

İSTATİSTİK

2019-2020 Güz Yarıyılı

Öğretim Üyesi: Mehmet Öztürk

Ofis: Hidrolik ve Kıyı-Liman Laboratuvarı, No: 1

Değerlendirme Sistemi

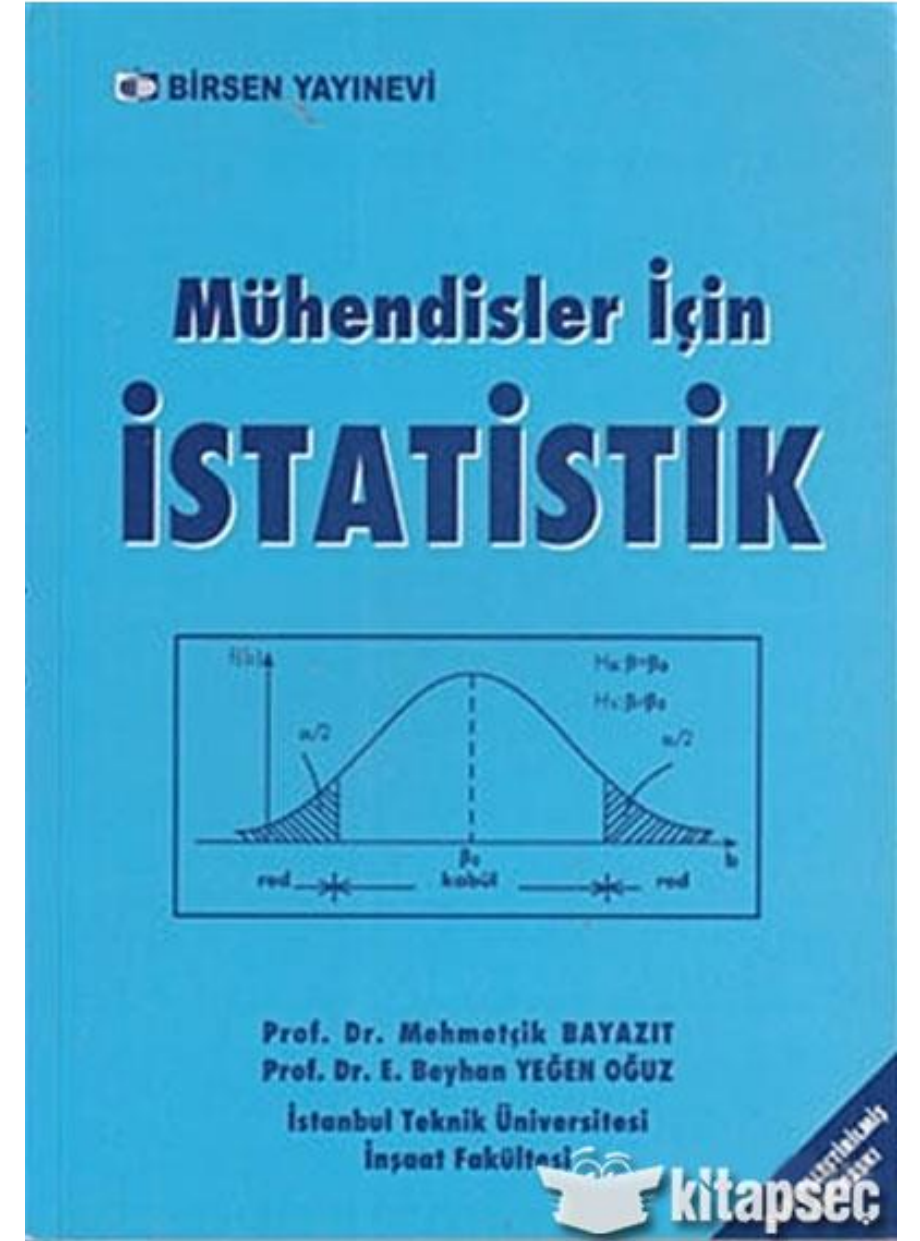
Etkinlikler	Sayı	Katkı Payı
Ödev (opsiyonel)	2	10
Ara Sınavlar	1	50
Final	1	40
Dönem İçi Çalışmaların Başarı Notuna Katkısı		60
Final Sınavının Başarı Notuna Katkısı		40
TOPLAM		100

Derse Devam Zorunluluđu

% 70

Kaynaklar

- İstatistik Ders notları (Prof. Dr. M. Emin Birpınar, Ayhan Gazioğlu)
- Mühendisler İçin İstatistik (Prof. Dr. Mehmetçik Bayazıt , Prof.Dr. Beyhan Yeğen Oğuz), Birsen Yayınevi



Dersin amacı: Mühendislik uygulamalarında verilerin toplanması, işlenmesi, analiz edilmesi ve geleceğe ait tahminlerin yapılabilmesinin sağlanması

İçerik:

- Temel Kavramlar ve Tanımlar
- Olasılık ve Dağılımları
- Frekans Analizi ve Parametrelerin Tahmini
- Olasılık Dağılım Fonksiyonları
- Örneklem Dağılımları
- İstatistik Hipotezlerin Kontrolü
- Varyans Analizi
- Regresyon Analizi

Haftalık Konular

Konular

- 1 İstatistikte kullanılan temel terimlerin verilmesi, seriler hakkında açıklamalar
- 2 Serilerle ilgili ortalama çeşitleri hakkında bilgiler ve uygulamalar
- 3 Ortalamalar arasındaki ilişkiler, dağılma ve frekans bölünmesinin şekli konuları
- 4 Mutlak dağılma ölçüleri hakkında bilgilerin verilmesi
- 5 Oransal dağılma ölçüleri, çarpıklık ve basıklık ölçüleri konularının işlenmesi ve uygulamaları
- 6 Serilerde momentlerin tanımı ve momentler yardımıyla çarpıklık ve basıklık hesaplama yöntemi
- 7 Olasılık teoremleri ve kombinezon hakkında genel bilgiler ve dağılım çeşitlerinin verilmesi

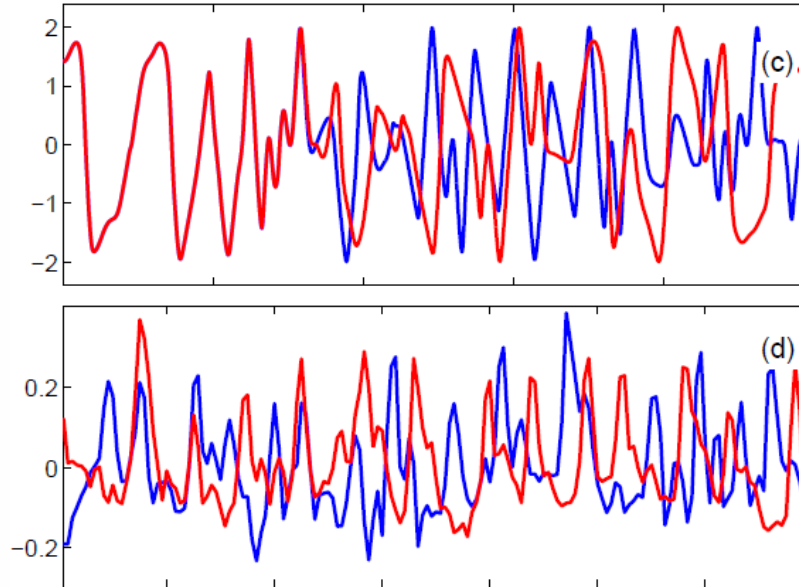
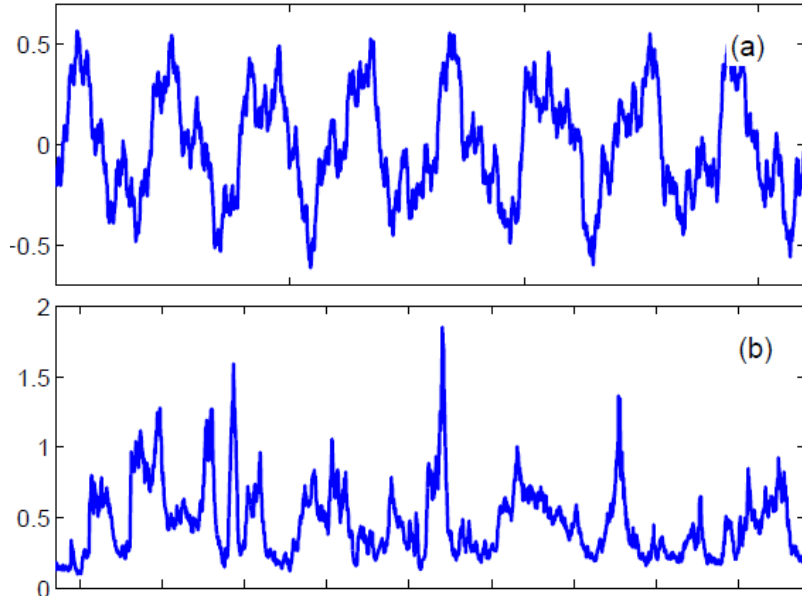
- 8 Olasılık dağılımlarından binom ve poisson yöntemlerinin verilmesi
 - 9 Olasılık dağılımlarından binom ve poisson yöntemlerinin verilmesi (1. Ara Sınav ?)
 - 10 Normal dağılım ve özelliklerinin verilmesi
 - 11 Lognormal dağılım, anlamlılık ve önem testi konularının işlenmesi
 - 12 Uygunluk ve bağımsızlık testleri, ki-kare yöntemi, serbestlik derecesi konularının verilmesi
 - 13 İstatiksel ilişkilerin incelenmesi, regresyon ve korelasyon konularının işlenmesi
 - 14 Regresyon ve korelasyonla ilgili özellikler, yöntemler ve uygulamaların verilmesi
 - 15 Final Sınavı
-

GİRİŞ

- **Deterministik (belirlenimci):** Hiçbir rastgelelik olmayan. Matematiksel formülasyon (denklemler, modeller). $F=ma$, $Q=VA$

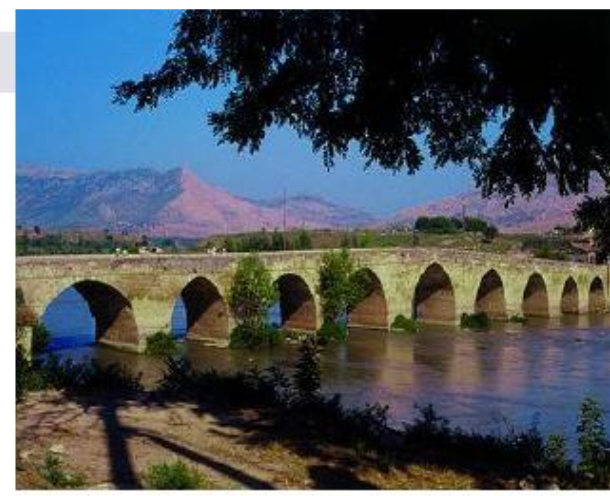
Örn: 100 m yukarıdan aynı kütleye sahip taş ilk düşüşünde yere 4.5 s'de, 44.1 m/s hızla düşer. Aynı koşullarda 2., 3.,.....,n. ci düşüşünde ne olur.

- **Stokastik (rastgele):** sistem parametrelerinde, dinamiğinde, girişlerinde rastgelelik olduğu için sonuçlar da rastgeledir. Örn: loto çekilişi, zar atılışı, dalga yüksekliklerinin değişimi



Deterministik ?

Rastgele?



Tarih	En Büyük Debi (m ³ /s)
13/4/1984	235
11/3/1985	342
9/4/1986	545
18/3/1987	400
4/2/1988	250
5/4/1989	245
22/3/1990	650
28/2/1991	450
3/4/1992	356



Şekil 3.



Şekil 4.



8.5'LUK YATAY DELİKLİ BLOK TUĞLA



- Boyutları 190x190x85 mm
- Ortalama ağırlık 2000 gr/Adettir.
- Basınç dayanımı **40 kgf/cm²**'dir
- 8.5 cm kalınlığında 1 m² duvarda 25 adet kullanılır
- 19 cm kalınlığında 1 m² duvarda 50 adet kullanılır



İSTATİSTİK NEDİR?

Belirli bir olay hakkında toplanmış olan rakamlar, yani verilerdir

- Rastgele ve manasız bir rakam yığını değil,
- Belirli bir olayın gözlenmesiyle onun hacmi, büyüklüğü, değeri, değişimleri, bölünüşü vs.

İstatistik Metodolojisi?

Üzerinde çalışılan olaya ait verilerin elde edilmesi, analizi ve yorumlanmasıdır.

İstatistik Metodolojisinin Uygulanmasında Takip Edilecek Yol

1. İlk bilgilerin toplanması (**Rölöveler: ham veriler**)
2. Toplanan bilgilerin işlenmesi ve düzenlenmesi
3. Düzenli verilerin gösterilmesi
4. İstatistiksel analiz

<u>Notlar (x_i)</u>	<u>Öğrenci Sayısı (f_i)</u>
0	3
10	4
20	5
30	5
40	14
50	15
60	27
70	12
80	8
90	5
100	2
	Toplam 100

<u>Not Grupları</u>	<u>Öğrenci Sayısı</u>		<u>Frekans Dağılımı</u>	
0-40	31		<u>Değerler</u>	<u>Frekanslar</u>
50-60	42		x ₁	f ₁
70-80	20		.	.
90-100	7		.	.
	Σ 100		x _n	f _n

İSTATİSTİKTE KULLANILAN BAZI ÖNEMLİ TERİMLER

$$\text{Aralık Büyüklüğü} = \frac{\text{En Yüksek Değer} - \text{En Düşük Değer}}{\text{İstenilen Aralık Sayısı}}$$

$$\text{Relative Frekans} = \text{Bağıl Frekans} (\%)$$

$$\text{Midpoint} = \text{Orta Nokta} = \frac{\text{Alt Sınır} + \text{Üst Sınır}}{2}$$

$$\text{Class-interval} = \text{Sınıf aralığı (Sınırlar arasındaki fark)}$$

$$\text{Dağılım Aralığı} = \text{Range} = \text{Yayılım} = \text{En büyük değer} - \text{En küçük değer}$$

Frekans Dağılımı

X üniversitesinde 100 erkek öğrenci üzerinde yapılan araştırmada aşağıdaki değerler elde edilmiştir. Buna göre, sınıf aralığını, sınıf limitini ve orta noktayı bulunuz.

