^2} \cdot \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{r\cos\theta\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin^2\theta = 0 = f(0,0)$$

old. f, $(0,0)$ da yani $\mathbb{R}^2$ de süreklidir.

(5) $f(x,y)$ harmonik bir fonksiyon ise $f(x^2-y^2, 2xy)$ fonksiyonun harmonik old. göst.

Çözüm:

* f fonk. $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ sağlarsa f ye harmonik fonk. denir.

* $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ise f ye homojen fonk. denir.

$$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial y^2} = ?$$

$u = x^2-y^2$, $v = 2xy$ olmalı.

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y = 2\left(x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial x^2} = \left(2x\frac{\partial f}{\partial u} + 2y\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left(2x\frac{\partial f}{\partial u} + 2y\frac{\partial f}{\partial v}\right)_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -2y\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial^2 y} = \left(-2y\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{-2y} + \left(-2y\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}\right)_v \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{2x}$$

$$= 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} - 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

109

$\Rightarrow f$ sürekli ise $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$ ... f harmonik old. $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$ dır.

O halde $\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial y^2} = 0$

6) $f(x,y) = x^2-3xy+y^2 \Rightarrow f_x(1,2)=?$ $\quad f_y(1,2)=?$

Çözüm:

$f_x = 2x-3y \Rightarrow f_x(1,2) = -4$

$f_y = -3x+2y \Rightarrow f_y(1,2) = 1$

7) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+4y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ ise} \end{cases}$

fonk. için $f_x(0,0)=?$ $\quad f_y(0,0)=?$

Çözüm:

$$\boxed{* \; f_x(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}, \quad f_y(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = 0$$

8) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ ise} \end{cases}$

fonk. için $f_x(0,0)=?$ $\quad f_y(0,0)=?$

Çözüm: $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$ $\quad f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{1}{k}-0}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k^2} = \infty$ yoktur.

Daha Yüksek Mertebeden Kısmi Türevler X. Hafta

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{yyxx}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = f_{\underbrace{xx\cdots x}_{n\text{-tane}}}$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-m} \partial y^m} = f_{\underbrace{yy\cdots y}_{m\text{-tane}}\underbrace{xxxx}_{n-m\text{ tane}}}$$

Ö) $f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y \to f_{yxyz} = ?$

Çözüm: $f_y = -4xyz + x^2$, $f_{yx} = -4yz + 2x$, $f_{yxy} = -4z$, $f_{yxyz} = -4$

Teo: İki değişkenli fonksiyonlar için Artırım teo: (x_0,y_0) noktasını içeren açık bir R bölgesinde $f(x,y)$ in birinci türevleri tanımlı ve (x_0,y_0) da f_x ve f_y nin sürekli old. kabul edelim. Bu durumda R bölgesinde (x_0,y_0) dan başka bir $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ noktasına taşınması ile oluşan f değerlerindeki $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ değişimi aşağıdaki formda olan bir denklemi sağlar.

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

Burada hem $\Delta x \to 0$ hem de $\Delta y \to 0$ iken $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ dır.

Tanım: Eğer $f_x(x_0,y_0)$ ve $f_y(x_0,y_0)$ mevcut ise ve Δz aşağıdaki denklemi sağlarsa

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$z = f(x,y)$ fonk. (x_0,y_0) noktasında türevlenebilirdir. Burada hem $\Delta x \to$ hem de $\Delta y \to 0$ iken $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ dır. Eğer f fonk tanım bölgesinin her noktasında türevlenebiliyorsa f ye o bölgede türevlenebilirdir denir ve onun grafiğinin düzgün yüzey olduğu söylenir.

Yukarıdaki teoremin Sonucu: Eğer $f(x,y)$ nin türevleri olan f_x ve f_y açık bir R bölgesi boyunca sürekli ise bu durumda f, R nin her noktasında türevlenebilirdir.

Teo: Eğer bir $f(x,y)$ fonk. (x_0,y_0) noktasında türevlenebilir ise f fonk (x_0,y_0) da süreklidir.

Zincir Kuralı

Teorem (İki bağımsız değişken içeren fonksiyonlar için Zincir kuralı): Eğer $w = f(x,y)$ türevlenebilir bir fonksiyon ve eğer $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ t nin türevlenebilir fonk.ları ise $w = f(x(t), y(t))$ bileşkesi de t nin türevlenebilir bir fonk. dur ve aşağıdaki eşitliklerle verilir;

$$\frac{dw}{dt} = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

veya
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Ör. Zincir kuralını kullanarak aşağıdaki

$$w = xy$$

nin $x = \cos t$, $y = \sin t$ yolu üzere değerlendirilen t ye göre türevini hesaplayınız. $t = \pi/2$ de türevin değeri nedir?

Çözüm:
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial (xy)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial (xy)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= y(-\sin t) + x \cos t$$

$$= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) = -\sin^2 t + \cos^2 t = \cos 2t$$

kontrol:
$$w = xy = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2t = \cos 2t$$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\pi/2} = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi = -1$$

Teorem (Üç bağımsız değişkenli fonksiyonlar için zincir kuralı): Eğer $w = f(x,y,z)$ fonk. türevlenebilir ve x, y ve z de t nin türevlenebilir fonk.ları ise bu durumda w da t nin türevlenebilir bir fonk. dur.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Ö) $w = xy + z$, $x = \cos t$; $y = \sin t$, $z = t$

ise $\frac{dw}{dt} = ?$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)\Big|_{t=0} = ?$

Çözüm: $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$

$= y \cdot (-\sin t) + x \cdot (\cos t) + 1 \cdot 1$

$= (\sin t) \cdot (-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1$

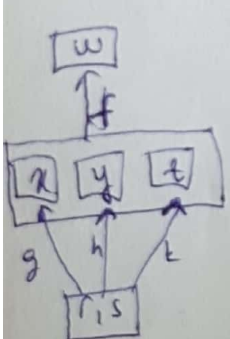
$= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t$

$\left(\frac{dw}{dt}\right)\Big|_{t=0} = 1 + \cos 0 = 2$

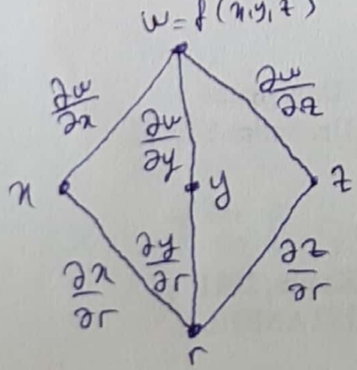
Teo. (İki bağımsız değişken ve üç ara değişken için zincir kuralı): $w = f(x,y,z)$, $x = g(r,s)$, $y = h(r,s)$, ve $z = k(r,s)$ olduğunu varsayalım. Eğer tüm dört fonk. da türevlenebilir ise w fonk. r ve s ye göre kısmi türevleri mevcuttur ve aş. formüllerle verilirler.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

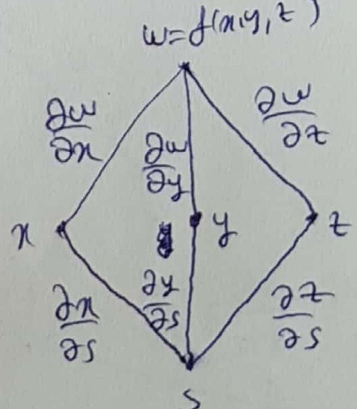
$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$



$w = f(g(r,s), h(r,s), k(r,s))$



$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$



$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$

Ö) $w = x + 2y + z^2$, $x = \frac{r}{s}$, $y = r^2 + \ln s$, $z = 2r$

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial r} = ?$ $\frac{\partial w}{\partial s} = ?$

Çözüm: $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$

$$= 1\cdot\frac{1}{s} + 2\cdot(2r) + (2z)\cdot 2$$

$$= \frac{1}{s} + 4r + \underbrace{2(2r)2}_{8r} = \frac{1}{s} + 12r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

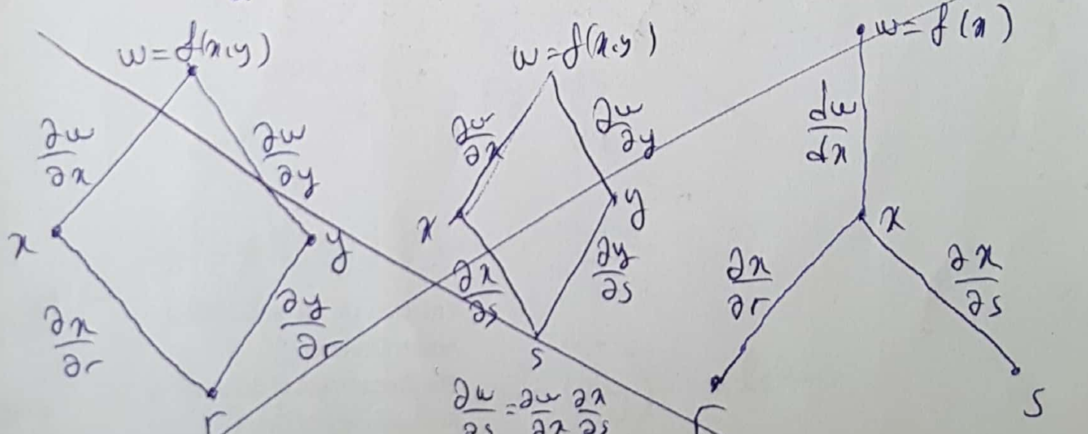
$$= 1\cdot\left(-\frac{r}{s^2}\right) + 2\cdot\frac{1}{s} + 2\underset{\downarrow\,2r}{z}\cdot(0) = -\frac{r}{s^2} + \frac{2}{s}$$

* Eğer $w=f(x,y)$, $x=g(r,s)$ ve $y=h(r,s)$ ise bu durumda

$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$ ve $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$

* $w=f(x)$ ve $x=g(r,s)$ ise

$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}$ ve $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}$



$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$

$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$ $\quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}$

Ö) $w = x^2+y^2$, $x=r-s$, $y=r+s \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial r}=?$ $\frac{\partial w}{\partial s}=?$

Çözüm: $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$

$$= (2x)\cdot(1) + (2y)\cdot 1$$
$$= 2(r-s) + 2(r+s)$$
$$= 4r$$

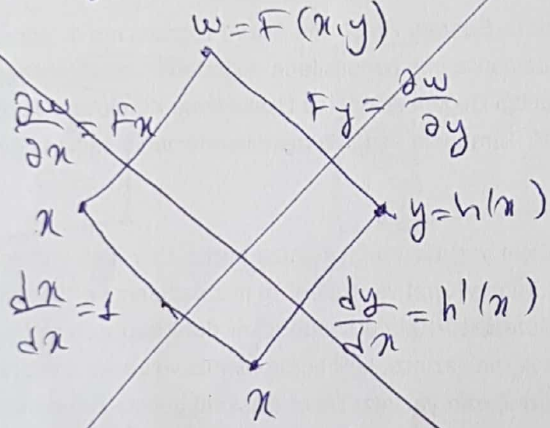
$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$

$$= 2x(-1) + 2y(1)$$
$$= -2(r-s) + 2(r+s)$$
$$= 4s$$

Teo. (Kapalı türev için bir formül): $F(x,y)$ nin türevlenebilir bir fonk olduğunu ve $F(x,y)=0$ denkleminin y yi x in bir türevlenebilir fonk. olarak tanımladığını kabul edelim. Bu durumda $F_y \neq 0$ herhangi bir ~~noktada~~

$$w=F(x,y)=0 \Rightarrow 0=\frac{dw}{dx}=F_x\frac{dx}{dx}+F_y\frac{dy}{dx}=1\cdot F_x+F_y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$



$$\frac{dw}{dx}=F_x\cdot 1+F_y\cdot\frac{dy}{dx}$$

Ör: $y^2-x^2-\sin(xy)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=?$

$y=y(x)$

Çözüm: $F(x,y)=y^2-x^2-\sin(xy)$ alalım.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{-2x-y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)}=\frac{2x+y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)}$$

* Yukarıdaki teoremi üç değişkenli fonk. lara genişletelim. $F(x,y,z)=0$ denkleminin z yi kapalı olarak $z=f(x,y)$ fonk olarak tanımladığını varsayalım. Bu durumda f nin bölgesindeki tüm (x,y) için $F(x,y,f(x,y))=0$ old. görülür. F ve f nin türevlenebilir fonk olduğunu kabul eder,

Zincir kuralını $F(x,y,z)=0$ denkleminde x bağımsız değişkenine göre türevini almak için kullanabiliriz.