<u>Ağırlık(kg)</u>	<u>Öğrenci Sayısı</u>
60-62	5
62-64	18
64-66	42
66-68	27
68-70	8
	Σ 100

Class-interval = Sınıf aralığı = Sınırlar arasındaki fark = $62 - 60 = 2$

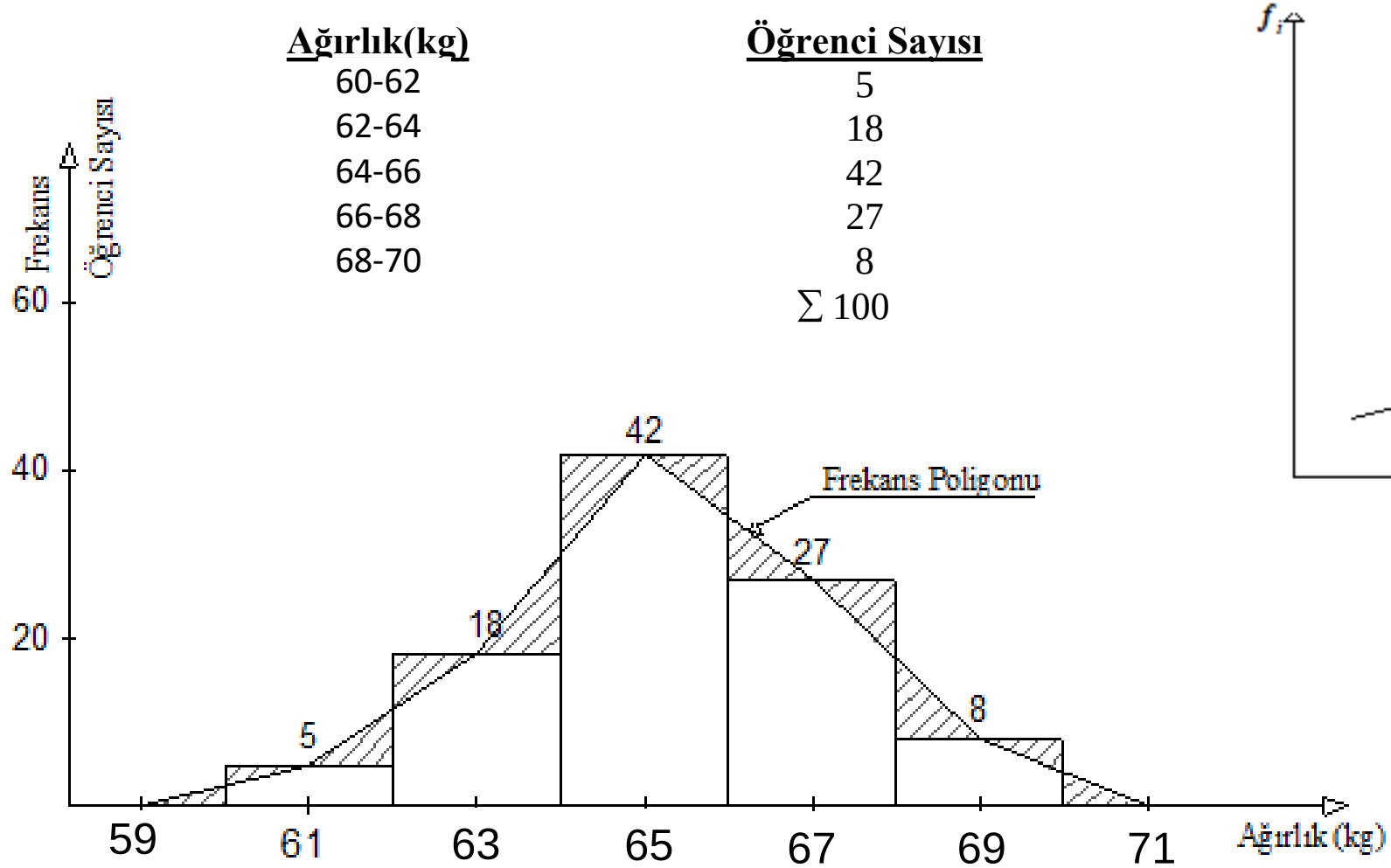
Class-limits = Sınıf limiti = 60 ve 62

-60 aşağı (üst) sınıf limiti

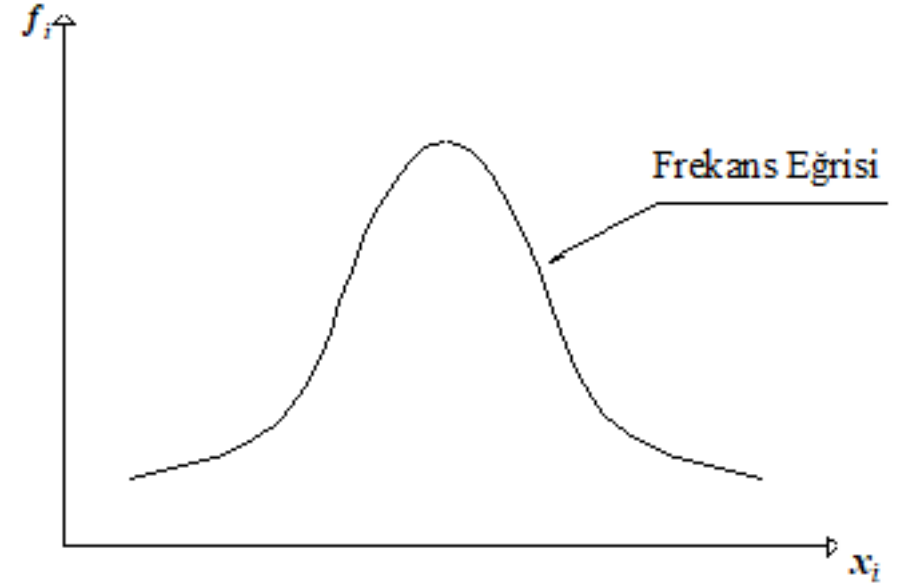
-62 yukarı (alt) sınıf limiti

$$\text{Class-mark} = \text{Midpoint} = \text{Orta nokta} = \frac{\text{Alt Sınır} + \text{Üst Sınır}}{2} = \frac{60 + 62}{2} = 61$$

HİSTOGRAM VE FREKANS POLİGONLARI



HİSTOGRAM



RÖLATİF (BAĞIL) FREKANS DAĞILIMLARI

Ağırlık(kg)

Öğrenci Sayısı

64-66'nın rölatif frekansı = $42 / 100 = \% 42$

60-62

5

62-64

18

64-66

42

66-68

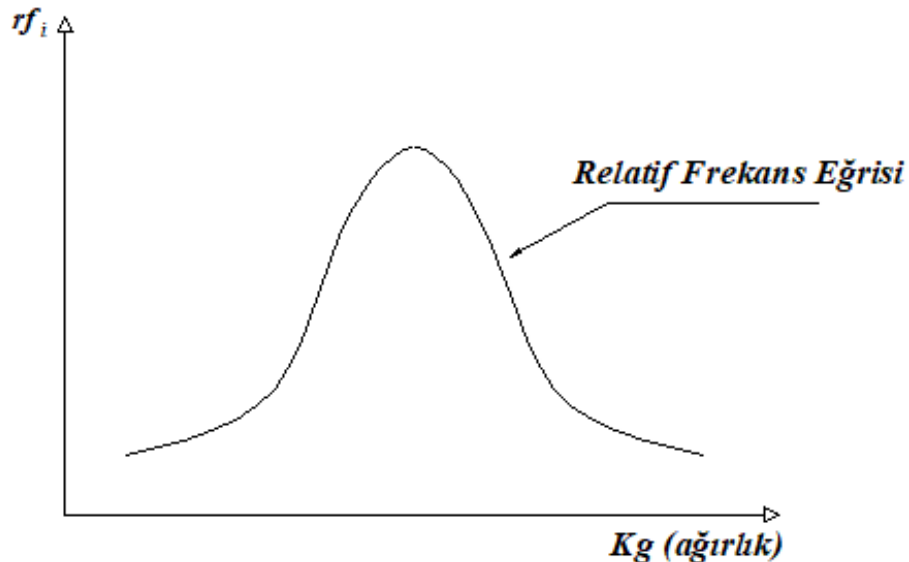
27

68-70

8

$\Sigma 100$

$$N = \sum_{i=1}^k f_i \quad rf_i = \frac{f_i}{N}$$

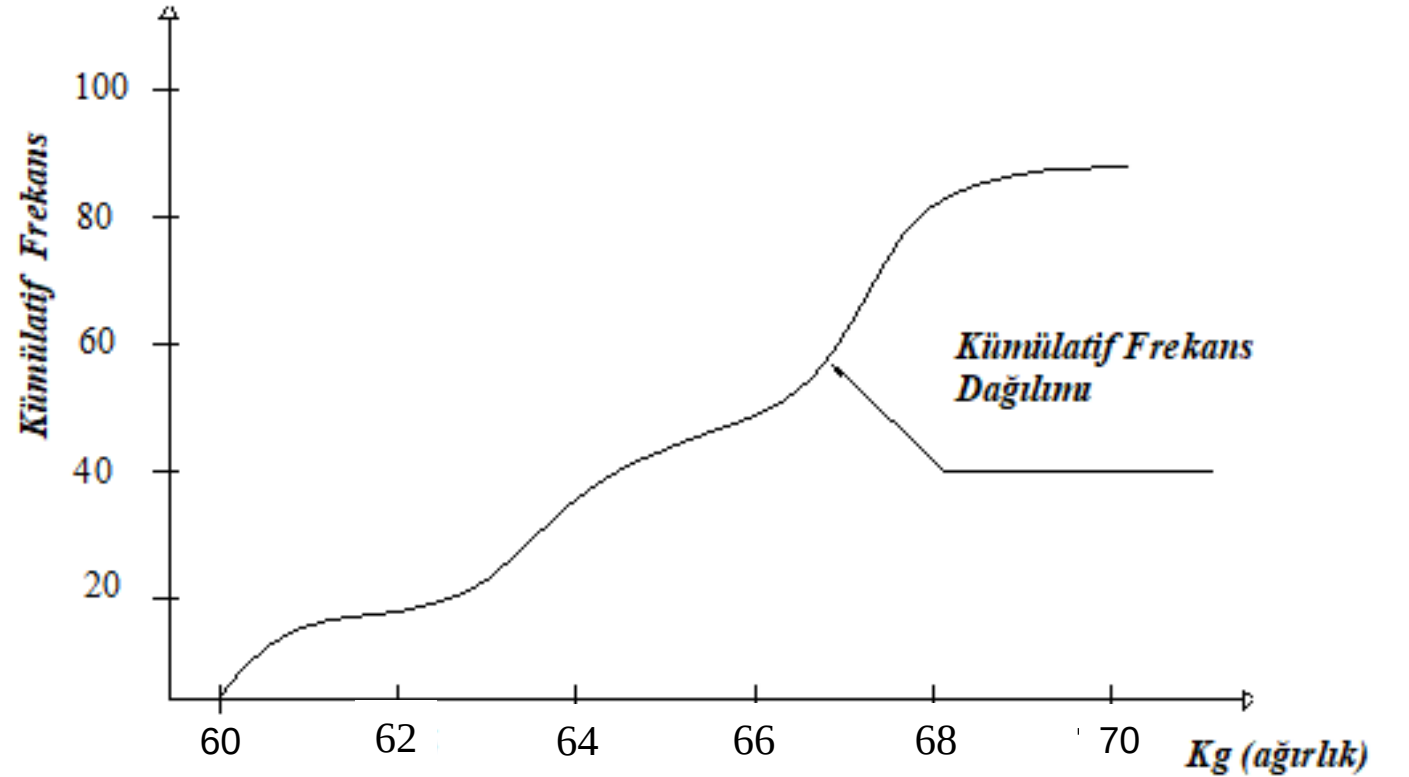


k = Sınıf sayısı N = Ölçüm sayısı f_i = Frekans rf_i = Bağlı frekans

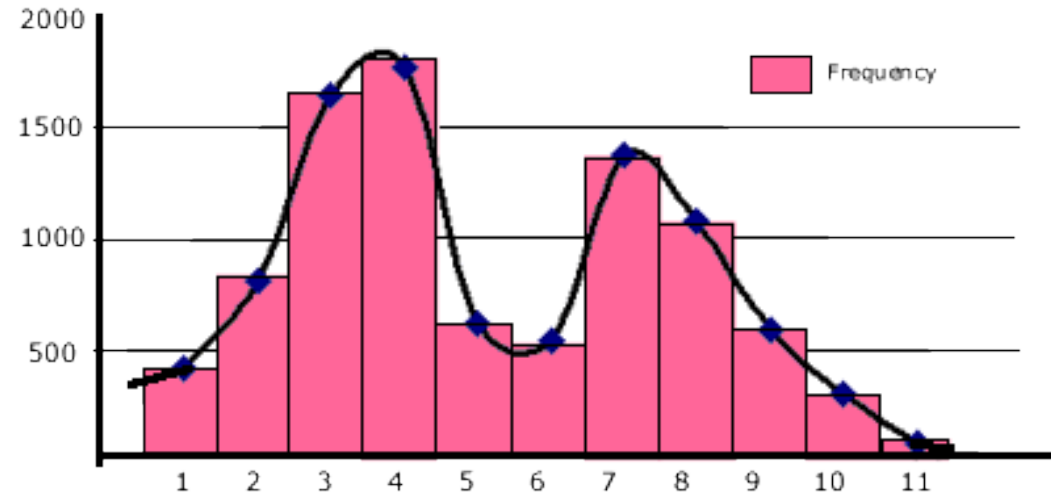
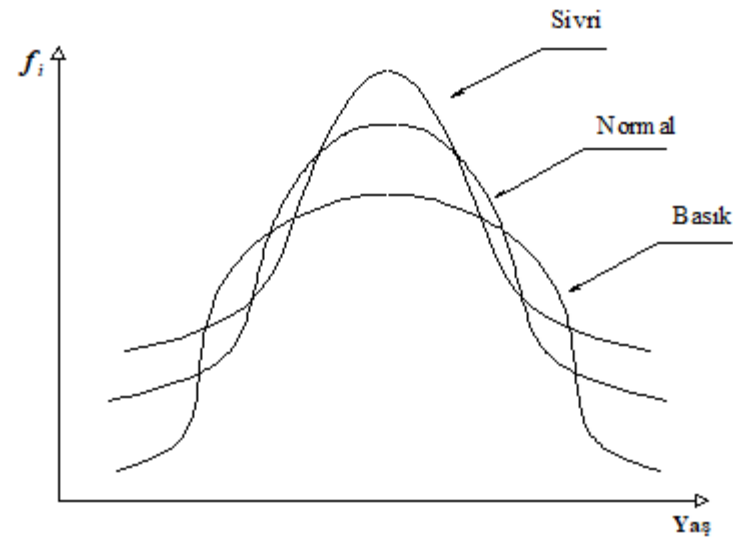
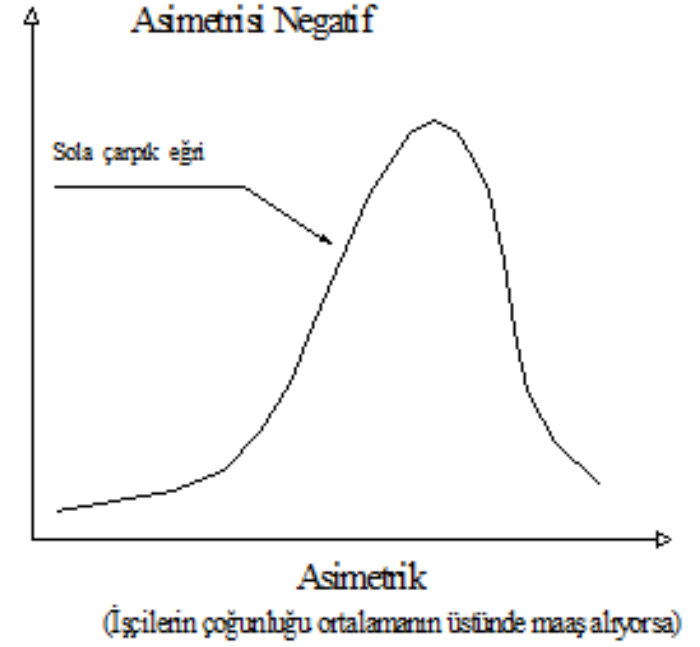
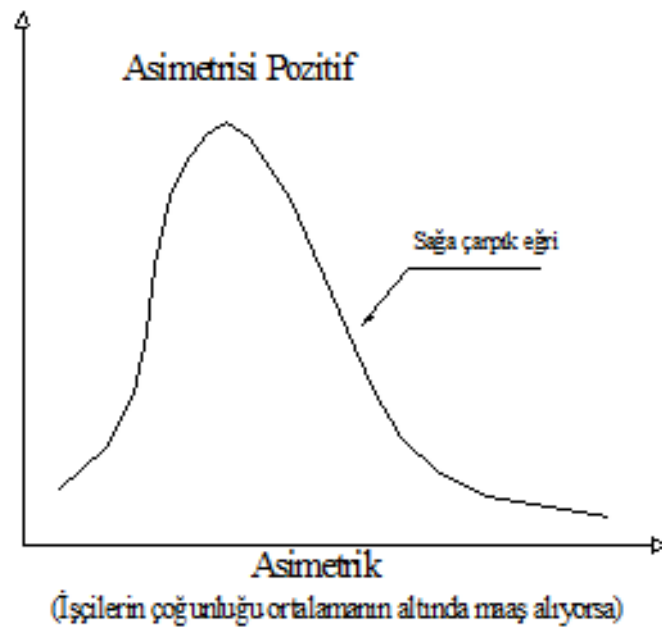
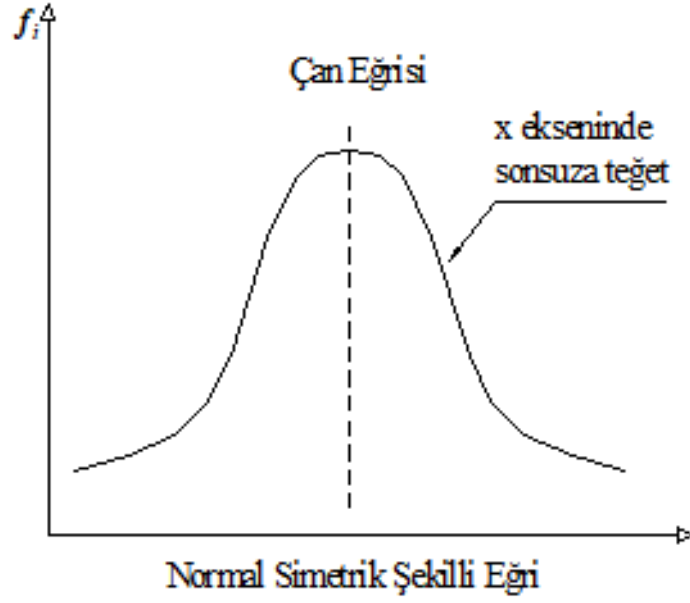
KÜMÜLATİF FREKANS DAĞILIMLARI

<u>Ağırlık(kg)</u>	<u>Öğrenci Sayısı</u>
60-62	5
62-64	18
64-66	42
66-68	27
68-70	8
	Σ 100

Ağırlık (kg)	Öğrenci sayısı
< 60	0
< 62	5
< 64	23
< 66	65
< 68	92
< 70	100



FREKANS EĞRİLERİ



PROBLEM

Bir üniversitede okuyan öğrencilerin matematik sınavından aldığı sonuçlar aşağıdaki gibidir.
Buna göre;

- i. En yüksek not,
- ii. En düşük not,
- iii. Değişim aralığı,
- iv. En yüksek not alan 5 öğrencinin notları,
- v. En düşük not alan 5 öğrencinin notları,
- vi. 10. En yüksek not alan öğrencinin notu,
- vii. Kaç tane öğrencinin 75 ve üzerinde not aldığı,
- viii. 85'in altında not alan öğrenci sayısını,
- ix. 65 ile 85 arasında not alan öğrencilerin yüzdesini,
- x. Hangi notların hiç alınmadığını bulunuz.

VERILER

68	84	75	82	68	90	62	88	76	93
73	79	88	73	60	93	71	59	85	75
61	65	75	87	74	62	95	78	63	72
66	78	82	75	94	77	69	74	68	60
96	78	89	61	75	95	60	79	83	71
79	62	67	97	78	85	76	65	71	75
65	80	73	57	88	78	62	76	53	74
86	67	73	81	72	63	76	75	85	77

PROBLEM

VERILER

68	84	75	82	68	90	62	88	76	93
73	79	88	73	60	93	71	59	85	75
61	65	75	87	74	62	95	78	63	72
66	78	82	75	94	77	69	74	68	60
96	78	89	61	75	95	60	79	83	71
79	62	67	97	78	85	76	65	71	75
65	80	73	57	88	78	62	76	53	74
86	67	73	81	72	63	76	75	85	77

50-54	53
55-59	57, 59
60-64	60, 60, 60, 61, 61, 62, 62, 62, 62, 63, 63
65-69	65, 65, 65, 66, 67, 67, 68, 68, 68, 69
70-74	71, 71, 71, 72, 72, 73, 73, 73, 73, 74, 74, 74
75-79	75, 75, 75, 75, 75, 75, 75, 76, 76, 76, 76, 77, 77, 78, 78, 78, 78, 78, 79, 79, 79
80-84	80, 81, 82, 82, 83, 84
85-89	85, 85, 85, 86, 87, 88, 88, 88, 89
90-94	90, 93, 93, 94
95-97	95, 95, 96, 97

- En yüksek not = 97
- En düşük not = 53
- Değişim aralığı = $97 - 53 = 44$
- En yüksek not alan 5 öğrencinin notları = 97, 96, 95, 95, 94
- En düşük not alan 5 öğrencinin notları = 53, 57, 59, 60, 60
10. En yüksek not alan öğrencinin notu = 88
- 75 ve üzerinde not alan öğrenci sayısı = 44
- 85'in altında not alan öğrenci sayısı = 63
- 65'den yukarı ancak 85'den aşağı not alan öğrencilerin yüzdesi = $49/80 = \% 61,2$
- Hiç alınmayan notlar = 52, 54, 55, 56, 58, 64, 70, 91, 92, 98, 99, 100

PROBLEM

Bir şirkette çalışan 65 işçinin Amerikan Doları (\$)olarak aylık maaşlarının frekans dağılımı aşağıda verilmiştir.

- a. 6. sınıfın alt limit
- b. 4. sınıfın üst limiti
- c. 3. sınıfın orta limiti
- d. 5. sınıfın sınıf aralıkları
- e. 5. sınıf aralığının büyüklüğü
- f. 3. sınıfın frekansı
- g. 3. sınıfın bağıl frekansı
- h. En büyük frekansa sahip sınıf aralığı
- i. 80 dolardan az kazanan işçilerin yüzdesi;
- j. 100 dolardan az 60 dolardan çok kazananların yüzdesi;

Sınıf No	Maaşlar	Çalışan İşçiler
1	50.00-59.99	8
2	60.00-69.99	10
3	70.00-79.99	16
4	80.00-89.99	14
5	90.00-99.99	10
6	100.00-109.99	5
7	110.00-119.99	2
	<u>Toplam</u>	65

PROBLEM

Bir şirkette çalışan 65 işçinin Amerikan Doları (\$)olarak aylık maaşlarının frekans dağılımı aşağıda verilmiştir.

Sınıf No	Maaşlar	Çalışan İşçiler
1	50.00-59.99	8
2	60.00-69.99	10
3	70.00-79.99	16
4	80.00-89.99	14
5	90.00-99.99	10
6	100.00-109.99	5
7	110.00-119.99	2
	<u>Toplam</u>	65

6. sınıfın alt limiti = 100.00 dolar
4. sınıfın üst limiti = 89.99 dolar
3. sınıfın orta limiti = $(70 + 79.99) / 2 = 74.995$ dolar
5. sınıfın sınıf aralıkları Alt limit = $(90 + 89.99) / 2 = 89.995$ dolar
Üst limit = $(99.99 + 100.00) / 2 = 99.995$ dolar
5. sınıf aralığının büyüklüğü = Üst sınır – Alt sınır = $99.995 - 89.995 = 10$ dolar (bütün hepsinde sınıf aralığı aynı)
3. sınıfın frekansı = 16
3. sınıfın bağıl frekansı = $16 / 65 = 24.6 \%$
- En büyük frekansa sahip sınıf aralığı = 70 – 79.99 dolar
- 80 dolardan az kazanan işçilerin yüzdesi;
80 dolardan az kazananların toplamı = $16 + 10 + 8 = 34$
Yüzdesi = $34 / 65 = 52.3 \%$
- 100 dolardan az 60 dolardan çok kazananların yüzdesi;
60 dolar ile 100 dolar arası kazananların toplamı = $10 + 14 + 16 + 10 = 50$
Yüzdesi = $50 / 65 = 76.9 \%$

PROBLEM

Bu verileri kullanarak,

- Bağıl frekans dağılımını bulunuz.
- Histogramını,
- Frekans poligonunu,
- Bağıl frekans poligonunu çiziniz.

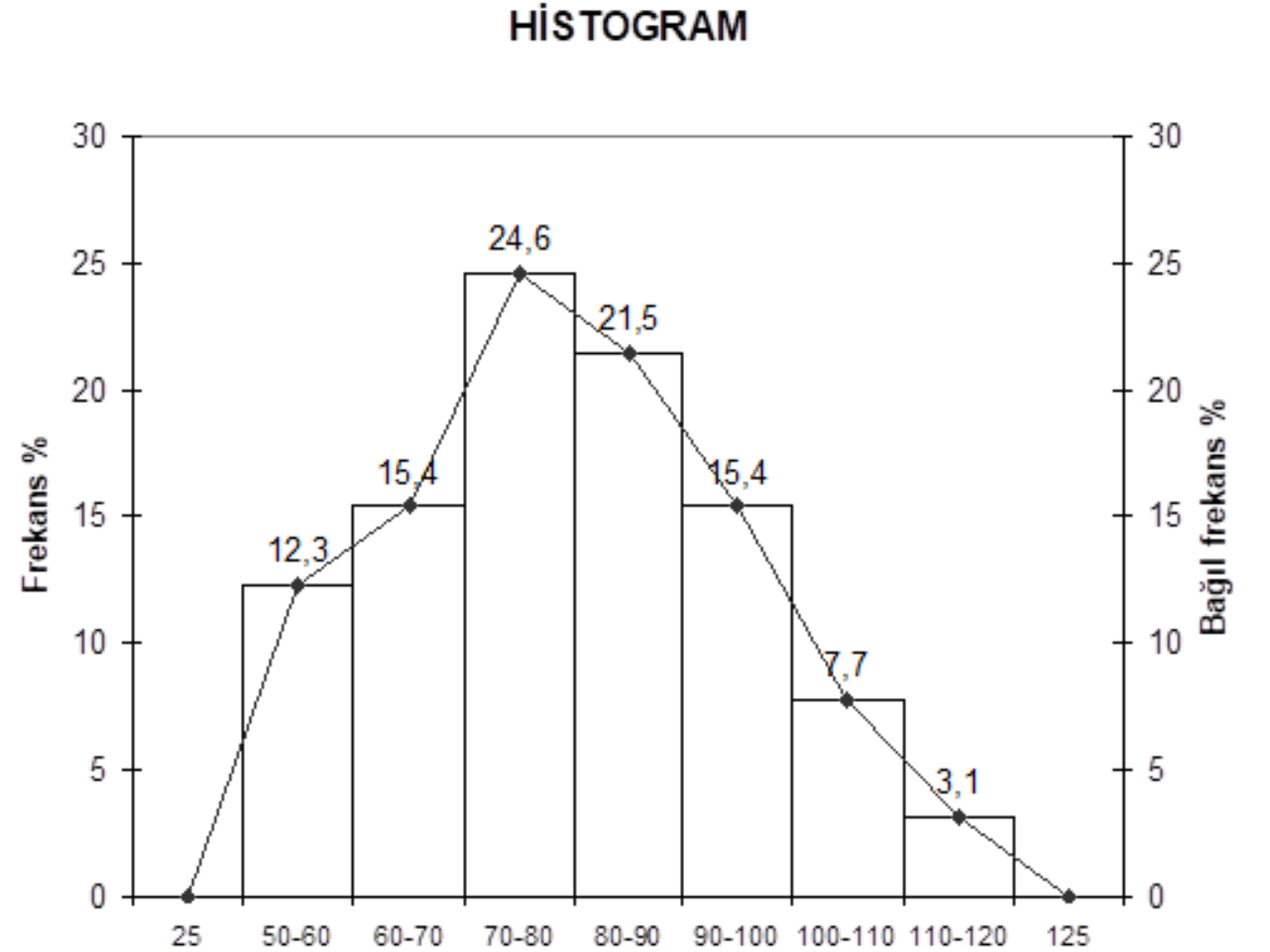
Sınıf No	Maaşlar	Çalışan İşçiler
1	50.00-59.99	8
2	60.00-69.99	10
3	70.00-79.99	16
4	80.00-89.99	14
5	90.00-99.99	10
6	100.00-109.99	5
7	110.00-119.99	2
	<u>Toplam</u>	65

PROBLEM

Bu verileri kullanarak,

- Bağıl frekans dağılımını bulunuz.
- Histogramını,
- Frekans poligonunu,
- Bağıl frekans poligonunu çiziniz.

Maaşlar	Bağıl Frekans (%)		
50.00-59.99	12.3		8 / 65
60.00-69.99	15.4		10 / 65
70.00-79.99	24.6		16 / 65
80.00-89.99	21.5		14 / 65
90.00-99.99	15.4		10 / 65
100.00-109.99	7.7		5 / 65
110.00-119.99	3.1		2 / 65
<u>Toplam</u>	% 100		



PROBLEM

Bu verileri kullanarak,

- Kümülatif frekans dağılımını,
- Yüzde kümülatif frekans dağılımını,
- Kümülatif frekans poligonunu,
- Kümülatif bağıl frekans poligonunu çiziniz.

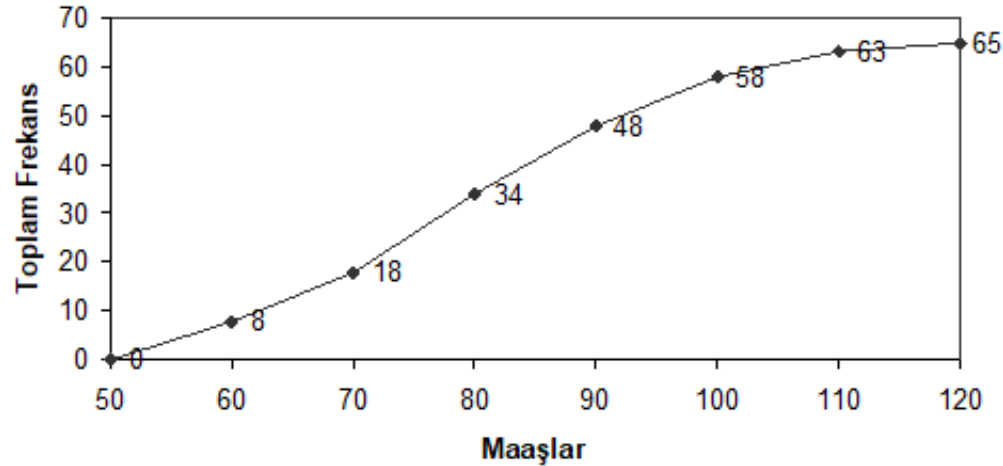
Sınıf No	Maaşlar	Çalışan İşçiler
1	50.00-59.99	8
2	60.00-69.99	10
3	70.00-79.99	16
4	80.00-89.99	14
5	90.00-99.99	10
6	100.00-109.99	5
7	110.00-119.99	2
	<u>Toplam</u>	65

PROBLEM

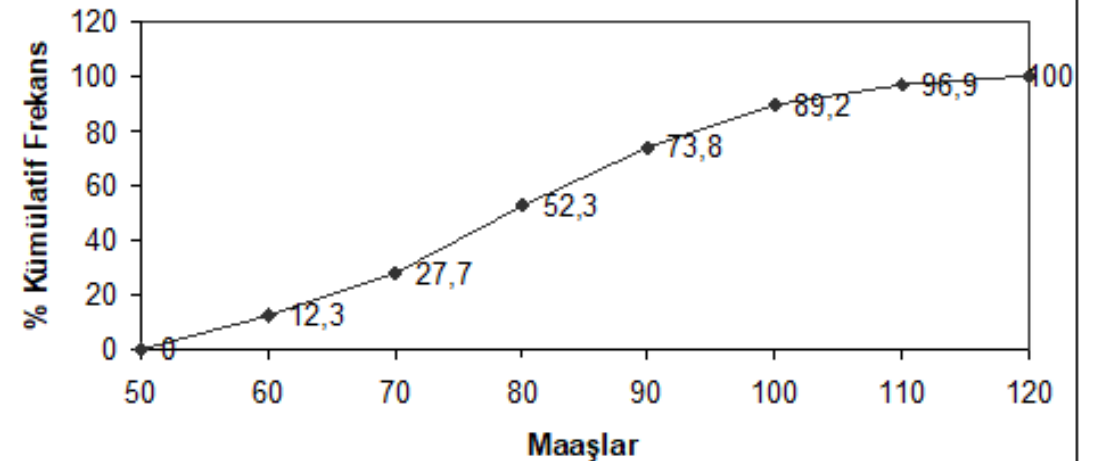
Sınıf No	Maaşlar	Çalışan İşçiler
1	50.00-59.99	8
2	60.00-69.99	10
3	70.00-79.99	16
4	80.00-89.99	14
5	90.00-99.99	10
6	100.00-109.99	5
7	110.00-119.99	2
	<u>Toplam</u>	65