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=F_x\cdot 1+F_y\cdot 0+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\Rightarrow\quad F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Benzer şekilde y bağımsız değişkenine göre türev alırsak

$$F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$F_z\neq 0$ olduğu her durumda $z=f(x,y)$ nin kısmi türevleri ~~kısaltılmış~~

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}}\quad \text{ve}\quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}}\quad\ldots(*)$$

Bu çözümler bizi kapalı fonk. teo.'a götürür. Bu teorem (*) deki sonuçların geçerli olması için gerekli şartları tanımlar. Eğer F_x, F_y ve F_z kısmi türevleri sayıda (x_0,y_0,z_0) noktasını içeren açık bir R bölgesi boyunca sürekli ise ve eğer sbt c için $F(x_0,y_0,z_0)=c$ ve $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ ise bu durumda $F(x,y,z)=c$ denklemi (x_0,y_0,z_0) noktasının civarında x ve y nin türevlenebilir kapalı bir fonk. olarak z yi tanımlar ve z nin kısmi türevleri (*) denklemi ile verilir.

Ör: $z=f(x,y)$ için $F(x,y,z)=x^3+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0 \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}=\ ?\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0,0)}=\ ?$

Çözüm: $F(x,y,z)=x^3+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0$

$F_x=3x^2+yze^{xz}$, $\quad F_y=e^{xz}-z\sin y$, $\quad F_z=2z+xye^{xz}+\cos y$

$F(0,0,0)=0$, $F_z(0,0,0)=1\neq 0$ ve birinci kısmi türevler sürekli old. kapalı fonk. teo. göre $F(x,y,z)=0$ denklemi z fonk.nu $(0,0,0)$ civarında x ve y nin bir türevlenebilir fonk. olarak tanımlar. O halde

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3x^2+yze^{xz}}{2z+xye^{xz}+\cos y}\Rightarrow\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}=-\frac{0}{1}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{e^{xz}-z\sin y}{2z+xye^{xz}+\cos y}\Rightarrow\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0,0)}=-\frac{1}{1}=-1$$

Çok değişkenli fonksiyonlarda zincir kuralı

$w = f(x, y, \dots, v)$ nin sonlu sayıda $x, y, \dots, v$ değişkenlerinin türevlenebilir fonk. olduğu ve $x, y, \dots, v$ nin de $p, q, \dots, t$ nin türevlenebilir fonk. olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \dots + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial p}$$

$$\frac{\partial w}{\partial q} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q} + \dots + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial q}$$

$\vdots$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \dots + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

XI. Hafta

YÖNLÜ TÜREVLER VE GRADİYENT VEKTÖRLER

Düzlemde Yönlü Türevler

Tanım: $P_0 = (x_0, y_0)$ noktasında $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ birim vektörü yönünde f nin türevi, limitin mevcut olması şartıyla

$$\left(D_{\vec{u}} f\right)_{P_0} = \left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

Ör $P_0 = (1, 2)$ noktasında $f(x, y) = x^2 + xy$ fonk. $\vec{u} = (1/\sqrt{2})\vec{i} + (1/\sqrt{2})\vec{j}$ birim vektörü yönündeki türevini bulunuz.

Çözüm

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0} = \lim_{s \to 0} \frac{f\left(1 + s\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + s\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 2)}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - (1^2 + 1 \cdot 2)}{s}$$

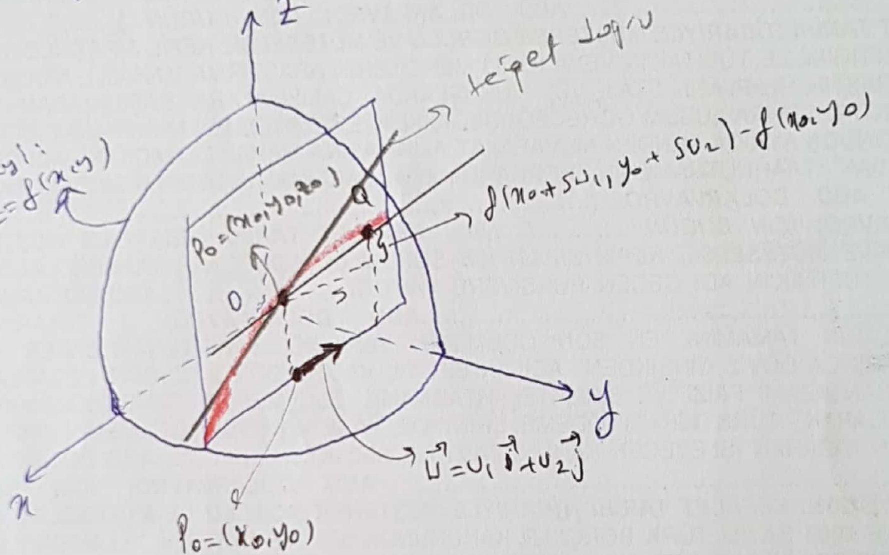
$$= \lim_{s \to 0} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + s\right) = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$(\sqrt{2})$

Yönlü Türev ve Yorumu

S yüzeyi $z = f(x,y)$ ile verilsin. C, S yüzeyini $\vec{u}$ ya paralel olan bir dikey düzlemle kestiğimizdeki arakesit eğrisi olsun.

f fonk. $P_0 = (x_0, y_0)$ noktasındaki $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ vektörü yönündeki türevi, C eğrisinin P_0 noktasından geçen doğrunun eğimine eşittir.



Tanım! $f(x,y)$ nin $P_0 = (x_0, y_0)$ noktasındaki gradyent vektörü

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

dir. Eğer $f(x,y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ noktasını içeren bir açık bölgede türevlenebilir bir fonk. ise

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0} = (\vec{\nabla} f)_{P_0} \cdot \vec{u}$$

P_0 da $\vec{\nabla} f$ ve $\vec{u}$ nun nokta çarpımıdır.

Ör) $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ nin $(2,0)$ noktasında $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ yönündeki türevini hesaplayınız.

Çözüm: $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{3}{5}\vec{i} - \dfrac{4}{5}\vec{j}$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,0)} = e^y - y\sin(xy) = e^0 - 0 = 1$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,0)} = \left. xe^y - x\sin(xy)\right|_{(2,0)} = 2.e^0 - 2.0 = 2$$

$$\left.\vec{\nabla} f\right|_{(2,0)} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\left.(D_{\vec{u}} f)\right|_{(2,0)} = \left.\vec{\nabla} f\right|_{(2,0)} \cdot \vec{u} = (\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot \left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1$$

$D_{\vec{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = |\vec{\nabla} f| \cdot \underbrace{|\vec{u}|}_{=1} \cdot \cos\theta = |\vec{\nabla} f| \cos\theta$ yönlü türevidir

Özellikleri

1- $\cos\theta = 1$ olduğu zaman veya $\theta = 0$ olduğunda f fonk. en hızlı şekilde artar ve $\vec{u}$, $\vec{\nabla} f$ nin yönündedir. Yani tanım kümesindeki her bir P noktasında f en çok P deki $\vec{\nabla} f$ gradyent vektörü yönünde artar. Bu yöndeki türev şöyledir. $D_{\vec{u}} f = |\vec{\nabla} f| \cdot \cos(0) = |\vec{\nabla} f|$

2- Benzer şekilde f fonk. en fazla $-\vec{\nabla} f$ yönünde azalır. Bu yöndeki türev $D_{\vec{u}} f = |\vec{\nabla} f| \cos(\pi) = -|\vec{\nabla} f|$ dir.

3- Bir $\vec{\nabla} f \neq \vec{0}$ gradiyentine dik olan herhangi bir $\vec{u}$ yönü f deki sıfır değişimin yönüdür. Çünkü θ değeri $\pi/2$ ye eşit olur ve $D_{\vec{u}} f = |\vec{\nabla} f| \cos(\pi/2) = |\vec{\nabla} f| \cdot 0 = 0$

Ö) $f(x,y) = x^2/2 + y^2/2$ nin aşağıdaki durumlarda yönünü bulunuz.

a) $(1,1)$ de en çok artan

b) $(1,1)$ " " " azalan

c) " " f deki sıfır değişimin yönleri nedir?

Çözüm a) fonk. $(1,1)$ de en hızlı $\vec{\nabla} f$ yönünde artar.

$\vec{\nabla} f_{(1,1)} = (x\vec{i} + y\vec{j})_{(1,1)} = \vec{i} + \vec{j}$ yönü $\vec{u} = \dfrac{\vec{i}+\vec{j}}{|\vec{i}+\vec{j}|} = \dfrac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

b) fonk. $(1,1)$ de en çok $-\vec{\nabla} f$ yönünde azalır.

$-\vec{u} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

c) $(1,1)$ de sıfır değişimin yönleri $\vec{\nabla} f$ ye dik olan yönlerdir. $\vec{n} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ ve $-\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

Seviye Eğrilerinin Teğetleri ve Gradiyentler

$f(x,y)$ türevlenebilir fonk. tanım kümesinin her (x_0,y_0) noktasında f nin gradyent vektörü (x_0,y_0) boyunca seviye eğrisine normaldir.

Bir $P_0=(x_0,y_0)$ noktasından geçen ve $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}$ vektörüne normal olan ~~olan~~ doğru $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ dır.

Eğer $\vec{N}$, $\vec{\nabla} f_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$ gradiyenti ise bu denklem teğet doğrusudur ve denklemi

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$ dır.

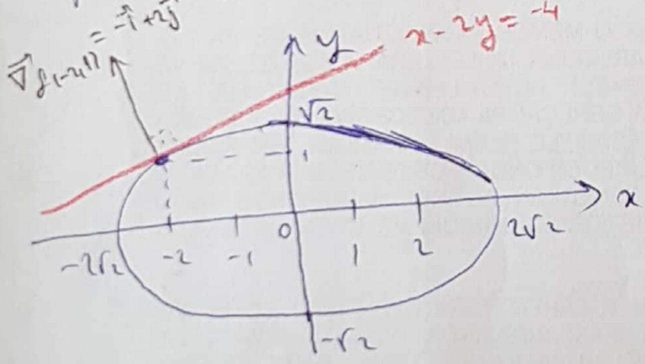
(3) Aşağıdaki elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=2$, $(-2,1)$ noktasında teğet olan doğru için bir denklem bulunuz.

Çözüm: Bu elips aşağıdaki fonk. seviye eğrisidir:

$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$. f nin $(-2,1)$ deki gradiyenti

$$\vec{\nabla} f\big|_{(-2,1)} = \left(\frac{x}{2}\vec{i}+2y\vec{j}\right)_{(-2,1)} = -\vec{i}+2\vec{j}$$

Teğet doğrusu: $(-1)(x+2)+2(y-1)=0 \Rightarrow x-2y=-4$



Gradiyentler için cebirsel kurallar:

1- $\vec{\nabla}(f\mp g)=\vec{\nabla} f\mp\vec{\nabla} g$ 2- $\vec{\nabla}(kf)=k\vec{\nabla} f$, $k\in\mathbb{R}$, 3- $\vec{\nabla}(fg)=g\vec{\nabla} f+f\vec{\nabla} g$

4- $\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\vec{\nabla} f-f\vec{\nabla} g}{g^2}$, $g\neq 0$

(3) $f(x,y)=x-y$ ve $g(x,y)=3y \Rightarrow \vec{\nabla}(f-g)=?$, $\vec{\nabla}(fg)=?$

Çözüm: $\vec{\nabla}(f-g)=\vec{\nabla}(x-4y)=\vec{i}-4\vec{j}=\underbrace{\vec{\nabla} f-\vec{\nabla} g}_{}$ $=(\vec{i}-\vec{j})-3\vec{j}$

$$\vec{\nabla}(fg)=\vec{\nabla}(3xy-3y^2)=3y\vec{i}+(3x-6y)\vec{j}$$
$$=3y(\vec{i}-\vec{j})+3y\vec{j}+(3x-6y)\vec{j}$$
$$=3y(\vec{i}-\vec{j})+(3x-3y)\vec{j}$$
$$=3y(\vec{i}-\vec{j})+(x-y)3\vec{j}=g\vec{\nabla} f+f\vec{\nabla} g$$

Üç değişkenli fonksiyonlar için yönlü türevler:

$\vec{\nabla} f$ Uzayda türevlenebilir bir $f(x,y,z)$ fonk. ve bir $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ birim vektörü için

$$\vec{\nabla} f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

ve $D_{\vec{u}} f=\vec{\nabla} f\cdot\vec{u}=\frac{\partial f}{\partial x}u_1+\frac{\partial f}{\partial y}u_2+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot u_3$

$\Rightarrow D_{\vec{u}} f=\vec{\nabla} f\cdot\vec{u}=|\vec{\nabla} f|\cdot\underbrace{|\vec{u}|}_{=1}\cdot\cos\theta=|\vec{\nabla} f|\cdot\cos\theta$

Daha önce iki değişkenli fonk. için belirtilen kurallar üç değişkenli fonk.lar için de geçerlidir. Verilmiş herhangi bir noktada f en hızlı olarak $\vec{\nabla} f$ yönünde artar ve en hızlı olarak $-\vec{\nabla} f$ yönünde azalır. $\vec{\nabla} f$ ye dik olan herhangi bir yönde türev sıfırdır.