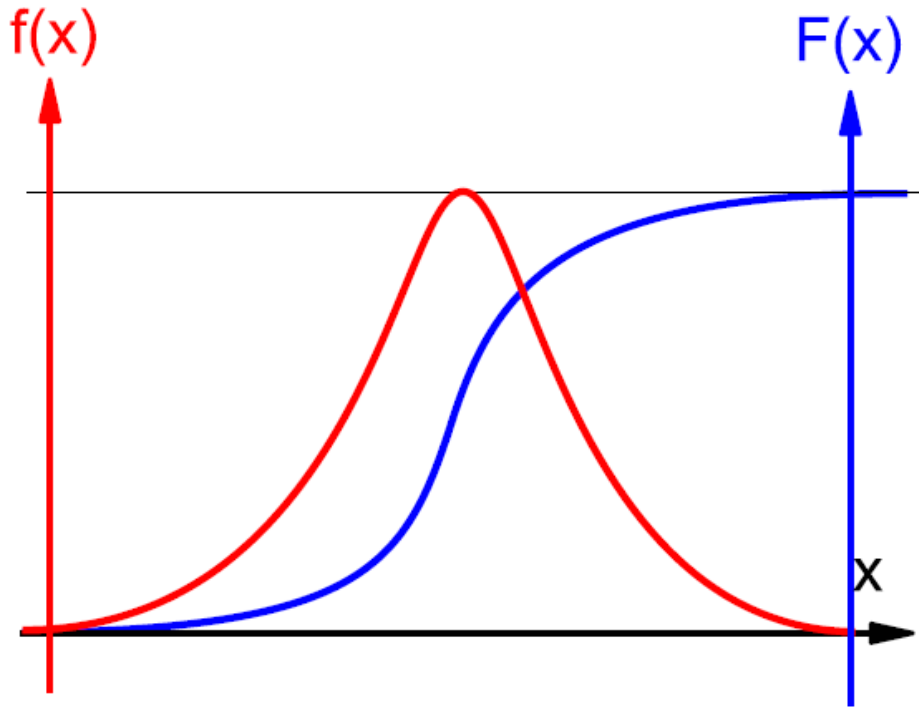
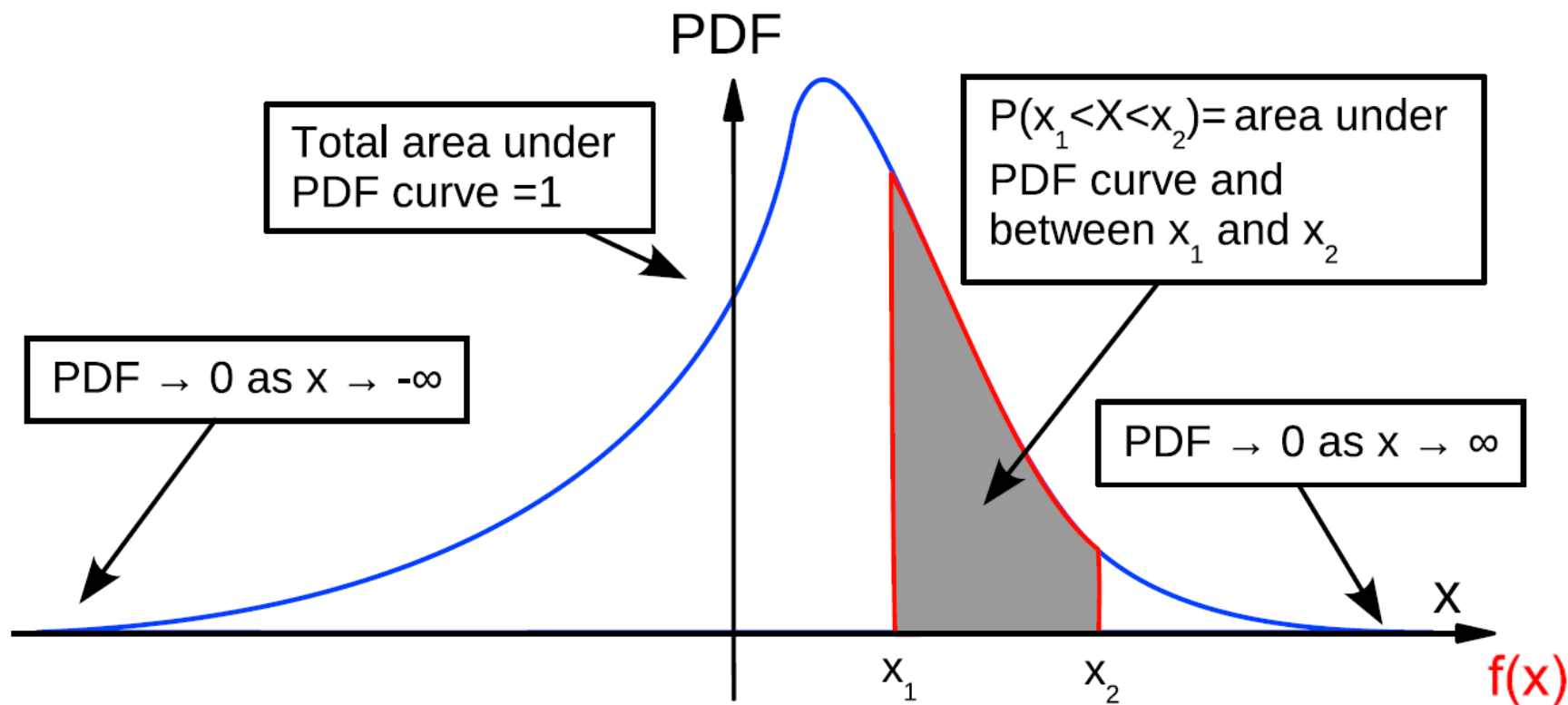
Maaşlar	Kümülatif Frekans	%Kümülatif Frekans	
< 50 \$	0	0.0	
< 60 \$	8	12.3	
< 70 \$	18	27.7	
< 80 \$	34	52.3	→ 34 / 65=52.3
< 90 \$	48	73.8	
< 100 \$	58	89.2	
< 110 \$	63	46.9	
< 120 \$	65	100.0	

Kümülatif Frekans Poligonu



Kümülatif Bağlı Frekans Poligonu



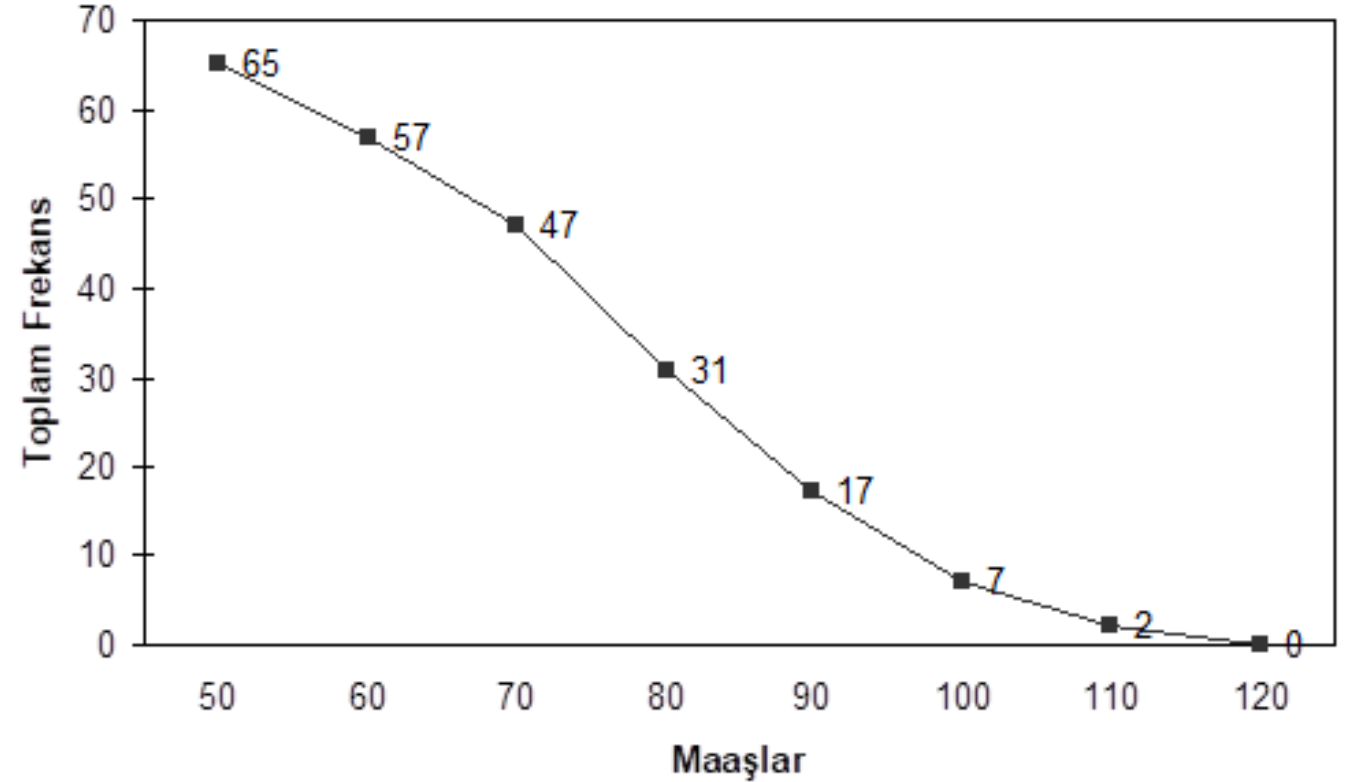


PROBLEM

Bu verileri kullanarak, -den fazla olmak üzere toplam frekans dağılımını bulunuz.

Sınıf No	Maaşlar	Çalışan İşçiler
1	50.00-59.99	8
2	60.00-69.99	10
3	70.00-79.99	16
4	80.00-89.99	14
5	90.00-99.99	10
6	100.00-109.99	5
7	110.00-119.99	2
	<u>Toplam</u>	65

Maaşlar	Toplam Frekans
50 'den fazla	65
60 'dan fazla	57
70 'den fazla	47
80 'den fazla	31
90 'dan fazla	17
100 'den fazla	7
110 'dan fazla	2
120 'den fazla	0



- 88 \$'dan az kazanan 45 işçi
- 96 \$ ve daha çok kazanan 11 kişi
- En az 63 en çok 75 \$ kazananlar
 $26 - 11 = 15$ (76 – 63'den az kazananlar)

ODEV

İstanbul Göztepe'deki yağış istasyonunda 1970 yılından 1991 yılına kadar (mm) cinsinden ölçülen yıllık yağış ortalamaları aşağıda verilmiştir. Bu verileri kullanarak aşağıdaki istenilenleri yapınız.

- Frekans tablosunu ve frekans histogramını,
- Toplam frekans tablosunu ve diyagramını,
- Frekans poligonunu bulunuz.

Sınıf No	Sınıf Aralığı	Frekans (f_i)	Bağıl Frekans (rf_i)	Toplam Frekans (Σf_i)	Toplam Bağıl Frekans (Σrf_i)
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Yıl	Yağış (mm)	Yıl	Yağış (mm)	Yıl	Yağış (mm)
1911	476	1931	578	1951	527
1912	767	1932	446	1952	460
1913	544	1933	530	1953	706
1914	515	1934	412	1954	484
1915	937	1935	394	1955	381
1916	797	1936	749	1956	715
1917	542	1937	650	1957	568
1918	472	1938	685	1958	438
1919	737	1939	629	1959	363
1920	425	1940	841	1960	553
1921	465	1941	715	1961	663
1922	611	1942	663	1962	408
1923	567	1943	460	1963	668
1924	639	1944	568	1964	595
1925	675	1945	668	1965	489
1926	478	1946	484	1966	493
1927	539	1947	595	1967	397
1928	453	1948	438	1968	654
1929	565	1949	489	1969	630
1930	463	1950	493	1970	681

(İki değişkenli frekans dağılımı)

Bir turist bürosu 200 haftalık hava raporu tutmuş ve aşağıdaki verileri elde etmiştir. Bu tablodaki x değerleri ortalama günlük sıcaklık değerlerini, y değerleri ise bulutluluk oranını göstermektedir.

a) Bağıl frekans tablosunu hesaplayınız.

b) Bağıl kumulatif frekansları hesaplayınız.

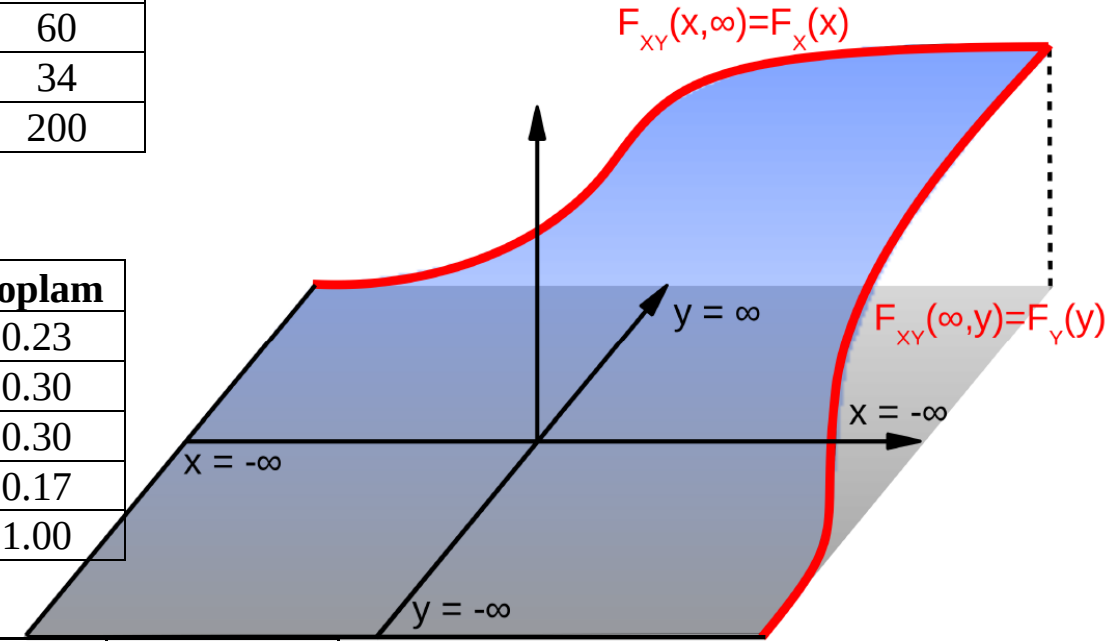
	$21 < x \leq 22$	$22 < x \leq 23$	$23 < x \leq 24$	$24 < x \leq 25$	$25 < x \leq 26$	$26 < x \leq 27$	Toplam
$0 < y \leq 1$	2	4	6	9	11	14	46
$1 < y \leq 2$	6	8	12	15	12	7	60
$2 < y \leq 3$	10	11	16	10	8	5	60
$3 < y \leq 4$	14	7	6	4	2	1	34
Toplam	32	30	40	38	33	27	200

a) Bağıl frekans tablosunu

	$21 < x \leq 22$	$22 < x \leq 23$	$23 < x \leq 24$	$24 < x \leq 25$	$25 < x \leq 26$	$26 < x \leq 27$	Toplam
$0 < y \leq 1$	0.01	0.02	0.03	0.045	0.055	0.07	0.23
$1 < y \leq 2$	0.03	0.04	0.06	0.075	0.06	0.035	0.30
$2 < y \leq 3$	0.05	0.055	0.08	0.05	0.04	0.025	0.30
$3 < y \leq 4$	0.07	0.035	0.03	0.02	0.01	0.005	0.17
Toplam	0.16	0.15	0.20	0.19	0.165	0.135	1.00

b) Bağıl kümülatif frekanslar

	$x \leq 22$	$x \leq 23$	$x \leq 24$	$x \leq 25$	$x \leq 26$	$x \leq 27$
$y \leq 1$	0.01	0.03	0.06	0.105	0.16	0.23
$y \leq 2$	0.04	0.10	0.19	0.310	0.425	0.53
$y \leq 3$	0.09	0.205	0.375	0.545	0.70	0.83
$y \leq 4$	0.16	0.31	0.51	0.70	0.865	1.00



VERİLERİN İSTATİKSEL TANIMLARI

- Veri → basit, düzenlenmiş ve gruplanmış bir seri
- Serinin karakterini tayin eden özellikler ??
 - serinin temsil ettiği birimlerin normal değeri
 - değerlerdeki değişimler
 - serinin nasıl bir frekans dağılımı sekline uyduğu
- Ortalamalar, dağılım, asimetri ve basıklık ölçüleri

ORTALAMALAR

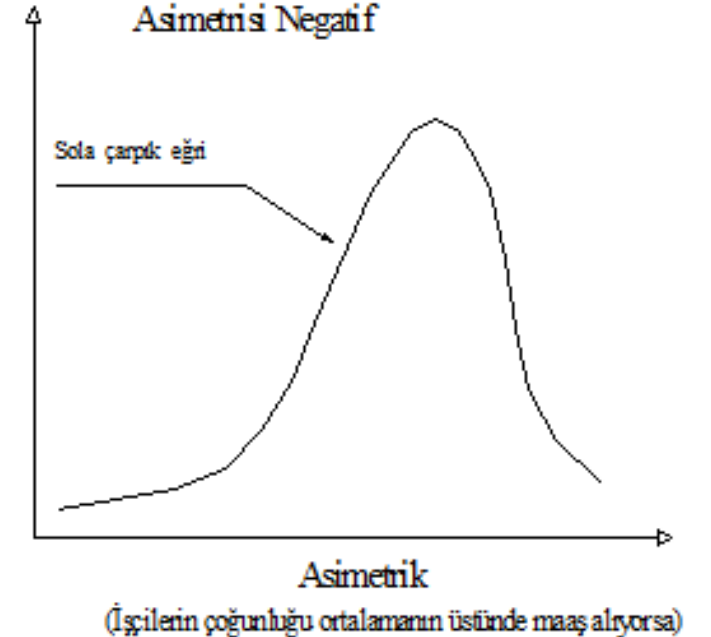
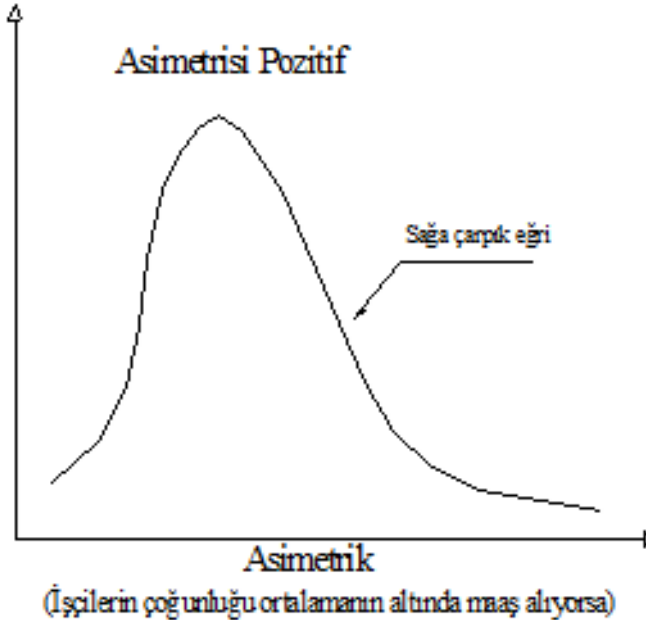
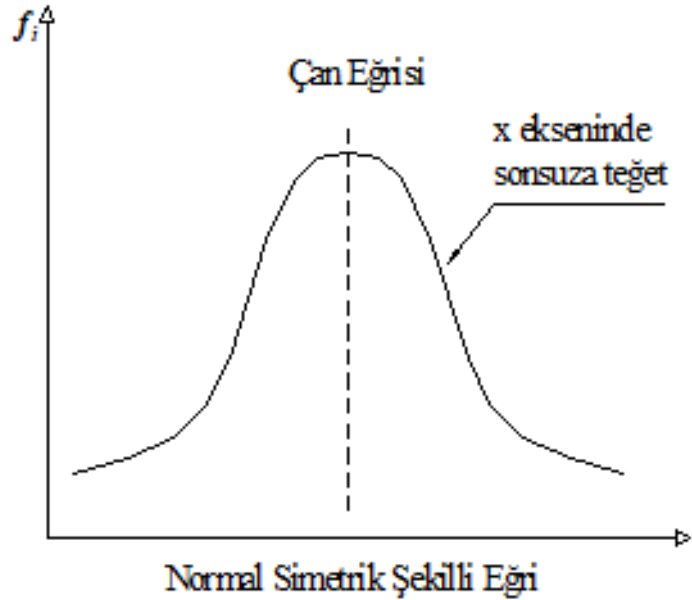
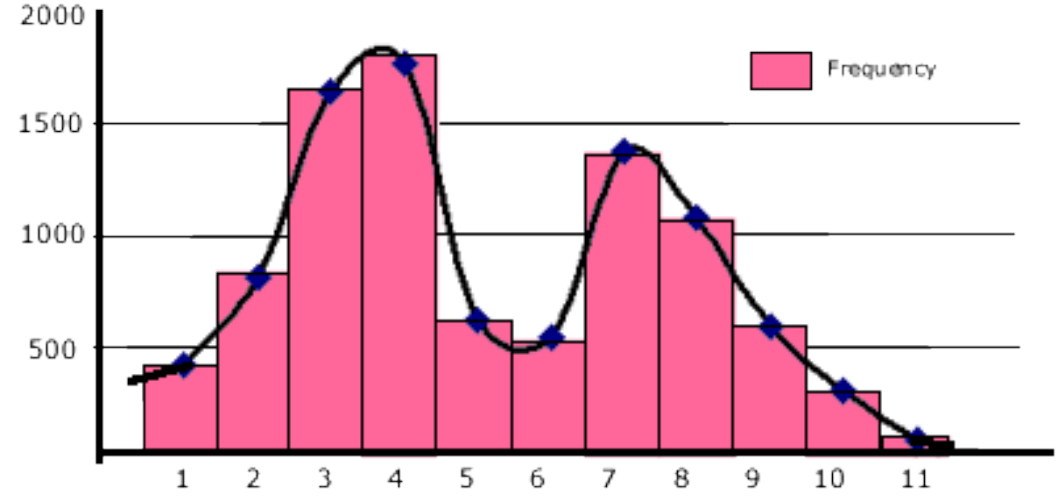
- Gözlem sonuçlarındaki bütün değerleri temsil eden tek rakama “Ortalama” adı verilir.
- Ortalama, serideki değerleri tek bir rakamla ifade ve temsil etmeye yarar.
- Ortalama özellikle tek maksimumlu serilerde birimlerin hangi merkezde toplanmış olduğunu gösterir.
- ortalama, normal değer ölçüsü olarak ve sahip olduğu matematiksel özellikler sebebiyle istatistik analizin temel dayanak noktalarından birini teşkil eder.
- İki serinin karşılaştırılması

$$x_{\min} \leq \text{Ortalama} \leq x_{\max}$$

ORTALAMALAR

x_i	y_i
5	1
5	2
5	3
5	9
5	10
Ortalama =5	Ortalama =5

temsili ortalama?



ORTALAMA ÇEŞİTLERİ

A. Serinin tüm değerlerine sahip (**Analitik**) ortalamalar

Aritmetik Ortalama

Geometrik ortalama

Harmonik ortalama

Kareli ortalama

B. Serinin bütün değerlerine sahip olmayan (**Analitik olmayan**) ortalamalar

Medyan

Mod

ARİTMETİK ORTALAMA

Basit serilerde aritmetik ortalama

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N}$$

n = Gözlem sayısı
 x_i = Gözlem değerleri

Verilen izin süresi (gün)

x_i
4
6
9
14
17

$$\sum x_i = 50$$
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{50}{5} = 10 \text{ gün}$$

ARİTMETİK ORTALAMA

Düzenlenmiş serilerde aritmetik ortalama

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

x_i = Gözlem değerleri
 f_i = bu değerlerin frekansları

Fiyat (TL)	Kitap sayısı		
x_i	f_i	$x_i f_i$	
500	7	3.500	TL
600	5	3.000	TL
700	3	2.100	TL
800	3	2.400	TL
900	2	1.800	TL
$\sum f_i = 20$		$\sum f_i x_i =$	12.800 TL

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{12800}{20} = 6400 \text{ TL}$$

ARİTMETİK ORTALAMA

Gruplanmış serilerde aritmetik ortalama

$$\bar{X} = \frac{f_1 \cdot m_1 + f_2 \cdot m_2 + \dots + f_n \cdot m_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

m_i = sınıfların orta noktaları
 f_i = bu değerlerin frekansları

Saat başına ücret sınıfları
(bin TL)

f_i
0 – < 2
2 – < 4
4 – < 6
6 – < 8
8 – < 10

Çalışan
sayısı

f_i
6
3
7
5
4

Saat başına ücret sınıfları
(bin TL)

f_i
0 – < 2
2 – < 4
4 – < 6
6 – < 8
8 – < 10

Sınıf orta
noktaları

m_i
1
3
5
7
9

Çalışan
sayısı

f_i
6
3
7
5
4

$f_i \cdot m_i$
6
9
35
35
36

$$\sum x_i = 25 \quad \sum x_i \cdot m_i = 121$$

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i m_i}{\sum f_i} = \frac{121}{25} = 4.84$$

ARİTMETİK ORTALAMANIN ÖZELLİKLERİ

- Anormal değerlere dikkat!

Seri I

23

24

25

26

$$\overline{x} = 24.5$$

Seri II

1

24

25

26

$$\overline{x} = 19$$

Seri III

24

25

26

105

$$\overline{x} = 45$$

AĞIRLIKLI ARİTMETİK ORTALAMA

Basit serilerde

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

Düzenlenmiş serilerde

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n w_i \cdot f_i}$$

Gruplanmış serilerde

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i \cdot m_i \cdot (f_i)}{\sum f_i \cdot w_i}$$

Öğrencinin aldığı notlar		Haftalık ders saati	
<u>Dersler</u>	<u>(xi)</u>	<u>(wi)</u>	<u>xi wi</u>
Türkçe	5	5	25
Matematik	5	3	15
Y . Dil	8	2	16
Resim	10	1	10
	$\sum x_i = 28$	$\sum w_i = 11$	$\sum x_i w_i = 66$
Ağırlıklı not ortalaması	$\bar{x} = \frac{\sum w_i \cdot x_i}{\sum w_i} = \frac{66}{11} = 6$		
Aritmetik ortalama	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{28}{4} = 7$		

AĞIRLIKLIL ARİTMETİK ORTALAMA

$$\text{A bölgesinde doğum oranı} \quad \frac{\text{Yıllık Doğumlar}}{\text{Nüfus}} = \frac{8000}{200.000} = 0,040$$

$$\text{B bölgesinde doğum oranı} \quad \frac{\text{Yıllık Doğumlar}}{\text{Nüfus}} = \frac{2000}{100.000} = 0,020$$

$$\text{Bu durumda iki bölgedeki ortalama doğum oranı} = \frac{0.040 + 0.020}{2} = 0.030$$

AĞIRLIKLI ARİTMETİK ORTALAMA

$$\text{A bölgesinde doğum oranı} \quad \frac{\text{Yıllık Doğumlar}}{\text{Nüfus}} = \frac{8000}{200.000} = 0,040$$

$$\text{B bölgesinde doğum oranı} \quad \frac{\text{Yıllık Doğumlar}}{\text{Nüfus}} = \frac{2000}{100.000} = 0,020$$

$$\text{Bu durumda iki bölgedeki ortalama doğum oranı} = \frac{0.040 + 0.020}{2} = 0.030 \quad \text{YANLIŞ !!!}$$

$$\text{Ortalama doğum oranı} = \frac{200.000 \times 0.040 + 100.000 \times 0.020}{200.000 + 100.000} = 0.033 \quad \checkmark$$

AĞIRLIKLI ARİTMETİK ORTALAMA

Personel Sayısı		Ortalama Ücret (\$)	
Gruplar	f_i	$\bar{x}_i$	$f_i \bar{x}_i$
İdareciler	10	5.100	51.000
Teknik personel	15	6.000	90.000
İşçiler	75	3.000	225.000
Toplam	100	Toplam	366.000

$$\frac{5100 + 6000 + 3000}{3} = \frac{14100}{3} = 4700$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{366.000}{100} = 3.660$$

GEOMETRİK ORTALAMA

$$G = \sqrt[N]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_N} \quad X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_N = \prod X_i$$

$$G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N X_i}$$

- Bu yoldan geometrik ortalamayı bulmak için gözlem sayısının az olması gerekir.
- Gözlem sayısı arttıkça bu yoldan geometrik ortalamayı hesaplamak güçleşmektedir.
- Bunun yerine logaritmik dönüşüm uygulanarak geometrik ortalama hesaplanır.

GEOMETRİK ORTALAMA

$$G = \sqrt[N]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_N}$$

$$G = (X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_N)^{1/N}$$

bu ifadenin her iki tarafının logaritması alınır

$$\log G = \frac{1}{N} \log(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_N)$$

Çarpımın logaritması ayrı ayrı logaritmlar toplamına eşit olduğuna göre;

$$\log G = \frac{\log X_1 + \log X_2 + \log X_3 + \cdots + \log X_N}{N}$$

$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^N \log X_i}{N}$$

$$G = 10^{\frac{\sum_{i=1}^N \log X_i}{N}}$$

GEOMETRİK ORTALAMA

x_i	$\log x_i$
40	1.60206
50	1.69897
90	1.954
$\sum \log x_i = 5.25527$	

$$\log G = \frac{1}{N} \sum \log x_i$$

$$\log G = \frac{5.25527}{3} = 1.75176$$

$$G = \text{antilog } 1.75716 = 56.46 \text{ km}$$

- Düzenlenmiş seride;

$$G = \sqrt[k]{X_1^{f_1} \cdot X_2^{f_2} \cdot X_3^{f_3} \cdots X_k^{f_k}}$$

$$\log G = \frac{f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + f_3 \log X_3 + \cdots + f_k \log X_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_k} \Rightarrow$$

$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \log X_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

- Gruplanmış seri için;

$$G = \sqrt[k]{m_1^{f_1} \cdot m_2^{f_2} \cdot m_3^{f_3} \cdots m_k^{f_k}}$$

$$\log G = \frac{f_1 \log m_1 + f_2 \log m_2 + f_3 \log m_3 + \cdots + f_k \log m_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_k} \Rightarrow$$

$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \log m_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

Geometrik ortalamanın özellikle geometrik dizi şeklindeki serilere uygun olduğunu söylemek mümkündür. Geometrik bir dizi logaritması alınarak aritmetik diziye dönüştürülür.

Gündelik ücret (\$) (x _i)	İşçi Sayısı (f _i)	log x _i	f _i .log x _i
50	5	1,69897	8,49485
80	3	1,90309	5,70927
100	2	2,000	4,000
	Σ 10		18,20412

$$\log G = \frac{1}{f_i} \cdot \sum f_i \cdot \log x_i$$

$$\log G = \frac{18.20412}{10} = 1.80241$$

$$G = \text{antilog } 1.82041 = 66.13 \$$$

Not sınıfları	Sınıf orta noktaları (m _i)	Öğrenci sayısı (f _i)	log m _i	f _i log m _i
0 - 5 den az	2,5	10	0,39794	3,97940
5 - 7 den az	6	20	0,77815	15,56300
7 - 9 dan az	8	8	0,90309	7,22472
9 - 10 dan az	9,5	2	0,97772	1,95544
				28,72256

$$\log G = \frac{1}{\sum f_i} \cdot \sum f_i \cdot \log m_i = \frac{28.72256}{40} = 0.71806$$

$$G = \text{antilog } 0.71806 = 5.23$$

Ağırlıklı Geometrik Ortalama

Basit serilerde

$$\log G = \frac{\sum w_i \cdot \log x_i}{\sum w_i}$$

Düzenlenmiş serilerde

$$\log G = \frac{\sum w_i \cdot f_i \cdot \log x_i}{\sum w_i \cdot f_i}$$

Gruplanmış serilerde

$$\log G = \frac{\sum w_i \cdot f_i \cdot \log m_i}{\sum f_i \cdot w_i}$$

Gündelik ücret (\$) (xi)	İşçi Sayısı (fi)	Kıdem (ağırlık) (wi)
50	5	3
80	3	6
100	2	10

Gündelik ücret (\$) (xi)	İşçi Sayısı (fi)	Kıdem (ağırlık) (wi)	log xi	fi.wi log xi
50	5	3	1,69897	25,48455
80	3	6	1,90309	34,25562
100	2	10	2,0000	40,0000
	Σ 10			99,74017

$$\log G = \frac{\sum w_i \cdot f_i \cdot x_i}{\sum w_i \cdot f_i} = \frac{99.74017}{53} = 1.88189$$

$$G = 76.19 \$$$

GEOMETRİK ORTALAMA

- Aritmetik ortalama değerleri arasındaki farka bağlı olduğu halde, geometrik ortalama değerler arasındaki orana bağlıdır.
- Aritmetik ortalama aritmetik dizi, geometrik ortalama ise geometrik dizi şeklindeki serilere uygun ortalama tipleridir.

Aritmetik Dizi

$$\begin{array}{r} \text{Xi} \\ \hline 2 \\ 4 \\ 6 \longrightarrow \bar{x} \\ 8 \\ 10 \\ \hline \bar{x} = 6 \end{array}$$

Geometrik Dizi

$$\begin{array}{r} \text{Xi} \\ \hline 2 \\ 4 \\ 8 \longrightarrow G \\ 16 \\ 32 \\ \hline G = 8 \end{array}$$

- Geometrik diziye benzer gelişme gösteren ***bileşik faiz*** hesabına göre faize yatırılmış sermaye, bu esasa göre ***çoğalan nüfus, milli gelir*** gibi serilere geometrik ortalamayı uygulamak gerekir.

Örnek Bir işletmede verimin tecrübeye bağlı olduğu düşünülmektedir. Bu işletmede çalışan işçilerin üretim miktarları ve tecrübe (çalışılan yıl) dağılımı aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. İşçi başına günlük üretimin tartılı geometrik ortalamasını hesaplayınız.

Günlük üretim (adet)	İşçi sayısı	Tecrübe (çalışılan yıl)
40	5	3
45	7	8
50	15	15
55	20	20
Toplam		

Harmonik Ortalama

- Nadir olarak kullanılır ve genellikle oran şeklindeki değerlerin ortalaması hesaplanmak isteniyorsa burada kullanılabilir
- Harmonik ortalama bir serideki gözlem değerlerinin terslerinin aritmetik ortalamasının tersine eşittir.