3) a) $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ nin $P_0=(1,1,0)$ noktasında $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ yönünde türevi bulunuz.
b) f en hızlı olarak P_0 da hangi yönde değişir ve bu yöndeki değişim oranları nedir?

Çözüm: a) $|\vec{v}|=\sqrt{4+9+36}=7$, $\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{2}{7}\vec{i}-\frac{3}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}$

$f_x|_{(1,1,0)}=(3x^2-y^2)_{(1,1,0)}=2$, $f_y|_{(1,1,0)}=-2xy|_{(1,1,0)}=-2$,

$f_z|_{(1,1,0)}=-1|_{(1,1,0)}=-1$

$\Rightarrow \vec{\nabla} f_{(1,1,0)}=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

$$(D_{\vec{u}} f)_{(1,1,0)}=\vec{\nabla} f|_{(1,1,0)}\cdot\vec{u}=(2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k})\cdot\left(\frac{2}{7}\vec{i}-\frac{3}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}\right)$$

$$=\frac{4}{7}+\frac{6}{7}-\frac{6}{7}=\frac{4}{7}$$

b) Fonk. en hızlı olarak $\vec{\nabla} f=\underline{2\vec{i}-2\vec{j}-1\vec{k}}$ yönünde artar ve en hızlı olarak $\underline{-\vec{\nabla} f \text{ yönünde azalır}}$. Bu yönlerde değişim oranları sırasıyla $|\vec{\nabla} f|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$, ve $-|\vec{\nabla} f|=-3$

Teğet Düzlemler ve Normal Doğrular

Tanım: Türevlenebilir bir fonksiyonun $f(x,y,z)=c$ seviye yüzeyi üzerinde bulunan $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ noktasındaki teğet düzlemi P_0 da $\vec{\nabla} f|_{P_0}$ a normal olan düzlemdir.

$P_0=(x_0,y_0,z_0)$ daki $f(x,y,z)=c$ nin Teğet düzlemi:

$$f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)+f_z(P_0)(z-z_0)=0$$

P_0 daki yüzeyin normal doğrusu P_0 dan geçen ve $\vec{\nabla} f|_{P_0}$ a paralel olan doğrudur. Yani

~~$P_0=(x_0,y_0,z_0)$ daki $f(x,y,z)=c$ nin normal doğrusu:~~

$$x=x_0+f_x(P_0)t, \quad y=y_0+f_y(P_0)t, \quad z=z_0+f_z(P_0)t$$

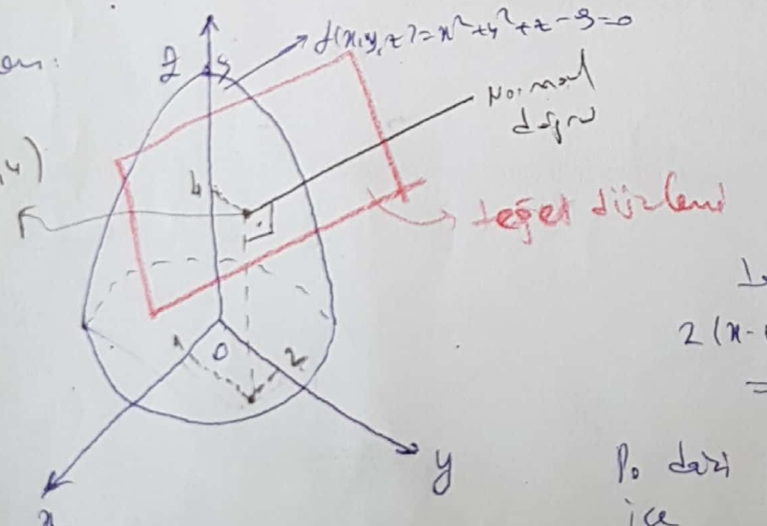
şeklindedir.

Ör) Aşağıdaki yüzeyin $P_0=(1,2,4)$ noktasında teğet düzlemi ve normal doğrusunu bul.

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0$$

Bir dairesel paraboloid

Çözüm:



$$\vec{\nabla} f|_{P_0}=\left(2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}\right)_{(1,2,4)}$$
$$=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$$

Teğet düzlemi:

$$2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0$$
$$\Rightarrow 2x+4y+z=14$$

P_0 daki yüzeye olan normal doğru ise

$$x=1+2t, \quad y=2+4t \quad z=4+t$$

$z_0=f(x_0,y_0)$ olmak üzere bir $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ noktasındaki bir $z=f(x,y)$ dönel yüzeyinin teğet düzlemini bulmak için öncelikle $z=f(x,y)$ denkleminin $f(x,y)-z=0$ ile eşdeğer olduğuna dikkat ederiz. $z=f(x,y)$ yüzeyi bu durumda $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ fonksiyonunun sıfır seviye yüzeyidir. F nin kısmi türevleri:

$$F_x=\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)-z)=f_x-0=f_x, \quad F_y=\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)-z)=f_y-0=f_y$$

$F_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(f(x,y)-z\right) = 0-1=-1$

$P_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ daki seviye yüzeyine teğet olan düzlem için ($z=f(x,y)$)

$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$

$\Rightarrow f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

(1) $(0,0,0)$ noktasında $z=x\cos y-ye^x$ yüzeyine teğet olan düzlemin denk. bulunuz

Çözüm: $f(x,y)=x\cos y-ye^x$

$f_x(0,0)=(\cos y-ye^x)_{(0,0)}=1-0.1=1$

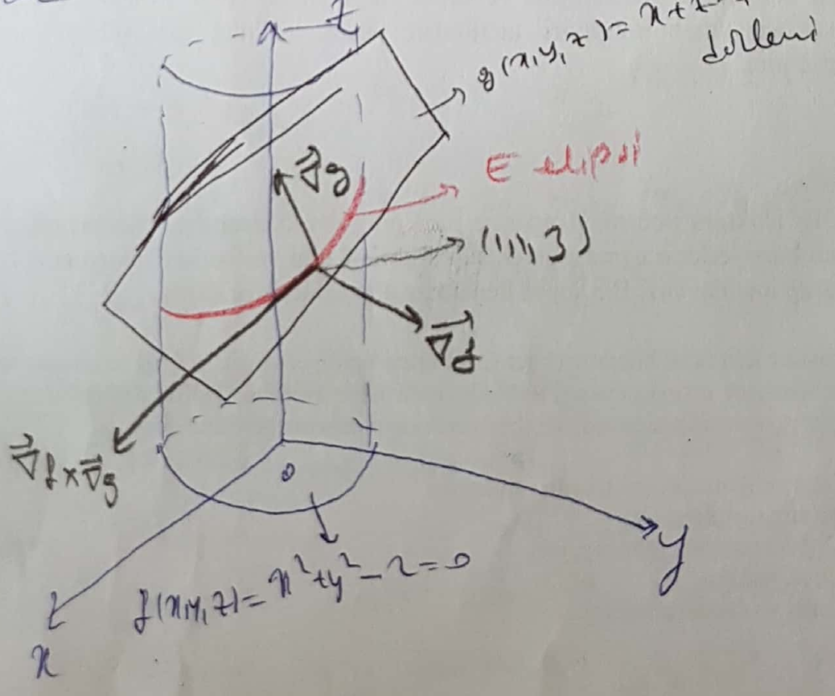
$f_y(0,0)=(-x\sin y-e^x)_{(0,0)}=0-1=-1$

$1(x-0)-1(y-0)-(z-0)=0 \rightarrow x-y-z=0$

(2) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$ bir silindir

$g(x,y,z)=x+z-4=0$ bir düzlem

yüzeyleri bir E elipsi boyunca kesişirler. $P_0=(1,1,3)$ noktasında E ye teğet olan doğru için parametrik denk. bulunuz



Çözüm: Teğet doğru P_0 da hem $\vec{\nabla} f$ ye hem de $\vec{\nabla} g$ ye diktir. bu nedenle $\vec{v} = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g$ ye paraleldir. (123)

~~$\vec{\nabla} f$ nin bileşenleri ve f~~

$$\vec{\nabla} f\big|_{(1,1,3)} = \left(2x\vec{i} + 2y\vec{j}\right)_{(1,1,3)} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{\nabla} g\big|_{(1,1,3)} = \left(\vec{i} + \vec{k}\right)_{(1,1,3)} = \vec{i} + \vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 + 2t \qquad y = 1 - 2t, \; z = 3 - 2t$$

İki değişkenli bir fonksiyonun lineerleştirilmesi:

Tanım: f türevlenebilir bir fonk. olmuş bir (x_0, y_0) noktasındaki bir $f(x,y)$ fonk. nun lineerleştirilmesi aş. fonk. dur.

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$f(x,y) \approx L(x,y)$ yaklaşımı f nin (x_0,y_0) daki standart lineer yaklaşımıdır.

(3) $(3,2)$ noktasında aşağıdaki fonk. nun lineerleştirilmesini bulunuz.

$$f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$$

Çözüm: $f(3,2) = 8$

$$f_x(3,2) = (2x - y)_{(3,2)} = 4, \qquad f_y(3,2) = (-x+y)_{(3,2)} = -1$$

$$\Rightarrow L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$= 8 + 4(x-3) + (-1)(y-2) = 4x - y - 2$$

Standart lineer yaklaşımdaki hata

Eğer merkezi (x_0,y_0) olan bir R dikdörtgenini kapsayan bir açık bölge boyunca f nin sürekli birinci ve ikinci türevleri varsa ve eğer M, R üzerinde $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ ve $|f_{xy}|$ nin değerleri için herhangi bir üst sınırsa R üzerinde $f(x,y)$ nin $L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ lineerleştirilmesiyle elde edilen $E(x,y)$ hatası $|E(x,y)| \leq \frac{1}{2}M\left(|x-x_0| + |y-y_0|\right)^2$ şeklindedir.

07) Aşağıdaki $R: |x-3| \leq 0{,}1$, $|y-2| \leq 0{,}1$ dikdörtgeni üzerinde bir ~~lineer~~ doğrusal yaklaşımda verilen $f(x,y) \approx L(x,y)$ yaklaşımındaki hata için bir üst sınır bulunuz. Bu üst sınırı dikdörtgenin merkezinde f nin değeri olan $f(3,2)$ nin yüzdesi olarak ifade ediniz.

Çözüm: $|f_{xx}| = |2| = 2$, $|f_{xy}| = |-1| = 1$, $|f_{yy}| = |1| = 1$

bunların en büyüğü 2 old. $M=2$ olarak alabiliriz

$(x_0, y_0) = (3,2)$ ile R boyunca ~~aşağıdaki ifadeyi biliyoruz~~

$$|E(x,y)| \leq \frac{1}{2}\, 2.\,(|x-3|+|y-2|)^2 = (|x-3|+|y-2|)^2$$

R üzerinde $|x-3| \leq 0{,}1$ ve $|y-2| \leq 0{,}1$ olduğu için

$$|E(x,y)| \leq (0{,}1+0{,}1)^2 = 0{,}04$$

$f(3,2) = 8$ in yüzdesi olarak hata aşağıdaki değerden büyük değildir

$$\frac{0{,}04}{8} \times 100 = 0{,}5\%$$

Diferansiyeller:

Tanım: Eğer (x_0, y_0) dan yakındaki bir $(x_0+dx,\, y_0+dy)$ noktasına hareket edersek f nin lineerleştirilmesinden elde edilen değişim $df = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$ f nin tam diferansiyeli olarak adlandırılır.

08) Silindirik bir konserve kutusunun 3cm yarıçap ve 12cm yüksekliğe sahip olacak şekilde tasarlandığını, ama yarıçap ve yüksekliğin $dr = 0{,}08$ ve $dh = -0{,}3$ miktarında değiştiğini varsayalım. Konserve kutusunun hacmindeki mutlak değişimi tespit ediniz.

Çözüm: $V = \pi r^2 h$ hacmindeki mutlak değişimi tespit etmek için $\Delta V \approx dV = V_r(r_0,h_0)\,dr + V_h(r_0,h_0)\,dh$ denklemini kurarız $V_r = 2\pi rh$ ve $V_h = \pi r^2$ kullanarak

$dV = 2\pi r_0 h_0\, dr + \pi r_0^2\, dh$

$= 2\pi(3)(12)(0{,}08) + \pi(3^2)(-0{,}3)$

$= 5{,}76\pi - 2{,}7\pi$

$= 3{,}06\pi \approx 9{,}61\ cm^3$

~~İkiden fazla değişkenli fonk.lar için lineerleştirme ve~~

diferansiyel:

1- Bir $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki $f(x,y,z)$ nin lineerleştirilmesi şöyledir.

$L(x,y,z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0)$

2- R nin, merkezi P_0 da bulunan dikdörtgen şeklinde kapalı bir katı cisim olduğunu ve bu cisimde f nin ikinci kısmi türevlerinin sürekli olduğu açık bir bölgede bulunduğunu varsayalım. Ayrıca R boyunca $|f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{zz}|, |f_{xy}|, |f_{xz}|$ ve $|f_{yz}|$ nin tümünün M ye eşit veya M den küçük olduğunu varsayalım. Bu durumda f nin L yaklaşımındaki $E(x,y,z) = f(x,y,z) - L(x,y,z)$ hatası R boyunca aşağıdaki eşitsizlik tarafından sınırlanmıştır.

$$|E| \leq \frac{1}{2} M \left(|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0|\right)^2$$

3- Eğer f nin ikinci kısmi türevleri sürekliyse ve x, y, ve z değerleri x_0, y_0 ve z_0 dan dx, dy ve dz küçük miktarları kadar değişiyorsa aşağıdaki toplam diferansiyel $df = f_x(P_0)\,dx + f_y(P_0)\,dy + f_z(P_0)\,dz$

f nin değişiminin iyi bir yaklaşımını verir.

Ör) $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (2,1,0)$ noktasında $f(x,y,z) = x^2 - xy + 3\sin z$ fonk. $L(x,y,z)$ lineerleştirilmesini bulunuz. Aşağıdaki dikdörtgen üzerinde f nin L ile değiştirilmesiyle elde edilen hata için bir üst sınır bulunuz.

$R: |x-2| \leq 0{,}01, \quad |y-1| \leq 0{,}02, \quad |z| \leq 0{,}01$

Çözüm: $f(2,1,0)=2$, $f_x(2,1,0)=3$, $f_y(2,1,0)=-2$
$f_z(2,1,0)=3$

$L(x,y,z)=2+3(x-2)-2(y-1)+3(z-0)=3x-2y+3z-2.$

$f_{xx}\big|_{P_0}=2$, $f_{yy}\big|_{P_0}=0$, $f_{zz}\big|_{P_0}=-3\sin z\big|_{P_0}=0$, $f_{xy}\big|_{P_0}=-1$, $f_{xz}\big|_{P_0}=0$,
$f_{yz}\big|_{P_0}=0$, ve

Bunların en büyüğü 2 dir. $M=2$ dir.

$|E|\leq \frac{1}{2}\cdot 2\,(0{,}01+0{,}02+0{,}01)^2=0{,}0016.$

XII. Hafta

Ekstremum Değerler ve Eyer Noktalar

Yerel ekstremum değerler için türev testleri

Tanım: $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktalarını içeren bir R bölgesinde tanımlı olsun.

1- Eğer merkezi (a,b) de olan bir açık daire içindeki tüm (x,y) tanım kümesi noktaları için $f(a,b)\geq f(x,y)$ ise $f(a,b)$ değeri f nin bir yerel maksimum değeridir.

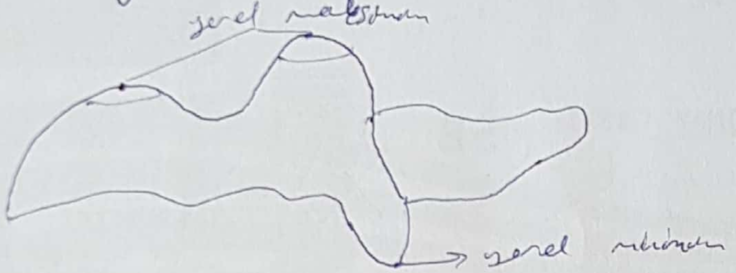
2- Eğer merkezi (a,b) de olan bir açık daire içindeki tüm (x,y) tanım kümesindeki noktaları için $f(a,b)\leq f(x,y)$ ise $f(a,b)$ değeri f nin bir yerel minimum değeridir.

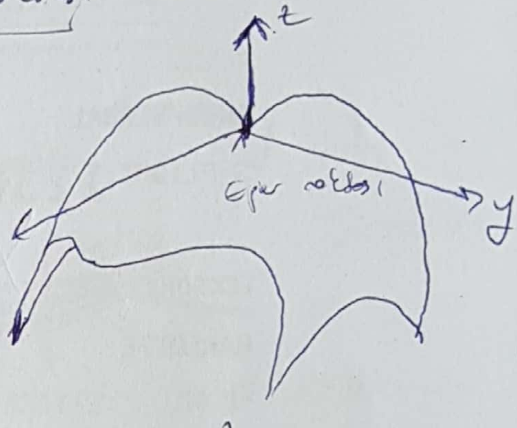
Yerel ekstremumlar aynı zamanda bağıl ekstremum olarak da isimlendirilirler. Ya da lokal ekstremumlar olarak adlandırılırlar.

Teorem (yerel ekstremum değerleri için birinci türev testi): Eğer $f(x,y)$ kendi tanım kümesinin bir (a,b) iç noktasında yerel maksimum veya yerel minimum değerine sahipse ve aynı noktada birinci kısmi türevi mevcutsa bu durumda $f_x(a,b)=0$ ve $f_y(a,b)=0$ dır.

Tanım: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun tanım kümesindeki bir iç noktası f_x ve f_y nin ikisininde de sıfır olduğu veya f_x ve f_y nin birinin ya da ikisinin mevcut olmadığı durumlarda f nin bir kritik noktasıdır

Tanım: Eğer (a,b) merkezli her açık dairede hem $f(x,y) > f(a,b)$ olacak şekilde hem de $f(x,y) < f(a,b)$ ol. şek. (x,y) tanım kümesi noktaları varsa türevlenebilir bir $f(x,y)$ fonk. bir (a,b) kritik noktasında bir eyer noktasına sahiptir. $z=f(x,y)$ yüzeyi üzerindeki $(a,b,f(a,b))$ ye karşılık gelen noktaya yüzeyin eyer noktası denir.





Ö3) $f(x,y) = x^2+y^2-4y+9$ fonk. yerel ekstremum değerlerini bulunuz.

Çözüm. $f_x = 2x = 0$ $\Rightarrow x=0$, $f_y = 2y-4=0$, $y=2$

$f(0,2)=5$ $\quad$ $f(x,y)=x^2+(y-2)^2+5 \geq 5$ hiç bir zaman 5 ten küçük olmadığı için (0,2) noktasının bir yerel min. nok. olduğu görülür.

Teorem (Yerel ekstremum değerleri için ikinci türev testi): (a,b) merkezli bir daire boyunca $f(x,y)$ ile onun birinci ve ikinci kısmi türevlerinin sürekli olduğunu ve $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

i- Eğer (a,b) noktasında $f_{xx}<0$ ve $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ ise f nin (a,b) de bir yerel maksimumu vardır.

ii- Eğer (a,b) " $f_{xx}>0$ ve $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ ise f nin (a,b) " " " minimumu vardır.

iii- Eğer (a,b) " $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$ ise f nin (a,b) de bir eyer noktası vardır.

iv- Eğer (a,b) noktasında $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$ ise testten (a,b) noktası için bir sonuca varılamaz. Bu durumda (a,b) noktasında f nin davranışı belirlemek için başka yollar bulmalıyız.

06) $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ fonk. yerel ekstremum değerlerini bulunuz

Çözüm: $f_x = y - 2x - 2 = 0$, $f_y = x - 2y - 2 = 0$ $\Big\}$ $x = y = -2$ olup $(-2,-2)$ noktası f nin bir ekstremum değeri alabileceği tek noktadır

$f_{xx} = -2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 1$

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - 1 = 4 - 1 = 3$

$f_{xx} < 0$ veya $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ~~[illegible]~~ old. f nin $(-2,-2)$ noktasında bir yerel maksimuma sahip olduğu söylenir.

$f(-2,-2) = 8$ yerel maksimum değeridir

07) $f(x,y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$ fonk.nun yerel ekstremum değerlerini bulunuz

Çözüm: $f_x = 6y - 6x = 0$, $f_y = 6y - 6y^2 + 6x = 0$

$6x - 6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 6x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $x = 2$

$\Rightarrow x = y$

O halde $(0,0)$ ve $(2,2)$ iki kritik nokta

$f_{xx} = -6$, $f_{yy} = 6 - 12y$, $f_{xy} = 6$

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = -36 + 72y - 36 = 72(y-1)$

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \big|_{(0,0)} = -72 < 0$ old. $(0,0)$ eyer noktasıdır

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \big|_{(2,2)} = 72 > 0$ ve $f_{xx} = -6 < 0$ old. $(2,2)$ bir yerel maksimum nok. dır. $f(2,2) = 8$ yerel maksimum değeridir

Kapalı sınırlı bölgelerde mutlak maksimum ve minimumlar

Bir kapalı ve sınırlı R bölgesi üzerinde $f(x,y)$ sürekli fonk.nun mutlak ekstremumlarının aranmasını üç adımda gerçekleştiririz.

1- f fonk.nun yerel maksimum ve minimumlara sahip olabileceği yerlerde R nin iç noktalarını listeleyiniz ve f nin bu noktalardaki değerlerini hesaplayınız. Bunlar f nin kritik noktalarıdır.

2- f fonk.nun yerel maksimum ve minimumlara sahip olduğu yerlerde R nin sınır noktalarını listeleyiniz ve f nin bu noktalardaki değerlerini hesaplayınız.

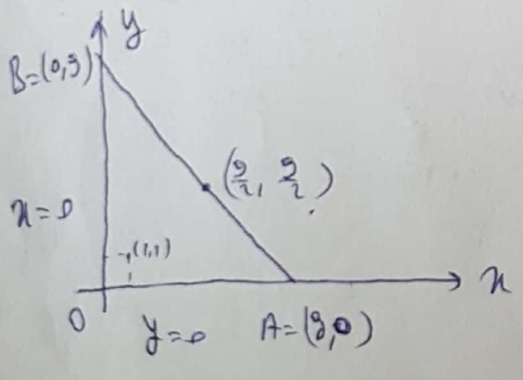
3- f fonk.nun maksimum ve minimum değerleri için bu listeleri inceleyiniz. Bunlar f nin R de mutlak maksimum ve minimum değerleri olacaktır. Mutlak maksimum ve minimumlar aynı zamanda yerel maksimum ve minimumlar olduğu için f nin mutlak maksimum ve minimum değerleri Adım 1 ve Adım 2 de oluşturulan listelerde yer alacaktır.

Ör) Birinci çeyrek düzlemde $x=0$, $y=0$, $y=9-x$ doğruları tarafından sınırlanan üçgensel bölgede

$$f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$$

fonk. mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm.



a) iç noktalar: $f_x=2-2x=0$, $f_y=2-2y=0$

$(x,y)=(1,1)$ ve $f(1,1)=4$

b) Sınır noktaları: Her seferinde üçgenin bir kenarını ele alırız.

i- OA doğru parçası üzerinde $y=0$ dır.