Basit bir seri için

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \dots + \frac{1}{X_N}}{N}} = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \dots + \frac{1}{X_N}} \Rightarrow H = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{X_i}}$$

- Düzenlenmiş seride

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{X_i}}$$

- Gruplanmış seride

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{m_i}}$$

Harmonik ortalamanın kullanıldığı yerler

- **Harmonik ortalamanın kullanıldığı yerler**

- Harmonik ortalama az kullanılan ortalamalardan biri olup, özellikle oran şeklinde ortaya çıkan verilerin ortalamasında kullanılır. Bir seride sabit ve değişken unsurun yer değiştiriyorsa, yani sabit unsur, değişken, değişken unsur sabit oluyorsa böyle durumlarda harmonik ortalama kullanılır.
- **Hız** → **yol (km)/zaman(saat)**: *zaman sabit, alınan yol değişken*
- **Verim** → **zaman/parça**: *üretilen parça sabit, zaman değişken*
- **Fiyat** → **ödenen para(TL)/miktar(kg)**: *miktar sabit, ödenen para değişken olarak ifade edilir.*
- Bu ifadeler tam ters şekilde; yani sabit unsuru değişken, değişken unsuru sabit tutmak sureti ile de ifade edilebilir.
- **Hız** → **zaman/yol** şeklinde ters olarak ifade edilebilir. (Belli uzunluktaki bir yolun ne kadar zamanda alındığı ifade edilebilir.)
- **Verim** → **parça/zaman**: Belli bir zamanda ne kadar parça üretildiği
- **Fiyat** → **miktar/ödenen para**: Para miktarı sabit iken, bu paraya alınabilecek değişen mal miktarı şeklinde düşünülebilir

Bu gibi durumlarda harmonik ortalama en uygun sonucu verir.

Kareli ortalamamanın kullanıldığı yerler

- Bir seride sıfır ve/veya farklı işaretli değerler varsa geometrik ve harmonik ortalamalar hesaplanamaz, hesaplanırsa da mantıklı sonuçlar vermez. Eğer aritmetik ortalama da makul bir sonuç vermiyorsa kareli ortalama kullanılabilir.
- Kareli ortalama özel olarak sapmalar serisinin ortalamasında kullanılır. Sapmalar serisi verilerin aritmetik ortalamadan sapmalarını veren seridir. Yani $\sum (X_i - \bar{X})$ serisidir. Sapmalar serisinin toplamı sıfır olduğundan $\{\sum (X_i - \bar{X}) = 0\}$, bu serinin ortalaması kareli ortalama ile hesaplanabilir. Bu şekilde hesaplanan ortalama standart sapma adı verilir.

Analitik ortalamalar arasındaki ilişkiler

Normal bir seride ortalamalar arasında aşağıdaki gibi bir büyüklük ilişkisi vardır.

$$K > \bar{X} > G > H$$

- **Örnek** Bir ilkokulda 5. Sınıf öğrencilerinin okuma hızlarını ölçmek için yapılan araştırmada alınan sonuçlar şöyledir. Buna göre öğrencilerin ortalama okuma hızını harmonik ortalama ile bulunuz

1 dakikada okunan kelime sayısı (X_i)	$\frac{1}{X_i}$
60	0,0166
68	0,0147
72	0,0139
75	0,0133
80	0,0125
Toplam	0,0710

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{X_i}} = \frac{5}{0.071}$$

H=70,42 kelime

Örnek: Sakarya ilinde aylık yağışların dağılımı ile ilgili yapılan çalışmada aşağıdaki veriler elde edilmiştir. Bu verilerden hareketle aylık yağışların harmonik ortalamasını bulunuz.

Yağış (kg/m ²)	Ay sayısı (f _i)	m _i	$\frac{f_i}{m_i}$
0 - 20	4	10	0,4
20- 40	6	30	0,2
40- 60	10	50	0,2
60- 80	7	70	0,1
	27		0,9

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{m_i}} = \frac{27}{0,9}$$

$$H = 30 \text{ kg} / \text{m}^2$$

- **Örnek:** Bir işletmede çalışan ve aynı parçayı işleyen 4 işçinin bu parçayı üretim sürelerinin dağılımı aşağıda verilmiştir. Bu işçiler hep birlikte bu parçayı 4 saat süre ile Ürettiklerinde ürettikleri parçaların Ortalama üretim süresini bulunuz.

Çözüm:

Üretim süresi $4 \times 60 = 240$ dakika

1. İşçinin üretimi $240/5 = 48$ parça
2. İşçinin üretimi $240/6 = 40$ parça,
3. İşçinin üretimi $240/10 = 24$ parça,
4. İşçinin üretimi $240/20 = 12$ parça.

İşçilerin 4 saatteki toplam üretimi $48 + 40 + 24 + 12 = 124$ parça

Toplam işçilik süresi $4 \times 240 = 960$ dakika

Parçanın ortalama üretim süresi: $960/124 = 7,74$ dakika/parça

İşçiler	Üretim süresi (dk)
A	5
B	6
C	10
D	20

- Yukarıdaki örneğin Harmonik ortalama ile çözümü:

$$H = \frac{N}{\sum \frac{1}{X_i}} = \frac{4}{0.517}$$

$$H = 7,74 \text{ dakika/ parça}$$

Üretim süresi (X_i)	$1/X_i$
5	0,2
6	0,167
10	0,1
20	0,05
Toplam	0,517

Harmonik ortalamanın özellikleri

- Harmonik ortalama seride sıfır değeri varsa hesaplanamaz,
- Seride farklı işaretli değerler varsa harmonik ortalama mantıklı olmayan sonuçlar verir.
- X_i : -2, 5,10,20 serisinin harmonik ortalaması

$$- H = \frac{N}{\sum \frac{1}{X_i}} = \frac{4}{-0,15} \Rightarrow H = -26,66 \quad \text{olup sonuç mantıksızdır.}$$

Kareli Ortalama (K)

- Kareli ortalama serideki değerlerin karelerinin aritmetik ortalamasının kareköküdür.

Basit seride:

$$K = \sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_N^2}{N}} \Rightarrow K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N X_i^2}{N}}$$

Düzenlenmiş seride:

$$K = \sqrt{\frac{f_1 X_1^2 + f_2 X_2^2 + f_3 X_3^2 + \dots + f_k X_k^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k}} \Rightarrow K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i^2}{\sum_{i=1}^k f_i}}$$

Gruplanmış seride:

$$K = \sqrt{\frac{f_1 m_1^2 + f_2 m_2^2 + f_3 m_3^2 + \dots + f_k m_k^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k}} \Rightarrow K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i^2}{\sum_{i=1}^k f_i}}$$

Örnek: Bir otomobil servis istasyonuna günlük olarak gelen araçların dağılımı aşağıda verilmiştir. Günlük gelen ortalama aracı kareli ortalama cinsinden bulunuz.

Araç sayısı (X_i)	Gün sayısı (f_i)	X_i^2	$f_i \cdot X_i^2$
1	4	1	4
2	8	4	32
3	12	9	108
4	10	16	160
5	6	25	150
Toplam	$\sum f_i = 40$		$\sum f_i \cdot X_i^2 = 454$

$$K = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot X_i^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{454}{40}}$$

$$K = \sqrt{11,35}$$

$$K \cong 3,39 \text{ araç}$$

Örnek Bir şehirdeki konutlarda elektrik enerjisi tüketimi üzerine yapılan araştırmada, 200 konut rasgele seçilmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. Aylık ortalama elektrik tüketimini kareli ortalama cinsinden bulunuz.

Aylık elektrik Tüketimi (Kwh)	Konut sayısı
0 – 60	10
60 – 100	20
100 – 120	40
120 – 140	50
140 – 180	45
180 – 250	35

$$K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i^2}{\sum_{i=1}^k f_i}} = \sqrt{\frac{4235875}{200}}$$

$$K = \sqrt{21179,375}$$

$$K = 145,53 \text{ Kwh / ay}$$

Analitik ortalamamanın genel formülleri

$$M_r = \sqrt[r]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^r}{N}}$$

$$r = 1 \text{ için } \rightarrow M_1 = \sqrt[1]{\frac{\sum x_i}{N}} = \frac{\sum x_i}{N} = \bar{x}$$

Aritmetik Ortalama

$$r = 2 \text{ için } \rightarrow M_2 = \sqrt[2]{\frac{\sum x_i^2}{N}} = K$$

Kareli Ortalama

$$r = -1 \text{ için } \rightarrow M_{-1} = \sqrt[-1]{\frac{\sum x_i^{-1}}{N}} = \left(\frac{\sum x_i^{-1}}{N} \right)^{-1} = \frac{N}{\sum \frac{1}{x_i}} = H$$

Harmonik Ortalama

Örnek:Aşağıdaki seri için bu dört ortalamayı hesaplayınız.

$$\begin{array}{c} \mathbf{x_i} \\ \hline 10 \\ 50 \end{array}$$

$$H = \frac{2}{\frac{1}{10} + \frac{1}{50}} = 16.67$$

$$G = \sqrt{10 \cdot 50} = 22.36$$

$$\bar{x} = \frac{10 + 50}{2} = 30$$

$$K = \sqrt{\frac{10^2 + 50^2}{2}} = 36.06$$

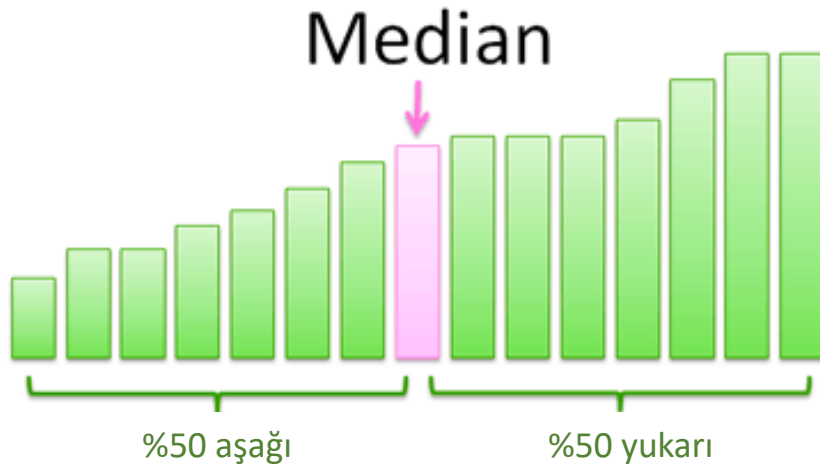
- **Örnek:** Bir işletmede gerçekleştirilen günlük üretim miktarının dağılımı aşağıda verilmiştir. Bu verilerden hareketle;
- Aritmetik ortalamayı,
- Geometrik ortalamayı,
- Harmonik ortalamayı,
- Kareli ortalamayı bulunuz.

Üretim (Kg)	f_i
0 – 60	10
60 – 100	20
100 – 120	40
120 – 140	50
140 – 180	45
180 – 250	35

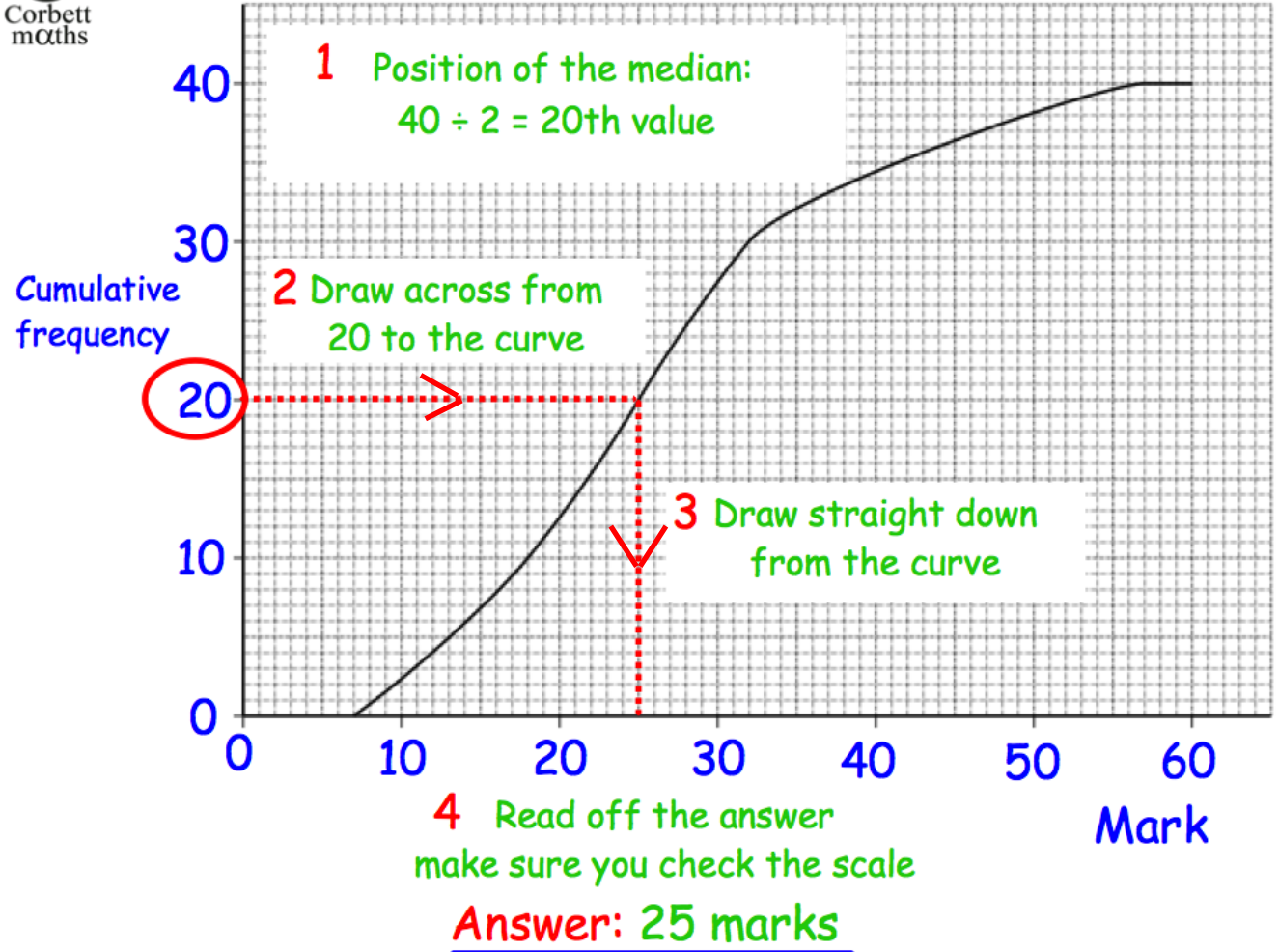
Serinin bütün değerlerine sahip olmayan (Analitik olmayan) ortalamalar

MEDYAN

- Birimleri küçükten büyüğe sıralanmış bir seride tam ortaya düşen ve dolayısıyla seriyi iki eşit kısma bölen birimin değerine "**Medyan**" denir.



Eklenik (kümülatif) frekans eğrisinden MEDYAN değerinin bulunması



MEDYAN

a. Basit Serilerde Medyan

Bunun için serideki değerler küçükten büyüğe sıralanır. Daha sonra medyana karşılık gelen değerlerin sıra değeri belirlenir.

Yedi kişilik bir grubun boy uzunlukları ölçülerek sıra ile şu sonuçlar elde edilmiştir.

1.69 1.56 1.80 1.64 1.67 1.71 1.62

Küçükten büyüğe sıralarsak:

Boy uzunluğu (m)

(x_i)

1.56

1.62

1.64

1.67

1.69

1.71

1.80



Medyan = 1.67

$$\frac{N + 1}{2}$$

Boy uzunluğu (m)

(x_i)

1.56

1.62

1.64

1.67

1.69

1.71

1.80

1.83



Medyan = $\frac{1.67 + 1.69}{2} = 1.68$

MEDYAN

b. Düzenlenmiş Serilerde Medyan

$$\frac{\sum f_i + 1}{2}$$

Örnek: 25 işçinin saat ücretlerini gösteren aşağıdaki düzenlenmiş seride medyanyı bulalım.

Saat ücretleri (\$)

İşçi sayısı

Kümülatif frekans

(x_i)

(f_i)

($\sum f_i$)

1

6

6

2

3

9

4

3

12

5

4

16

→ Medyan

6

3

7

2

8

1

9

3

25

$$\frac{N + 1}{2} = \frac{\sum f_i}{2} = \frac{25 + 1}{2} = 13$$

Bizim aradığımız 13. sıradaki işçi olduğuna göre kümülatif frekans sütununda, 12 değerinden sonraki değer olan 16'nın içindedir. Dolayısıyla Medyan = 5'tir.