$f(x,y)=f(x,0)=2+2x-x^2$

fonk.nu şimdi x in $0\le x\le 9$ aralığında tanımlanmış bir fonk. olarak düşünebiliriz. Ekstremum değerler

$x=0$ için $f(0,0)=2$, $x=9$ için $f(9,0)=-61$

uç noktalarında ve $f'(x,0)=2-2x=0$ olan iç noktalarda oluşmuş olabilir. $f'(x,0)=0$ olan tek iç nokta $x=1$ dir. bu noktada f değeri $f(x,0)=f(1,0)=3$

ii- OB doğru parçası üzerinde $x=0$ dır ve fonksiyon aşağıdaki gibidir. $f(x,y)=(0,y)=2+2y-y^2$

f nin x ve y ye göre simetrisinden ve az önce yaptığımız analizden bu doğru parçası üzerindeki aday noktaların şöyle olduğunu çıkarırız.

$f(0,0)=2$, $f(0,9)=-61$, $f(0,1)=3$

iii- f nin AB doğru parçasının uç noktalarındaki değerlerini zaten hesaba katmıştık bu nedenle sadece AB nin iç noktalarına bakmamız yeterlidir. $y=9-x$ ile

$f(x,y)=2+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2=-61+18x-2x^2$

olduğunu buluruz. $f'(x,9-x)=18-4x=0 \Rightarrow x=\frac{9}{2}$

x in bu değerinde sonuç aşağıdaki gibidir.

$y=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$ ve $f(x,y)=f\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)=-\frac{41}{2}$

Buradan bütün aday noktalar listelenir: $4, 2, -61, 3, -\frac{41}{2}$.
f nin $(1,1)$ noktasındaki değeri 4 maksimum değerdir. f nin $(0,9)$ ve $(9,0)$ noktalarındaki değeri -61 ise minimum değerdir.

(07) Bir kargo firması sadece uzunluk ve çevre ölçüsü (bir kesit çevresi) toplamı 270 cm yi aşmayan dikdörtgen kutuları kabul etmektedir. Kargonun kabul edeceği en geniş kutuların boyutlarını bulunuz.

Çözüm: x, y ve z sırayla dikdörtgen kutunun uzunluk, genişlik ve yüksekliğini gösterse O halde çevre ölçüsü $2y+2z$ olur.

$x+2y+2z=270$; (kargonun kabul ettiği en büyük kutu) sağlayarak kutunun $V=xyz$ hacmini maksimize etmek istiyoruz.

$V(y,z)=(\underbrace{270-2y-2z}_{x})yz$ $\Rightarrow 270-4y-2z=0 \Rightarrow 2y+z=135$

$V_y(y,z)=-2yz+(270-2y-2z)z=0$ $\quad 270-2y-2z=2y$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow y+2z=135$

$V_z(y,z)=-2yz+(270-2y-2z)y=0$ $\quad 270-2y-2z=2z$ $\Rightarrow 270-2y-4z=0$ $\Rightarrow$

$y=45$ $z=45$

olup buradan $(0,0)$, $(0,135)$, $(135,0)$, $(45,45)$ kritik noktalarını elde ederiz. Hacim $(0,0)$, $(0,135)$, $(135,0)$ noktalarında sıfırdır. bunlar maksimum değerler değildir. $(45,45)$ noktasında ikinci türev testini uygulayalım

$$V_{yy} = -4z, \quad V_{zz} = -4y, \quad V_{yz} = 270 - 4y - 4z$$

$$V_{yy}V_{zz} - V_{yz}^2 = 16yz - 4(135 - 2y - 2z)^2$$

$$V_{yy}(45,45) = -4.45 < 0, \quad V_{yy}V_{zz} - V_{yz}^2 \Big|_{(45,45)} = 16.45.45 - 4.(-45)^2 > 0$$

Olması $(45,45)$ noktasında bir maksimum hacim değerinin varlığını gösterir. O halde $x = 270 - 2.45 - 2.45 = 90$ cm
$y = 45$ cm ve $z = 45$ cm old. $V = 90.45.45 = 182,250 \text{ cm}^3$

Maksimum – Minimum Testlerinin Özeti

$f(x,y)$ nin ekstremum değerleri sadece aşağıdaki noktalarda gerçekleşebilir.

i- f nin tanım bölgesinin sınır noktalarında

ii- kritik noktalarda ($f_x = f_y = 0$ olan iç noktalar veya f_x veya f_y nin mevcut olmadığı noktalar)

Eğer f nin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri (a,b) merkezli bir daire boyunca sürekliyse $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ ise $f(a,b)$ nin karakteri ikinci türev testi ile belirlenir:

i- (a,b) noktasında $f_{xx} < 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \Rightarrow$ yerel maksimum

ii- 〃 〃 $f_{xx} > 0$ 〃 〃 〃 minimum

iii- 〃 〃 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0 \Rightarrow$ eyer noktası

iv- 〃 〃 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \Rightarrow$ testten sonuç alınamaz

İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin (a,b) Noktasında Taylor Formülü

Merkezi (a,b) noktasında olan dikdörtgensel açık bir R bölgesinde $f(x,y)$ ve onun (n+1)-inci mertebeye kadar kısmi türevlerinin sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda R boyunca

$$f(\underbrace{a+h}_{x}, \underbrace{b+k}_{y}) = f(a,b) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{3!}(h^3 f_{xxx} + 3h^2k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy})\Big|_{(a,b)}$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(a+ch,\, b+ck)}$$

Orijindeki $f(x,y)$ için Taylor formülü

$$f(x,y) = f(0,0) + xf_x + yf_y + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy})$$

$$+ \frac{1}{3!}(x^3 f_{xxx} + 3x^2y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}) + \dots + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(cx,cy)}$$

Ör) Orijin civarında $f(x,y) = \sin x \sin y$ için kuadratik (2. dereceden) bir yaklaşım bulunuz. Eğer $|x| \le 0.1$ ve $|y| \le 0.1$ ise yaklaşım ne kadar doğrudur?

Çözüm: $f(x,y) = f(0,0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy})$

$$+ \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})_{(cx,cy)}$$

$f(0,0) = \sin x \sin y|_{(0,0)} = 0$ $\qquad f_{xx}(0,0) = -\sin x \sin y|_{(0,0)} = 0$ $\qquad$ O halde

$f_x(0,0) = \cos x \sin y|_{(0,0)} = 0$ $\qquad f_{xy}(0,0) = \cos x \cos y|_{(0,0)} = 1$ $\qquad \sin x \sin y \approx xy$

$f_y(0,0) = \sin x \cos y|_{(0,0)} = 0$ $\qquad f_{yy}(0,0) = -\sin x \sin y|_{(0,0)} = 0$

$$E(x,y) = \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})\Big|_{(cx,cy)}$$

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{6}\left((0,1)^3 + 3(0,1)^2(0.1) + 3(0.1)(0.1)^2 + (0.1)^3\right) = \frac{8}{6}(0.1)^3 \le 0.00134$$

Eğer $|x| \le 0.1$ ve $|y| \le 0.1$ ise hata 0.00134'ü geçemez.

Kısıtlanmış Değişkenlerle Kısmi Türevler

Hangi değişkenlerin bağımlı, hangilerinin bağımsız olduğuna karar verir:

(Ö1) $w = x^2 + y^2 + z^2$ ve $z = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = ?$

Çözüm:

Bağımlı	Bağımsız
w, z	x, y
w, y	x, z

I. durum: z b'lı değişken, x ve y b'sız değişken

$w = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x^2+y^2)^2 = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2$

II. durum: x ve z b'sız değişken y b'lı değişken

$w = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (z - x^2) + z^2 = z + z^2 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 0$

$w = f(x,y,z)$ deki değişkenler başka bir denklem tarafından kısıtlandığında $\partial w / \partial x$ nasıl bulunur?

(Ö2) Aşağıdaki denklemlerde x ve y b'sız değişkenler olmuşsa

$w = x^2 + y^2 + z^2$, $z^3 - xy + yz + y^3 = 1$

$(x,y,z) = (2,-1,1)$ noktasında $\frac{\partial w}{\partial x} = ?$

Çözüm:

$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}$

$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y + y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y + 3z^2}$

$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z \frac{y}{y + 3z^2}$

$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{(2,-1,1)} = 2.2 + \frac{2.(-1).1}{-1 + 3.1^2} = 4 - \frac{2}{2} = 3$

Notasyon

$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ x ve y bağımsız olmuşsa $\frac{\partial w}{\partial x}$

$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t}$ y, x ve t bağımsız olmuşsa $\frac{\partial w}{\partial y}$

ÖR $w = x^2 + y - z + \sin t$ ve $x + y = t \Rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = ?$

Çözüm: x, y, z b'sız değişken olarak olduğundan

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = 2x + 0 - 0 + \cos(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)$$

$$= 2x + \cos(x+y)$$

ÖR $w = u^2 + v - s + \sin t$, $u = x$, $v = y$, $s = z$ ve $t = x + y$

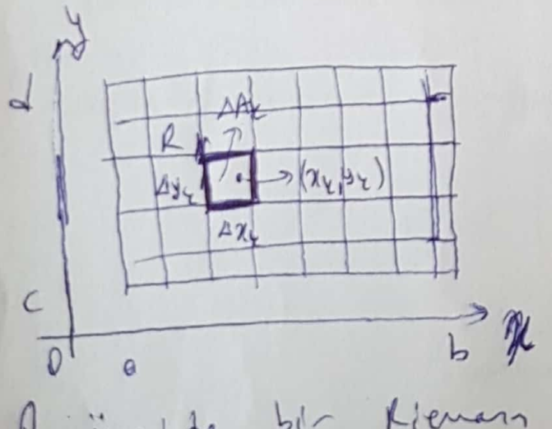
olmak üzere $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = ?$

Çözüm: $$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= 2\overset{\nearrow x}{u} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + \cos \underset{\searrow x+y}{t} \cdot 1$$

$$= 2x + \cos(x+y)$$

İKİ KATLI İNTEGRALLER



$R: a \le x \le b$, $c \le y \le d$

n-tane dikdörtgensel ~~bölge~~ parçaya bölelim.

Herbir parçanın alanı $\Delta A = \Delta x \Delta y$

~~bu~~ k-ıncı küçük dikdörtgenin alanı ΔA_k

diğer alanlar $\Delta A_1, \dots, \Delta A_n$

R üzerinde bir Riemann toplamı oluşturmak için k-ıncı küçük dikdörtgen içinde bir (x_k, y_k) noktası seçelim. ΔA_k alanı ile f fonk. bu seçilen noktadaki değerini çarpar bütün bu çarpımları toplarız:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

TNM P bölüntünün normu $\|P\|$ olmak üzere

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA \quad \text{veya} \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

Hacim olarak iki katlı integraller

$$\text{Hacim} = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(x,y)\,dA$$

XIV. Hafta

İki katlı integrallerin hesaplanmasında Fubini Teoremi

Teorem (Fubini Teoremi) (Birinci şekli) Eğer $f(x,y)$
$R: a \le x \le b, \quad c \le y \le d$ dikdörtgensel bölgesinde sürekli ise

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

(Ör) $f(x,y) = 100 - 6x^2y$ ve $R: 0 \le x \le 2, \ -1 \le y \le 1$ olmak üzere $\iint_R f(x,y)\,dA = ?$

Çözüm: $\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1} \int_0^2 (100 - 6x^2y)\,dx\,dy$

$$= \int_{-1}^{1} \Big[100x - 2x^3y\Big]_{x=0}^{2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (200 - 16y)\,dy = 200y - 8y^2 \Big|_{y=-1}^{1} = 400$$

veya

$$\int_0^2 \int_{-1}^{1} (100 - 6x^2y)\,dy\,dx = \int_0^2 \Big[100y - 3x^2y^2\Big]_{y=-1}^{1} dx = \int_0^2 200\,dx = 200x \Big|_0^2 = 400$$

(Ör) Üstten $z = 10 + x^2 + 3y^2$ eliptik paraboloidi ve alttan $R: 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2$ dikdörtgeni ile sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

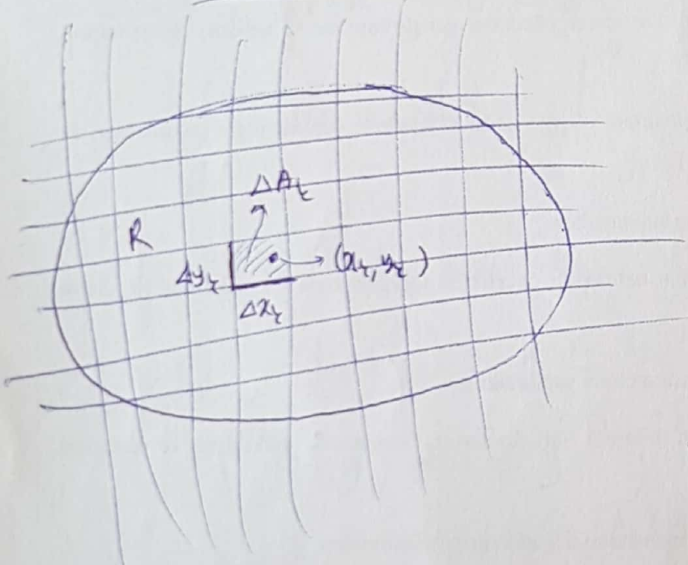
$$V = \iint_R (10+x^2+3y^2)\,dA = \int_0^1\int_0^2 (10+x^2+3y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \Big[10y + x^2y + y^3\Big]_{y=0}^{2} dx$$

$$= \int_0^1 (20+2x^2+8)\,dx = 20x + \frac{2x^3}{3} + 8x\Big|_0^1 = \frac{86}{3}\ br^3$$

Genel Bölgeler Üzerinde İki Katlı İntegraller

Dikdörtgen olmayan sınırlı bölgeler üzerinde iki katlı integraller:



R nin bölüntüsünü oluşturduktan sonra dikdörtgenleri bir düzen içinde 1 den n ye kadar numaralandırılır. ΔA_k yı k-ncı dikdörtgenin alanı olarak alırız. Sonra k-ncı dikdörtgen içinde bir (x_k, y_k) noktasını seçer ve Riemann toplamını oluştururuz.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k \quad \text{olup} \quad \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R f(x,y)\,dA$$

Hacimler

R, xy-düzleminde üstten ve alttan $y=g_2(x)$ ve $y=g_1(x)$ eğrileri ve kenarlardan $x=a$, $x=b$ doğruları ile sınırlanan bir bölge ise önce kesit alanını hesaplarız:

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

$$\rightarrow V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Benzer şekilde eğer R $x=h_2(y)$ ve $x=h_1(y)$ eğriler ve $y=c$ ve $y=d$ doğruları ile sınırlanan bir bölge ise

$$V=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Teorem (Fubini Teoremi) (Daha kapsamlı şekli): $f(x,y)$ bir R bölgesi üzerinde sürekli olsun.

1- Eğer R, g_1 ve g_2 $[a,b]$ de sürekli olmak üzere $a\le x\le b$, $g_1(x)\le y\le g_2(x)$ ile tanımlı ise

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

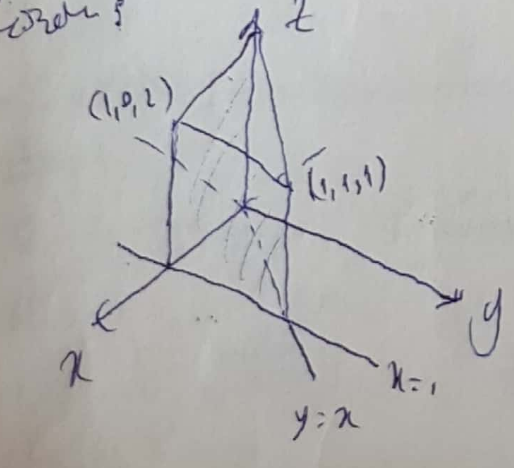
2- Eğer R, h_1 ve h_2, $[c,d]$ de sürekli olmak üzere $c\le y\le d$, $h_1(y)\le x\le h_2(y)$ ile tanımlı ise

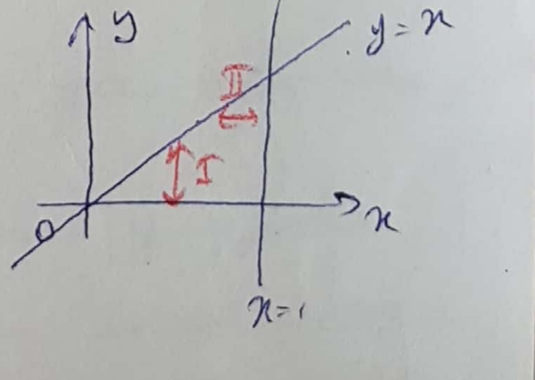
$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Ö2) Üçgen tabanı xy-düzleminde olan ve x-ekseni $y=x$ ve $x=1$ doğruları ile sınırlanan tepesi aşağıdaki düzlemde bulunan prizmanın hacmini bulunuz.

$$z=f(x,y)=3-x-y$$

Çözüm:





I. durum

$$V=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}(3-x-y)\,dy\,dx=\int_0^1\left[3y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx$$

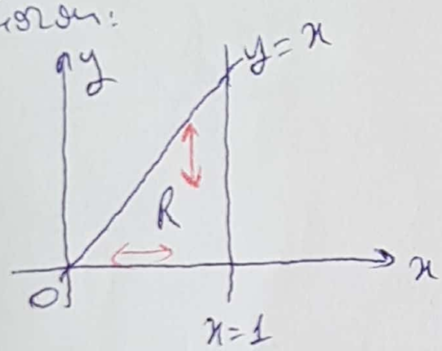
$$=\int_0^1 3x-\frac{3x^2}{2}\,dx=\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{2}\Big|_0^1=1\ br^3$$

$$V=\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1}(3-x-y)\,dx\,dy=\int_0^1\left[3x-\frac{x^2}{2}-xy\right]_{x=y}^{x=1}dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{5}{2}-4y+\frac{3}{2}y^2\right)dy=\frac{5}{2}y-2y^2+\frac{y^3}{2}\Big|_0^1=1\ br^3$$

07) $\iint_R \frac{\sin x}{x}\,dA=?$ R, xy-düzleminde x-ekseni $y=x$ ve $x=1$ doğruları ile sınırlanan bir bölgedir.

Çözüm:



$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}\frac{\sin x}{x}\,dy\,dx=\int_{x=0}^{1}y\,\frac{\sin x}{x}\Big|_{y=0}^{x}dx$$

$$=\int_0^1 \cancel{x}\,\frac{\sin x}{\cancel{x}}\,dx$$

$$=-\cos x\Big|_0^1$$

$$=-\cos 1+1$$

$$\cong 0{,}46$$

ya da

$$\int_0^1\int_y^1\frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$$

İntegrasyonun sınırlarını ~~[illegible]~~ bulmak

Dik kesitleri kullanmak: $\iint_R f(x,y)\,dA$ integralini hesaplamak durumunda kaldığımızda önce y ye sonra da x e göre integral alırken aşağıdaki üç adım tarif edilir.

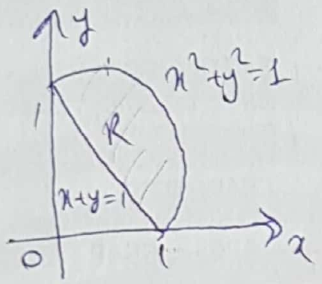
1- ~~Şekil çizin~~. İntegrasyon bölgesini çizin ve sınırlayan eğrileri belirtin. (Şekil a)

~~2- İntegrasyonun x sınırlarını bulun. R den geçen dikey doğru~~

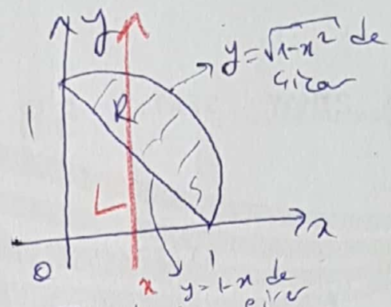
2- İntegrasyonun y-sınırlarını ~~[illegible]~~ bulun. Alttan y yönünde R den geçip giden dikey bir L doğrusunu düşünün. L nin başladığı ~~[illegible]~~ ve bittiği ~~[illegible]~~ yerlerde y-değerlerini belirleyin. Bunlar integrasyonun y-sınırlarıdır ~~[illegible]~~ ve genellikle (sabitler yerine) x in fonksiyonlarıdır. (Şekil b)

3- İntegrasyonun x-sınırlarını bulun. R den geçen tüm dikey doğruları içeren x-sınırlarını seçin. Şekil c'deki integral aşağıdaki gibidir.

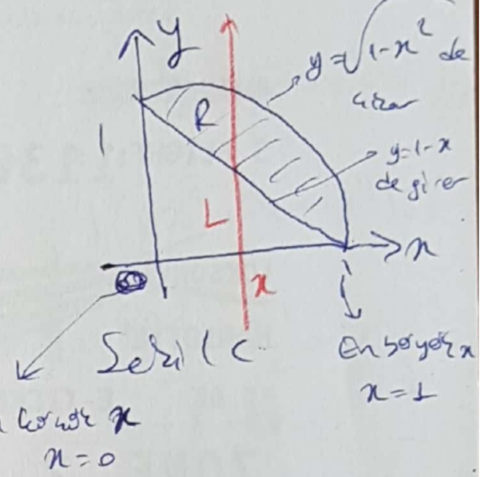
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$



Şekil a



Şekil b

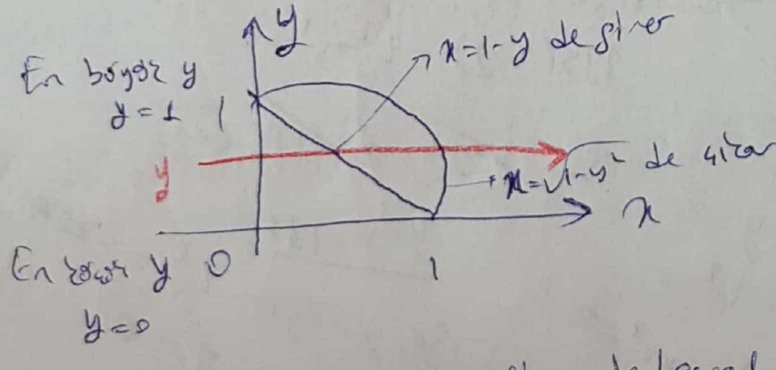


Şekil c

- Önce y ye göre sonra x e göre integral alırken integrasyon sınırlarının bulunması -

Yatay Kesitleri Kullanmak: İntegrasyonun sırasını değiştirerek yukarıdaki ardışık bir integral olarak hesaplamak için Adım 2 ve Adım 3 de dikey doğruların yerine yatay doğrular kullanın. Bu durumda integral;

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=1-y}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

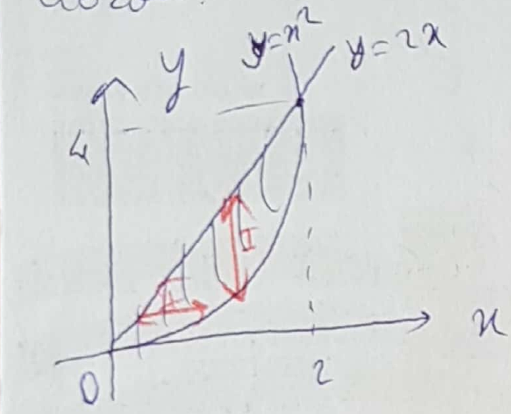


- Önce x e ve sonra y ye göre integral alırken integrasyon sınırlarının bulunması -

9) Aşağıdaki integral için integrasyon bölgesini çizin ve integrasyon sırası değiştirilmiş integral olarak yeniden yazın

$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(4x+2)\,dy\,dx$$

Çözüm.