Örnek: Bir atölyede çalışan işçilerin belli bir günde ürettikleri kusurlu parçalarının dağılımı verilmiştir. Bu verilerden hareketle işçi başına kusurlu parça sayısının medyanını belirleyiniz.

Kusurlu Parça sayısı	İşçi sayısı
10	2
12	3
15	4
16	6
18	10
20	5
21	4
25	2

MEDYAN

b. Gruplanmış Serilerde Medyan

- Gruplanmış serilerde, değerler tekil rakamlar halinde değil, sınıflar halindedir.
- Kümülatif frekanslar sütununda tam ortaya isabet eden birimin karşısında bu defa sınıf bulunacaktır.
- Bu sınıfa “medyan sınıfı” denir.

Örnek:

	Saat ücreti (\$)		
	Sınıflar	f_i	$\sum f_i$
	0 – 2’den az	6	6
	2 – 4’den az	3	9
Medyan ←	4 – 6’dan az	7	16
	6 – 8’den az	5	21
	8 – 10’dan az	4	25
		25	

$\frac{\sum f_i + 1}{2}$ 4 – 6 sınıfı medyan sınıfıdır. Medyan 4 ile 6 arasındadır.

Tam Medyanın Bulunuşu

$$\text{Medyan} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{m-1} f_i}{f_m} \cdot c$$

l_1 : Medyan sınıfının alt sınırı
 c : Medyan sınıfının sınıf aralığı

f_m : Medyan sınıfının frekansı
 $N/2$: Medyanın sıra değeri

$\sum_{i=1}^{\text{medyan}-1} f_i$: Medyan sınıfından önceki frekanslar toplamı

Örnek:

	Saat ücreti (\$)		
	Sınıflar	f_i	$\sum f_i$
	0 – 2'den az	6	6
	2 – 4'den az	3	9
Medyan ←	4 – 6'dan az	7	16
	6 – 8'den az	5	21
	8 – 10'dan az	4	25
		<u>25</u>	

4 – 6 sınıfı medyan sınıfıdır. Medyan 4 ile 6 arasındadır.

$$\text{Tam Medyan} = 4 + \left(\frac{\frac{25}{2} - 9}{7} \right) \times 2 = 5$$

$$\text{Medyan} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{m-1} f_i}{f_m} \cdot c$$

- **Örnek:** Bir işletmede işçilere ödenen haftalık ücretlerinin dağılımı aşağıda verilmiştir. Bu verilere göre medyan saat ücretini hesaplayınız.

Haftalık ücret (TL)	İşçi sayısı
500 – 600	10
600 – 700	50
700 – 800	40
800 – 1000	30
1000 – 1500	20
Toplam	150

$$\frac{\sum f_i + 1}{2} = \frac{150 + 1}{2} = 75.5'nci \text{ sıradaki değer (700 – 800 sınıfına düşen değer) medyandır}$$

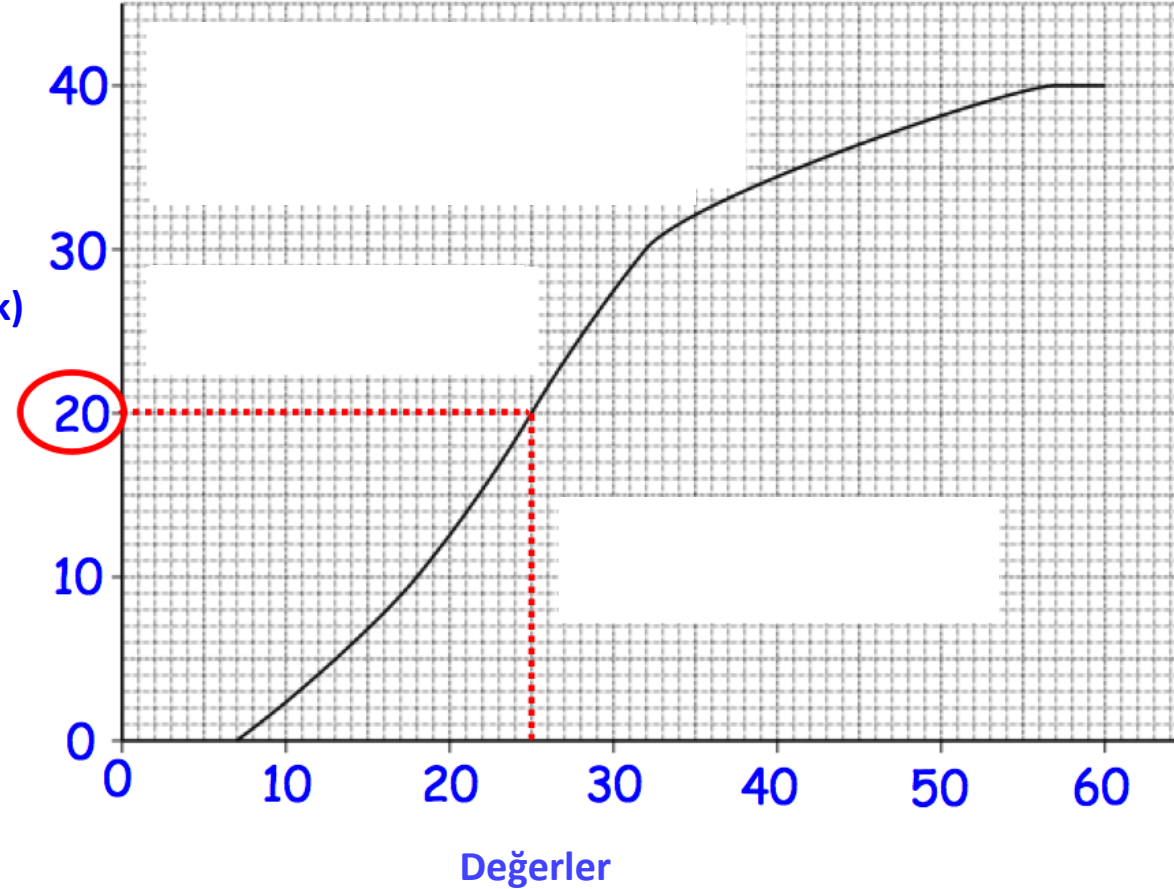
$$\text{Medyan} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{m-1} f_i}{f_m} \cdot c \longrightarrow \text{Medyan} = 700 + \frac{\frac{150}{2} - 60}{40} \times 100 = 737.5 \text{ TL/hafta}$$

Medyanın Grafik Yöntemle Bulunması

Eklenik (kümülatif, toplam) frekans eğrisinden MEDYAN değerinin bulunması



Toplam (eklenik)
frekans



Saat ücreti (\$)
Sınıflar

0 – 2
2 – 4
4 – 6
6 – 8
8 – 10

f_i

6
3
7
5
4

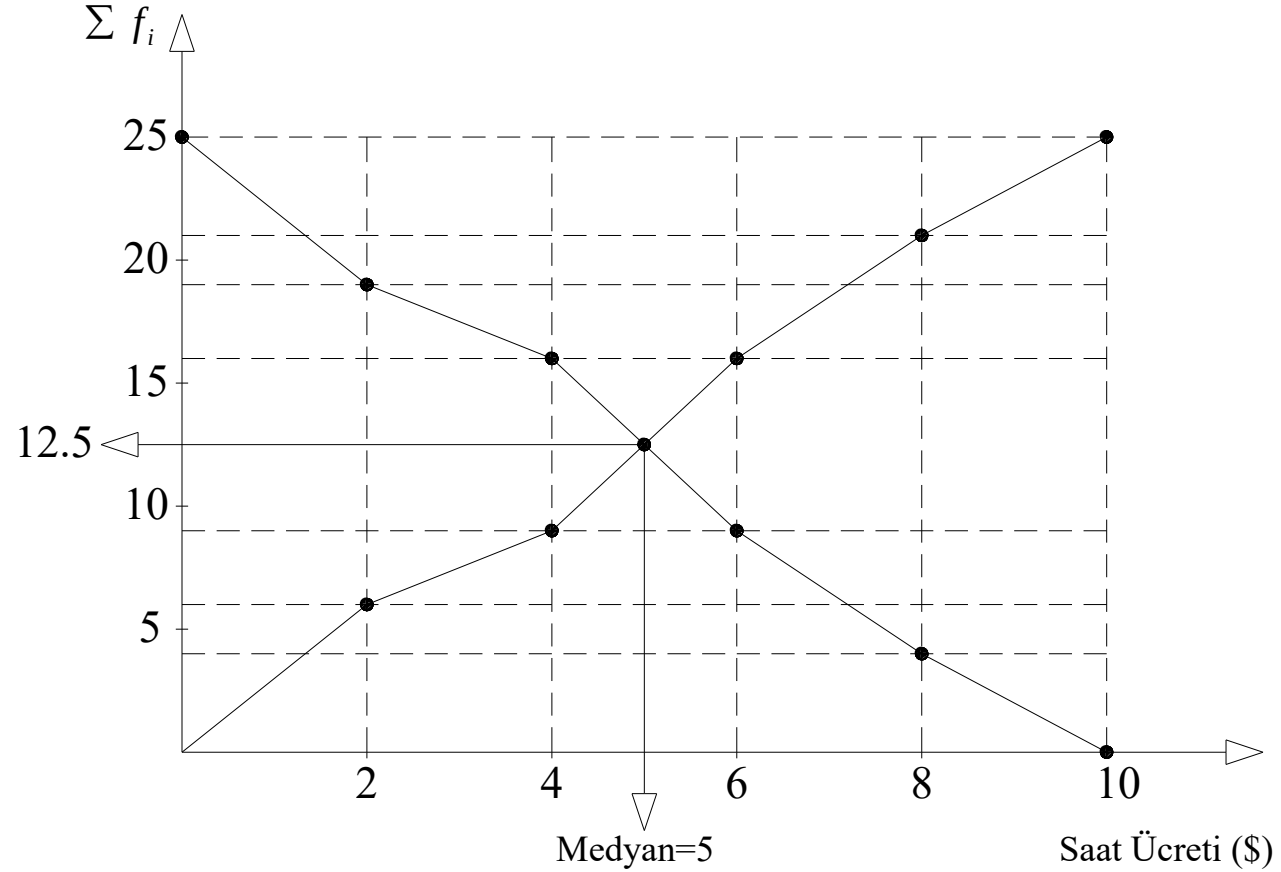
Kümülatif Frekanslar

<<den az>>

6
9
16
21
25

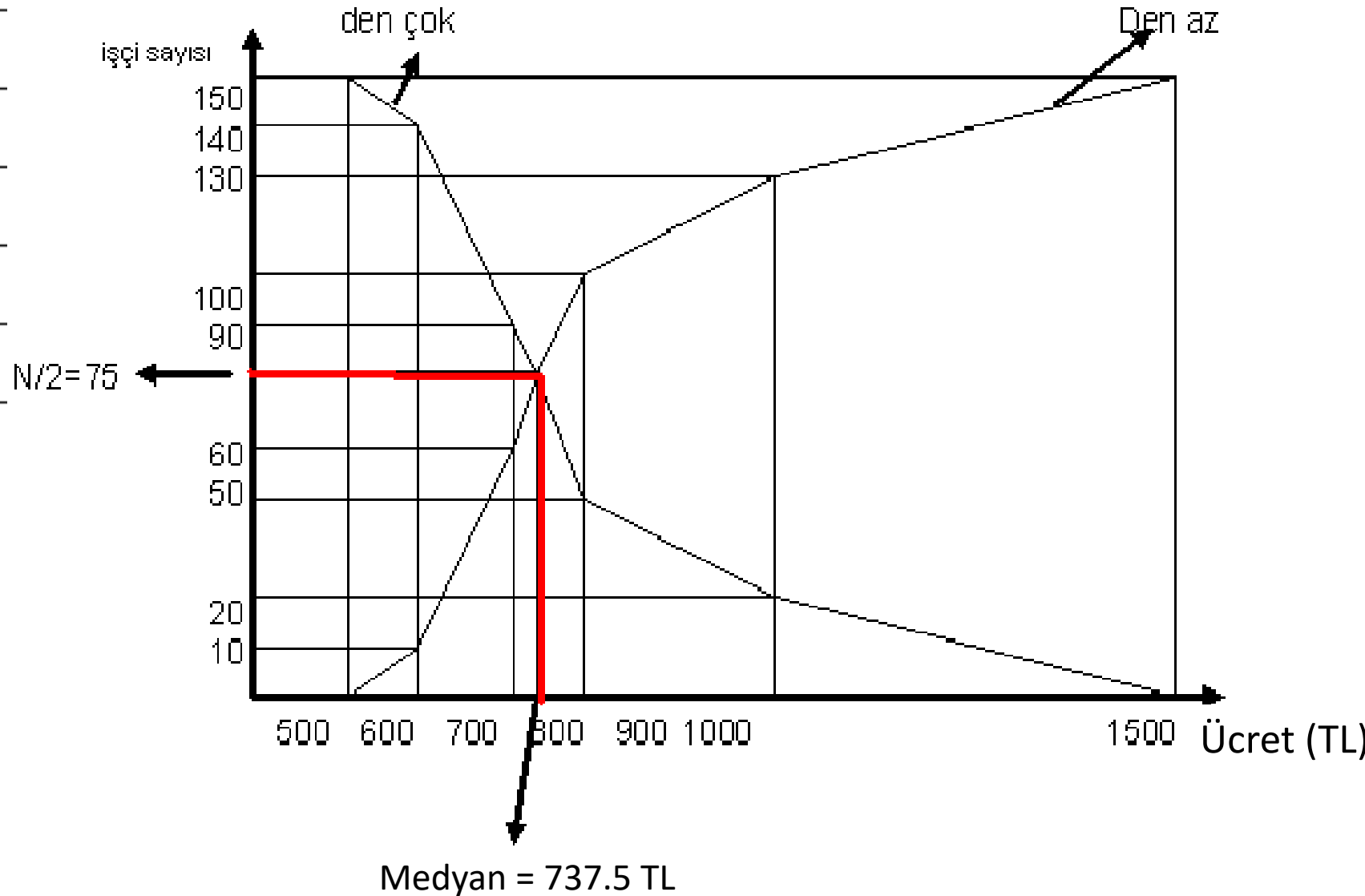
<<den çok>>

25
19
16
9
4



Kümülatif frekans dağılımı	
Ücret (TL)	f_i
500 den az	0
600 den az	10
700 den az	60
800 den az	100
1000 den az	130
1500 den az	150

$$Medyan = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{m-1} f_i}{f_m} \cdot c$$



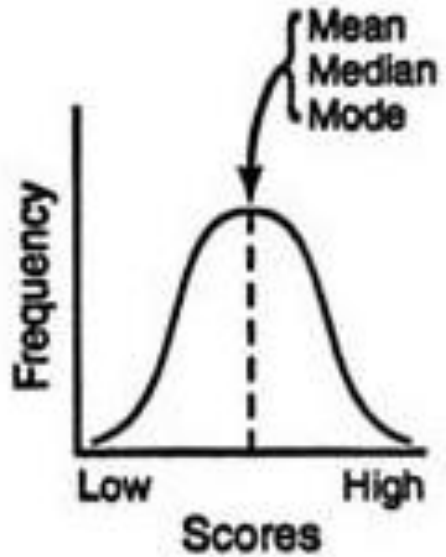
Medyanın Özellikleri

- 1- Pratik bir ortalama değildir. Çünkü sadece **basit bir sıralama** işlemi gerektirir.
- 2- Özellikle açık sınıflı seriler için (alt ve üst sınırları belli olmayan) medyan daha bir önem kazanır. Bu tür serilerde diğer ortalamalar ya hesaplanamaz, ya da açık sınıflar için sınıf sınırları farazi olarak seçilerek hesaplanabilir.
- 3- Serideki **aşırı değerlere karşı hassas değildir**. Çünkü medyan serinin ortasına rastladığından, uçlarda oluşan aşırı değerler medyanı etkilemez.
- 4- Medyanın zayıf tarafı serideki bütün değerleri dikkate almaması sebebi ile matematik işlemlere uygun olmamasıdır.