$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(4x+2)\,dy\,dx=\int_0^2 4xy+2y\Big|_{y=x^2}^{2x}dx$$

$$=\int_0^2\left(8x^2+4x-4x^3-2x^2\right)dx$$

$$=\int_0^2\left(6x^2+4x-4x^3\right)dx$$

$$=\left(6\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}-x^4\right)\Big|_0^2$$

$$=16+8-16=8$$

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}}(4x+2)\,dx\,dy=\int_0^4 2x^2+2x\Big|_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}}dy$$

$$=\int_0^4\left(2y+2\sqrt{y}-\frac{y^2}{2}-y\right)dy=\frac{y^2}{2}+2\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{y^3}{6}\Big|_0^4$$

$$=8$$

İki katlı integrallerin özellikleri:

Eğer $f(x,y)$ ve $g(x,y)$ sınırlı R bölgesi üzerinde sürekli ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

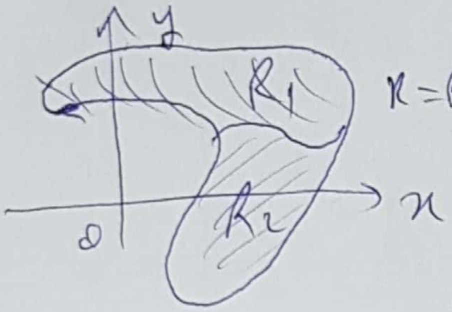
1- $\iint_R c\,f(x,y)\,dA=c\iint_R f(x,y)\,dA$, $c\in\mathbb{R}$

2- $\iint_R\left[f(x,y)\mp g(x,y)\right]dA=\iint_R f(x,y)\,dA\mp\iint_R g(x,y)\,dA$

3- a) R de $f(x,y)\geq 0$ ise $\iint_R f(x,y)\,dA\geq 0$

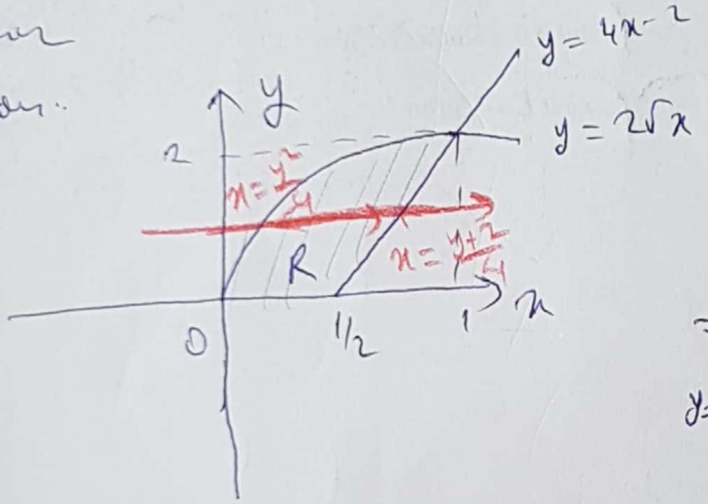
b) R de $f(x,y)\geq g(x,y)$ ise $\iint_R f(x,y)\,dA\geq\iint_R g(x,y)\,dA$

4- $\iint_R f(x,y)\,dA=\iint_{R_1} f(x,y)\,dA+\iint_{R_2} f(x,y)\,dA$, $R=R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2=\emptyset$



$R = R_1 \cup R_2$

8) $z = 16 - x^2 - y^2$ yüzeyinin altında ve $y = 2\sqrt{x}$ eğrisi $y = 4x - 2$ doğrusu x-ekseni ile sınırlanan R bölgesi üzerinde bulunan ~~katı~~ cismin hacmini bulunuz.



$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=\frac{y^2}{4}}^{x=\frac{(y+2)}{4}} (16 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} \left(16x - \frac{x^3}{3} - xy^2\right)\Bigg|_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+2}{4}} dy$$

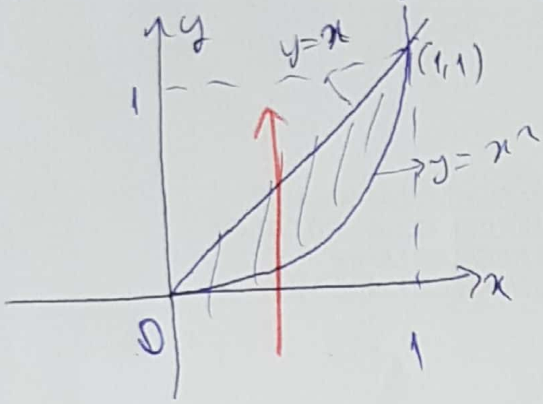
$$= \int_0^2 \left[4(y+2) - \frac{(y+2)^3}{3\times 64} - \frac{(y+2)y^2}{4} - 4y^2 + \frac{y^6}{3\times 64} + \frac{y^4}{4}\right] dy$$

$$= \left(\frac{191y}{24} + \frac{63y^2}{32} - \frac{145y^3}{96} - \frac{49y^4}{768} + \frac{y^5}{20} + \frac{y^7}{1344}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{20803}{1680} \approx 12.4$$

İki Katlı İntegral ile Alan Hesabı

Tanım: Kapalı ve sınırlı bir R düzlem bölgesinin alanı $A = \iint_R dA$ dır.

52) Birinci ~~[illegible]~~ bölgede $y = x$ ve $y = x^2$ ile sınırlanan R bölgesinin alanını bulunuz.



$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=x} dy\,dx$$

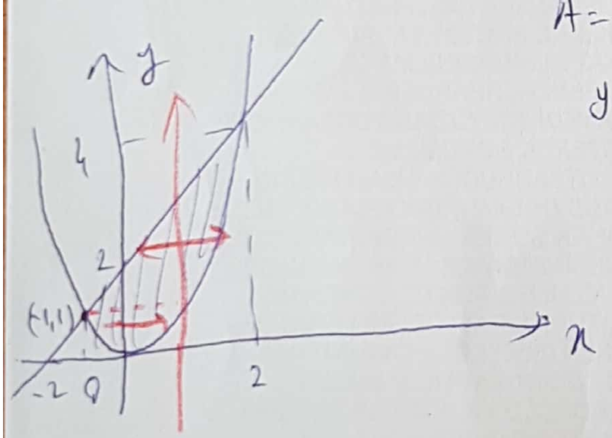
$$= \int_0^1 y \Big|_{y=x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1/6 \text{ br}^2$$

Ör) $y = x^2$ parabolü ve $y = x+2$ doğrusu ile çevrelenen R bölgesinin alanını bulun

Çözüm:



$$A = \int_{y=0}^{1}\int_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_{y=1}^{4}\int_{x=y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy$$

veya

$$A = \int_{x=-1}^{2}\int_{y=x^2}^{x+2} dy\,dx = \int_{x=-1}^{2} y \Big|_{y=x^2}^{x+2} dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)\, dx$$

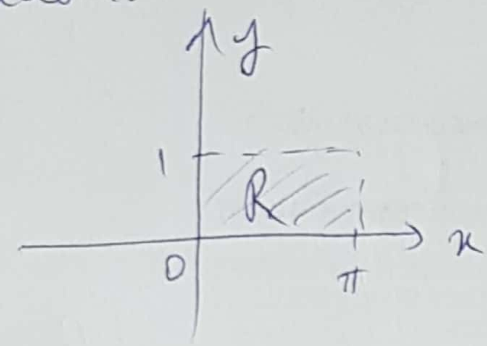
$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2} \text{ br}^2$$

Ortalama Değer

R üzerinde f nin ortalama değeri $= \dfrac{1}{R \text{ nin alanı}} \displaystyle\iint_R f\, dA$

Ör) $f(x,y) = x\cos xy$ nin $R: 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1$ dikdörtgeni üzerinde ortalama değerini bulun

Çözüm: f nin R üzerindeki integrali



$$\int_{x=0}^{\pi}\int_{y=0}^{1} x\cos(xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(xy)\Big|_{y=0}^{1}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2$$

R nin alanı π old. f nin R üzerindeki ortalama değeri $2/\pi$ dir.

XV. Hafta

Kutupsal Formda İki Katlı İntegraller

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

İntegrasyon sınırlarını bulmak

Dikdörtgensel koordinatlarda integrasyon sınırlarını bulmak işlemi kutupsal koordinatlar için de geçerlidir. Kutupsal koordinatlarda bir R bölgesi üzerinde $\iint_R f(x,y)\,dA$ yı hesaplamak için önce r ye sonra da θ ya göre integral almak aşağıdaki adımlar takip edilir.

1- Şekil çizin: Bölgeyi çizin ve çevreleyen eğrileri belirleyin.

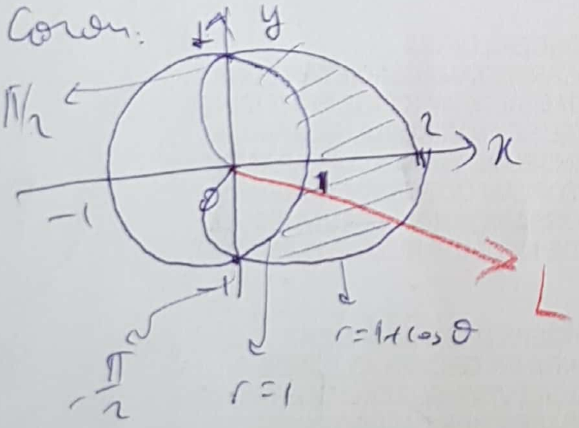
2- İntegrasyonun r-sınırlarını bulun: Artan r yönünde orijinden çıkan ve R yi kesen bir L ışınını düşünün. L nin R ye girdiği ve çıktığı yerlerdeki r değerlerini işaretleyin. Bunlar integrasyonun r sınırlarıdır ve genellikle L nin pozitif x-ekseni ile yaptığı θ açısına bağlıdır.

3- İntegrasyon θ ~~sınırlarını~~ sınırlarını bulun: R yi sınırlayan en küçük ve en büyük θ değerlerini bulun. Bunlar integrasyon θ ~~sınırlarıdır~~ sınırlarıdır. ~~Kutupsal ardışık integral aşağıdaki gibidir.~~

07) $r=1+\cos\theta$ kardioidinin içinde ve $r=1$ çemberinin dışında kalan R bölgesi üzerinde $f(r,\theta)$ nın integralini almak için integrasyon ~~sınır~~ sınırlarını bulunuz. ~~ve integrali alarak çözünüz~~

$$\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\int_{r=1}^{r=1+\cos\theta} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Çözüm:



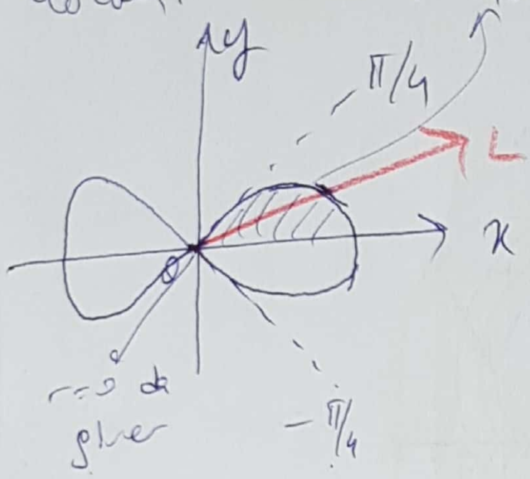
Kutupsal koordinatlarda alan

Kutupsal koordinat düzlemindeki kapalı ve sınırlı bir R bölgesinin alanı aşağıdaki gibidir.

$$A=\iint_R r\,dr\,d\theta$$

07) $r^2=4\cos 2\theta$ lemniskatı ile sınırlanan bölgenin alanı bulunuz

Çözüm:



$$A = 4\int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow A = 4\int_{0}^{\pi/4} \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{\sqrt{4\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= 4\int_{0}^{\pi/4} 2\cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{8}{2}\sin 2\theta\Big|_{0}^{\pi/4} = 4\left(\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \sin 0\right)$$

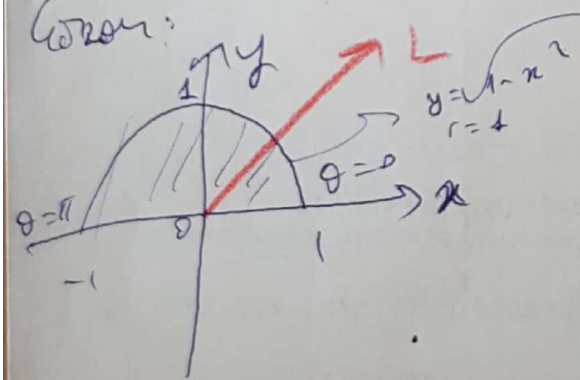
$$= 4\,br^2$$

Kartezyen integralleri kutupsal integrallere dönüştürme

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

Ö) R: x-ekseni ve $y=\sqrt{1-x^2}$ eğrisi ile sınırlanan yarı dairesel bölge olsun. $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dy\,dx = ?$

Çözüm:



$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(e-1)\,d\theta$$

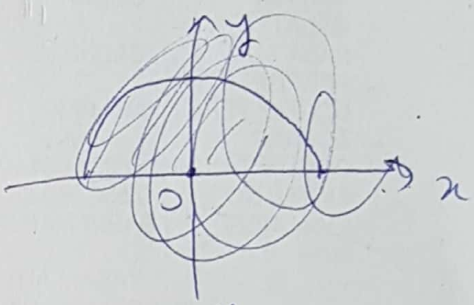
$$= \frac{\pi}{2}(e-1)$$

9) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx = ?$

Çözüm: $\int_0^1 \left(x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\right)dx$ integralini

almak zordur. Bu nedenle kutupsal koordinatları

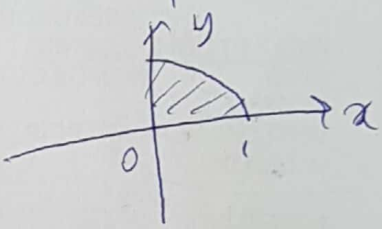
kullanalım.



$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} r^2 r\,dr\,d\theta$$

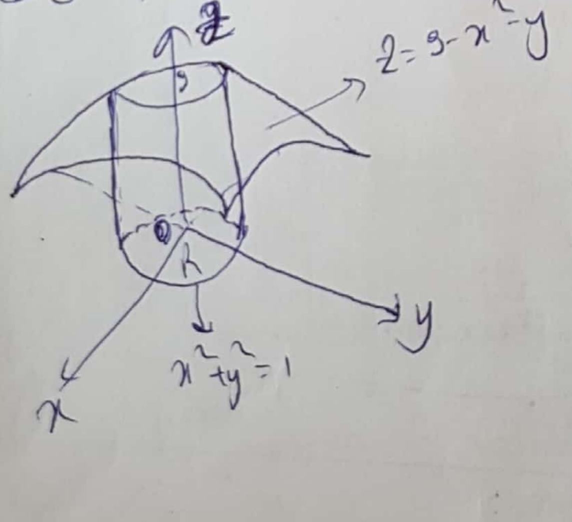
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{4} = \frac{1}{4}\theta\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$



9) Üstten $z=9-x^2-y^2$ paraboloidi ve alttan xy-düzlemindeki birim çemberle sınırlanan katı cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm;



$$\iint_R (9-x^2-y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (9-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (9r-r^3)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta$$

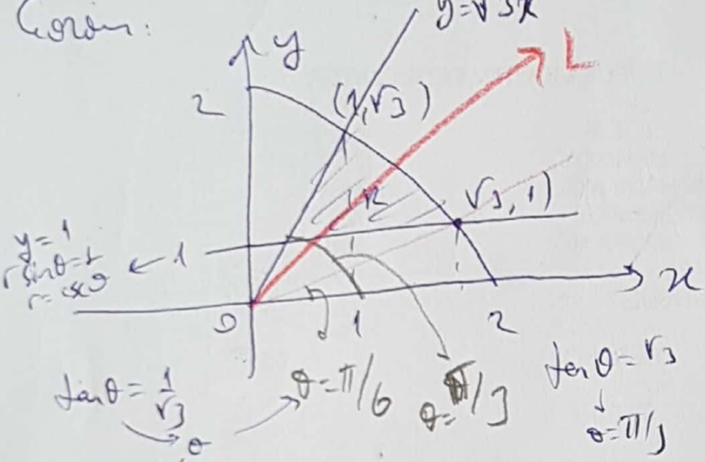
$$= \frac{17}{4}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{17\pi}{2}\ br^3$$

147

03 Kutupsal integrasyon kullanarak xy düzlemindeki R bölgesinin y=1 doğrusunun üzerinde $y=\sqrt{3}x$ doğrusunun altında kalan ve $x^2+y^2=4$ çemberi ile sınırlanan alanı bulunuz.

Çözüm:



$$\iint_R dA = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\theta}^{2} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{r^2}{2}\Big|_{\csc\theta}^{2} d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(2-\frac{\csc^2\theta}{2}\right)d\theta = 2\theta+\frac{\cot\theta}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}\text{ br}^2$$

İki katlı integrallerde değişken dönüşümü

$x=g(u,v)$ ve $y=h(u,v)$ koordinat dönüşümünün Jakobiyen determinantı veya Jacobiyeni;

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\iint_G f(g(u,v),h(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

03 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ kutupsal koordinat dönüşümü için Jakobiyeni bulunuz ve $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ kartezyen integralini bir kutupsal integral olarak ~~yazınız yörünge dik dön. kullanarak~~ yazınız

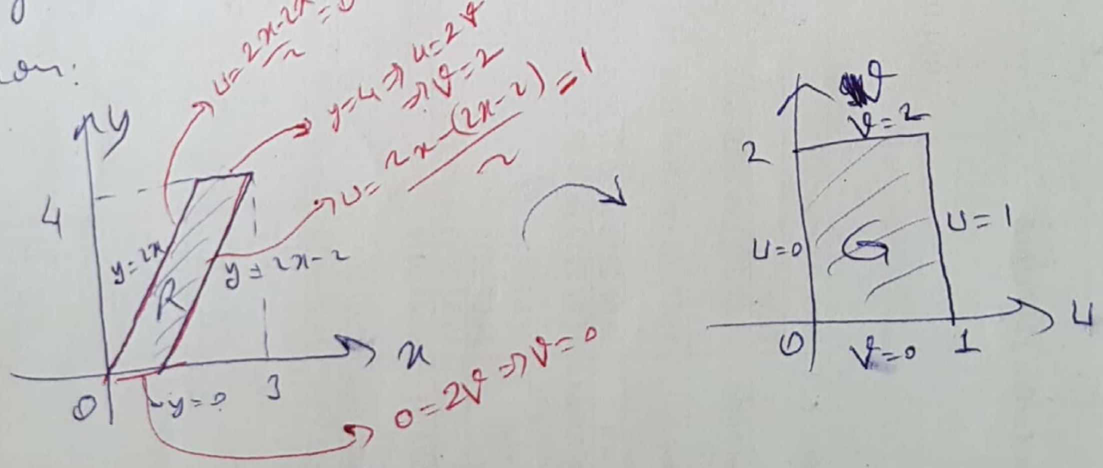
Çözüm: $J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$

$= r(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}) = r$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

07) $\displaystyle\int_0^4 \int_{x=y/2}^{y/2+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$ integralini $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$ dönüşümünü uygulayarak ve uv-düzleminde uygun bir bölge üzerinde integrali alarak hesap.

Çözüm:



$x = y/2 \Rightarrow u = \frac{2\left(\frac{y}{2}\right) - y}{2} = 0$

$x = \frac{y}{2}+1 \Rightarrow u = \frac{2\left(\frac{y}{2}+1\right) - y}{2} = \frac{y+2-y}{2} = 1$

$y = 0 \Rightarrow v = \frac{y}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$y = 4 \Rightarrow v = \frac{y}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$$u = \frac{2x-y}{2}, \quad v = \frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = u+v \\ y = 2v \end{cases}$$

$$|J(u,v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

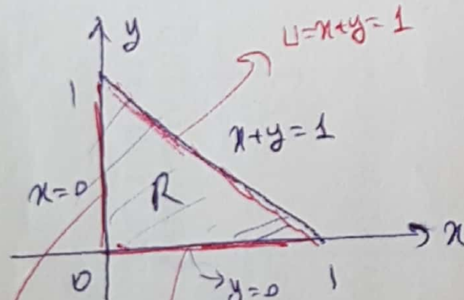
$$\int_0^4 \int_{y/2}^{y/2+1} \frac{2x-y}{2} \, dx\, dy = \int_{v=0}^{2} \int_{u=0}^{1} u \cdot 2 \, du\, dv = \int_0^2 u^2 \Big|_0^1 dv$$

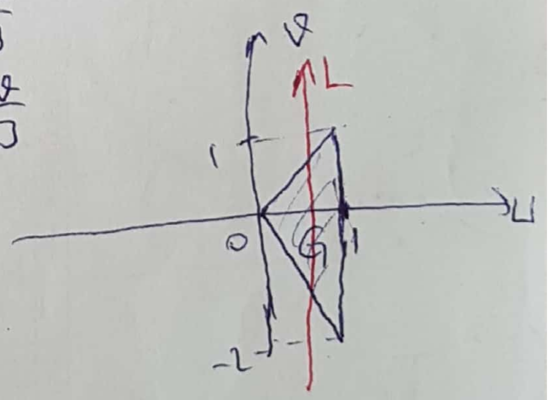
$$= \int_0^2 dv = v \Big|_0^2 = 2$$

(03) $$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2 \, dy\, dx = ?$$

Çözüm: $\begin{cases} u = x+y \\ v = y-2x \end{cases}$ bölge (değişken) dönüşümünü uygulayalım.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3} \\ y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3} \end{cases}$$





$0 = \frac{u}{3} - \frac{v}{3} \Rightarrow v = u$

$0 = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3} \Rightarrow v = -2u$

$$|J(u,v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2 \, dy\, dx = \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-2u}^{v=u} u^{1/2} v^2 \cdot \overbrace{\frac{1}{3}}^{|J(u,v)|} \, dv\, du =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 u^{1/2}\,\frac{v^3}{3}\Big|_{v=-2u}^{v=u} du = \frac{1}{9}\int_0^1 u^{1/2}(u^3+8u^3)\,du =$$

(150)

$$= \int_0^1 u^{7/2}\,du = \frac{u^{7/2+1}}{\frac{7}{2}+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}$$

9) $\displaystyle\int_1^2\int_{1/y}^{y} \sqrt{\frac{y}{x}}\, e^{\sqrt{xy}}\, dx\, dy = ?$

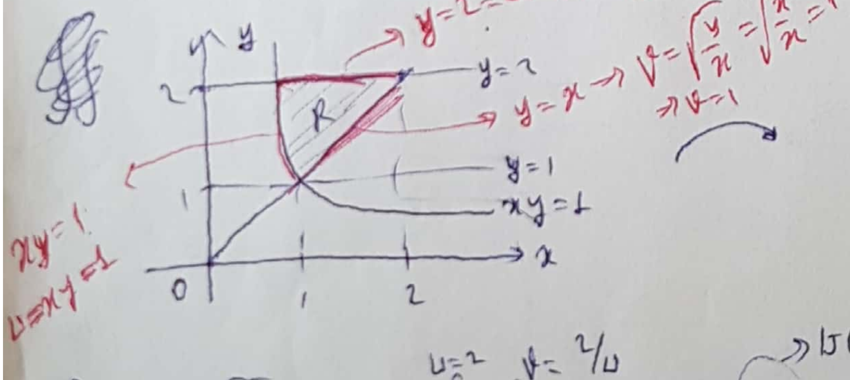
Çözüm: $u=\sqrt{xy}$ ve $v=\sqrt{y/x}$ değişken dönüşümünü uygulayalım

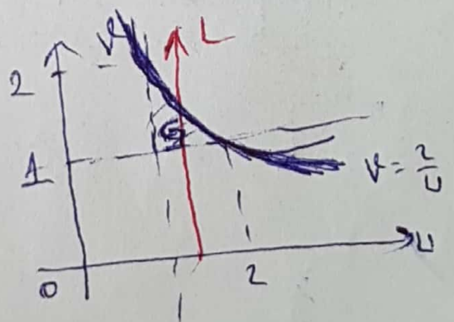
$\Rightarrow u^2 = xy$ ve $v^2 = \frac{y}{x} \Rightarrow u^2v^2 = xy\frac{y}{x} = y^2 \Rightarrow y = uv$

$\Rightarrow \frac{u^2}{v^2} = \frac{xy}{\frac{y}{x}} = x^2 \Rightarrow x = \frac{u}{v}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ y = uv \end{cases}$$

$$|J(u,v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{u}{v} + \frac{u}{v} = \frac{2u}{v}$$





$$\iint_R \sqrt{\frac{y}{x}}\, e^{\sqrt{xy}}\, dx\,dy = \int_{u=1}^{u=2}\int_{v=1}^{v=2/u} \cancel{v}\cdot e^u \cdot \underbrace{\frac{2u}{\cancel{v}}}_{|J(u,v)|}\, dv\,du = 2\int_{u=1}^{u=2} ue^u\, v\Big|_{v=1}^{v=\frac{2}{u}} du$$

$$= 2\int_1^2 (2e^u - ue^u)\,du = 2\int_1^2 \underbrace{(2-u)e^u}_{\text{kısmi integrasyon}}\,du = 2\left[(2-u)e^u + e^u\right]\Big|_1^2 = 2(e^2-(e+e))$$

$$= 2e(e-2)$$

$\Big($ $2-u=u_1$, $-du=du_1$, $e^u du = dv_1 \Rightarrow e^u = v_1$

$\int(2-u)e^u du = u_1v_1 - \int v_1 du_1 = (2-u)e^u + \int e^u du = (2-u)e^u + e^u$ $\Big)$