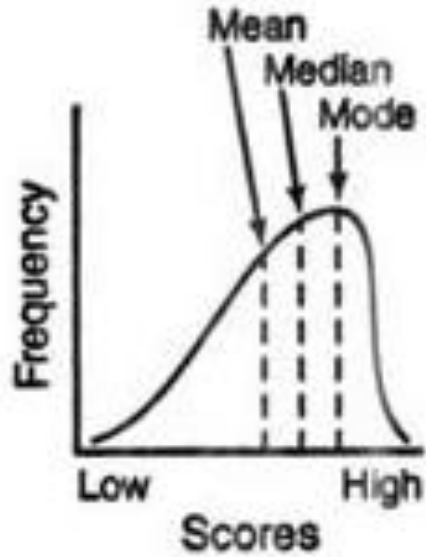
Serinin bütün değerlerine sahip olmayan (Analitik olmayan) ortalamalar

MOD

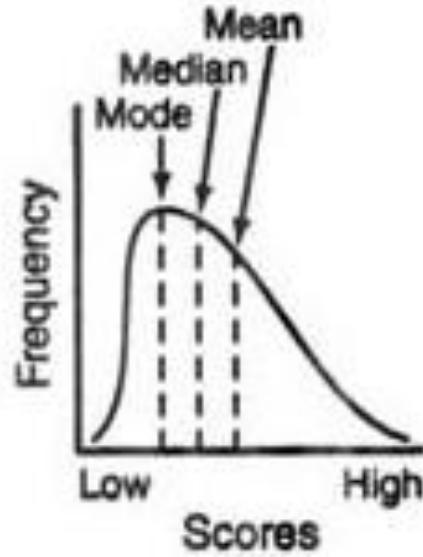
- Bir seride en çok tekrarlanan değere mod adı verilir.
- Verilerin simetrik bir dağılış göstermediği durumlarda iyi bir ölçüdür.
- Seride en fazla rastlanan ya da frekansı en yüksek olan değer mod olarak ifade edilir.



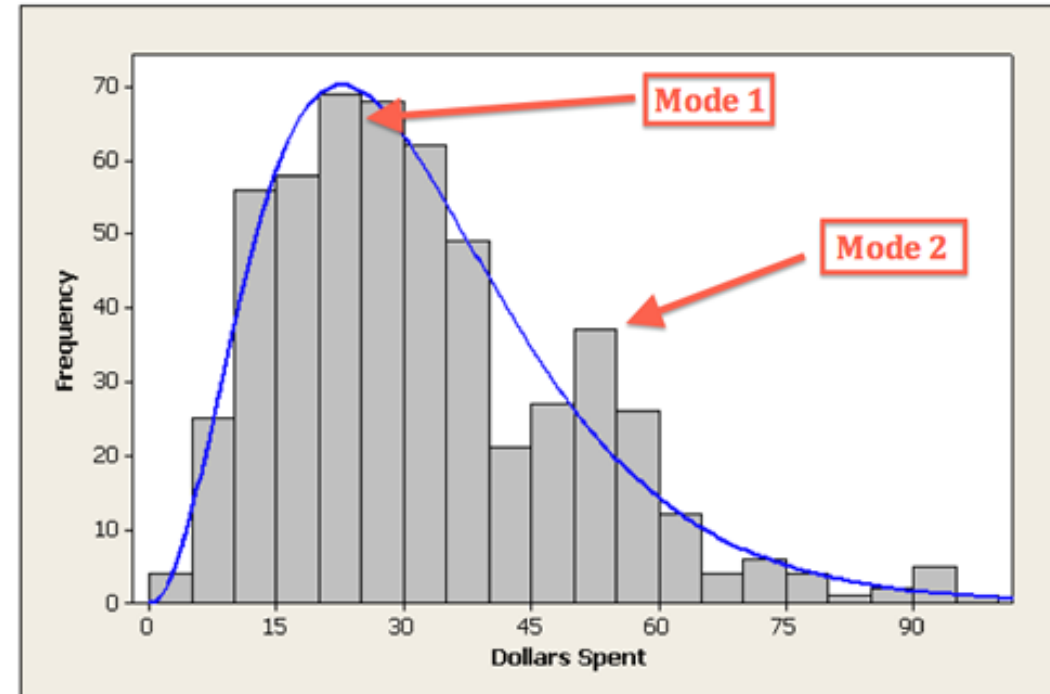
(a)



(b)



(c)



Örnek: Adapazarı'nda 2011 ile 2018 yılları arasında Nisan aylarındaki yağışlı gün sayısı için aşağıdaki iki veri elde edilmiştir. Nisan ayı yağışlı gün sayısının modunu bulunuz.

Yıllar	Yağışlı gün sayısı
2011	3
2012	4
2013	5
2014	5
2015	5
2016	6
2017	6
2018	7

Mod = 5 gün

Düzenlenmiş Serilerde Mod

Örnek:

Boy Uzunluğu
(x_i)

1.60
1.61
1.63
1.64
1.65
1.66

f_i

3
4
12
9
2
2

40

→ Mod

Gruplanmış Serilerde Mod

- Gruplanmış seride modü belirleyebilmek için önce modun içinde bulunduğu sınıf belirlenir.
- “Mod sınıfı” frekansı en fazla olan sınıftır.

<u>Ücret Sınıfları (\$)</u>	<u>f_i</u>
20 – 30’dan az	27
30 – 40’dan az	43
40 – 50’den az	58
50 – 60’dan az	33
60 – 70’den az	17
70 – 80’den az	5
80 – 90’dan az	2
$\Sigma f = 185$	

$$Mod = \frac{40 + 50}{2} = 45$$

Tam Mod

- Gruplanmış seride modun hesaplanabilmesi için serinin sınıf aralığının eşit olması gerekir.
- Eğer sınıf aralıkları eşit değilse eşit hale getirmek gerekir.

$$Mod = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot c$$

l_1 : mod sınıfının alt sınırı

Δ_1 : mod sınıfı frekansından bir önceki sınıf frekansının farkı,

Δ_2 : mod sınıfı frekansından bir sonraki sınıf frekansının farkı,

c : seride sabit olan sınıf aralığı

Ücret Sınıfları (\$)	f_i	
20 – 30’dan az	27	
30 – 40’dan az	43	
40 – 50’dan az	58	Mod sınıfı
50 – 60’dan az	33	
60 – 70’dan az	17	
70 – 80’dan az	5	
80 – 90’dan az	2	
	$\Sigma f=185$	

$$Mod = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot c$$

$$Tam\ Mod = 40 + \left(\frac{(58 - 43)}{(58 - 33) + (58 - 43)} \right) \times 10 = 43.75$$

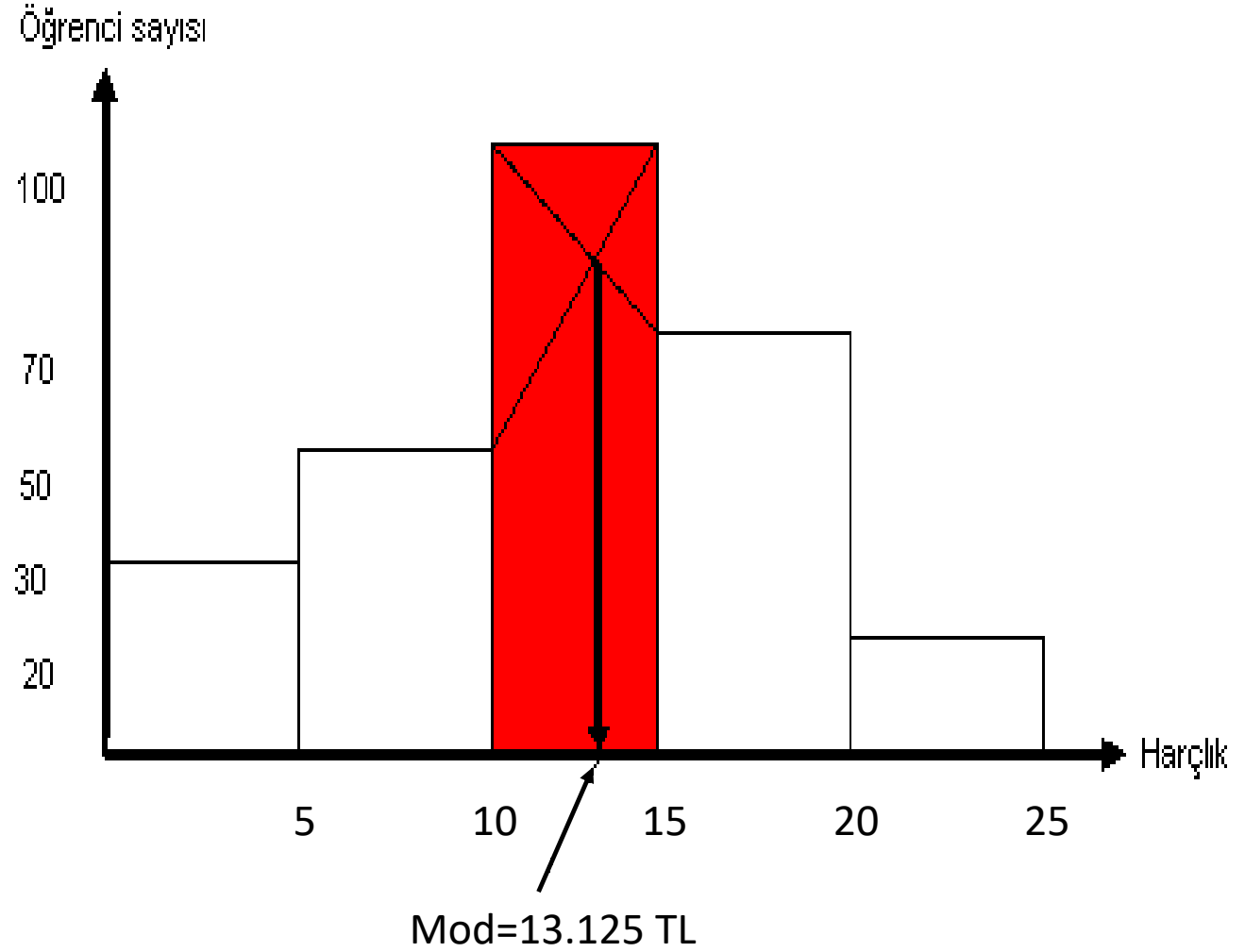
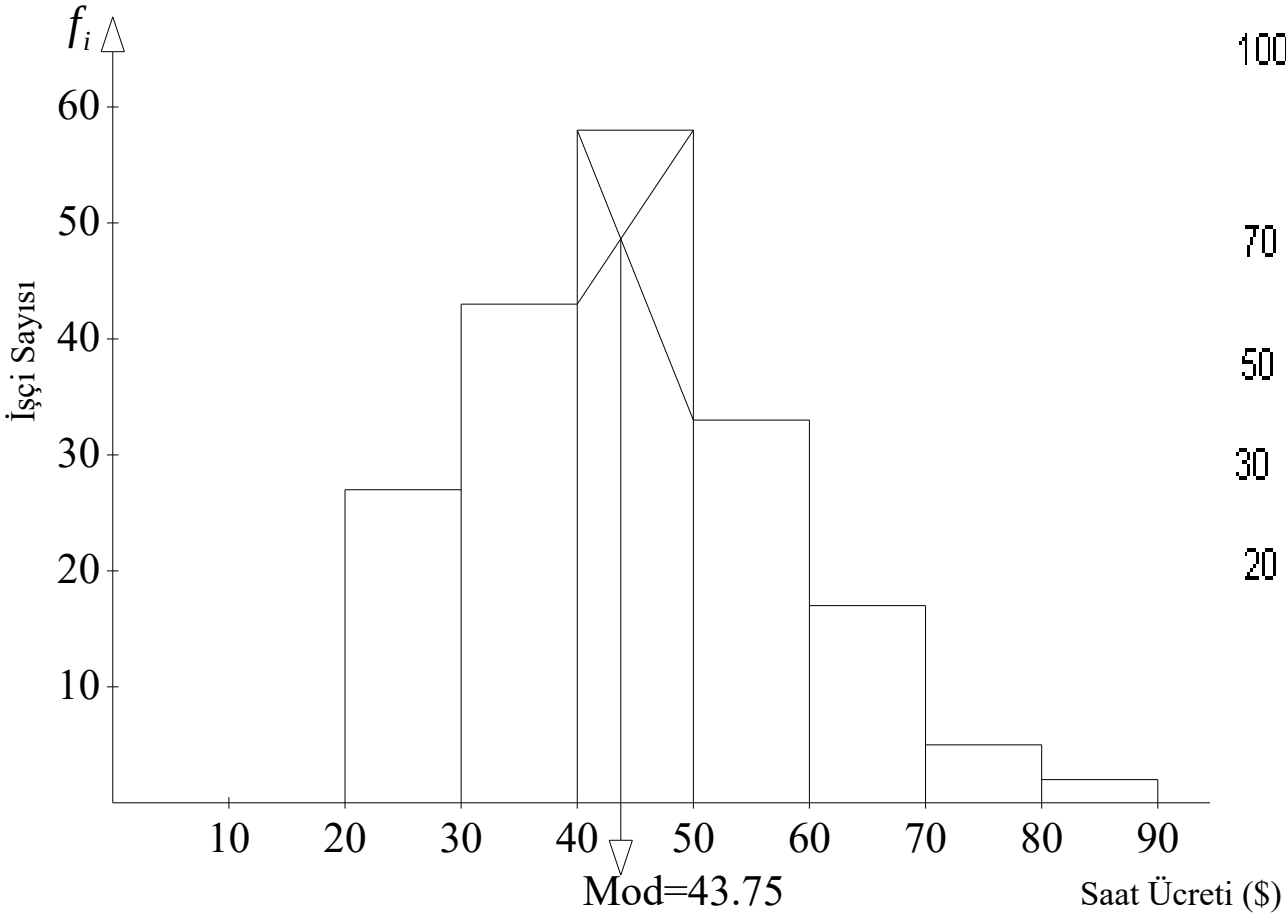
- **Örnek** Bir ilköğretim okulunda öğrencilerin günlük olarak aldıkları harçlıkların dağılımı aşağıda verilmiştir. Öğrencilerin aldıkları günlük harçlık miktarının modunu ile belirleyiniz.

Harçlık (TL/gün)	Öğrenci sayısı	
0 – 5	30	$l_1 = 10$
5 – 10	50	$\Delta_1 = 100 - 50 = 50$
10 – 15	100	→Mod sınıfı
15 – 20	70	$\Delta_2 = 100 - 70 = 30$
20 – 25	20	$s = 5$

$$Mod = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot s \Rightarrow Mod = 10 + \frac{50}{50 + 30} \cdot 5 \Rightarrow Mod = 13.125$$

$$Mod = 13.125 \text{ TL / gün}$$

Modun Grafik Yöntemle Bulunması



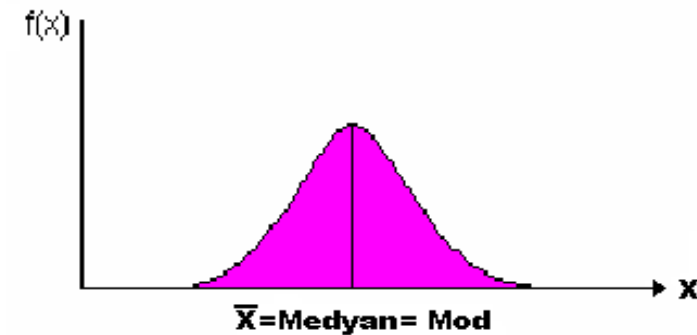
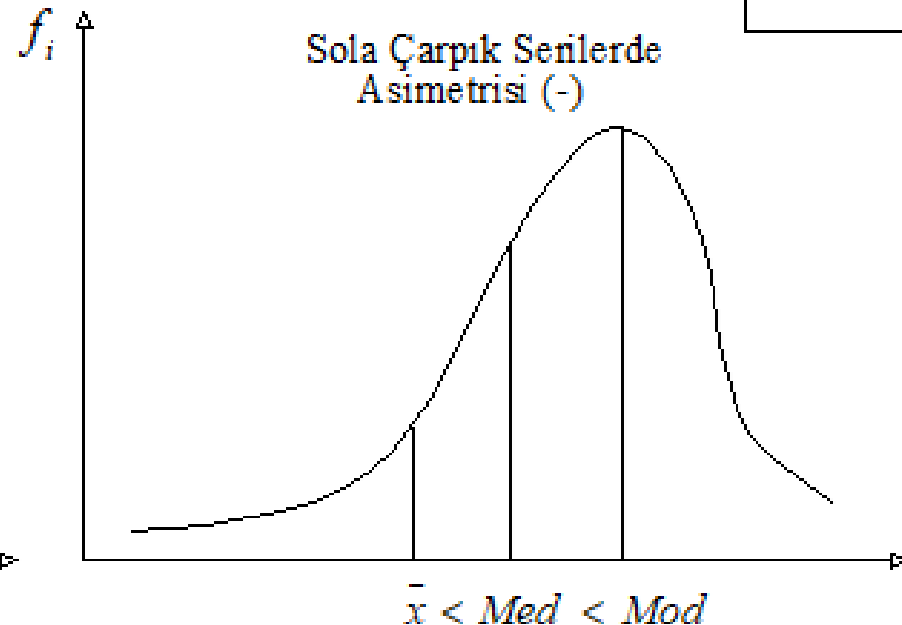
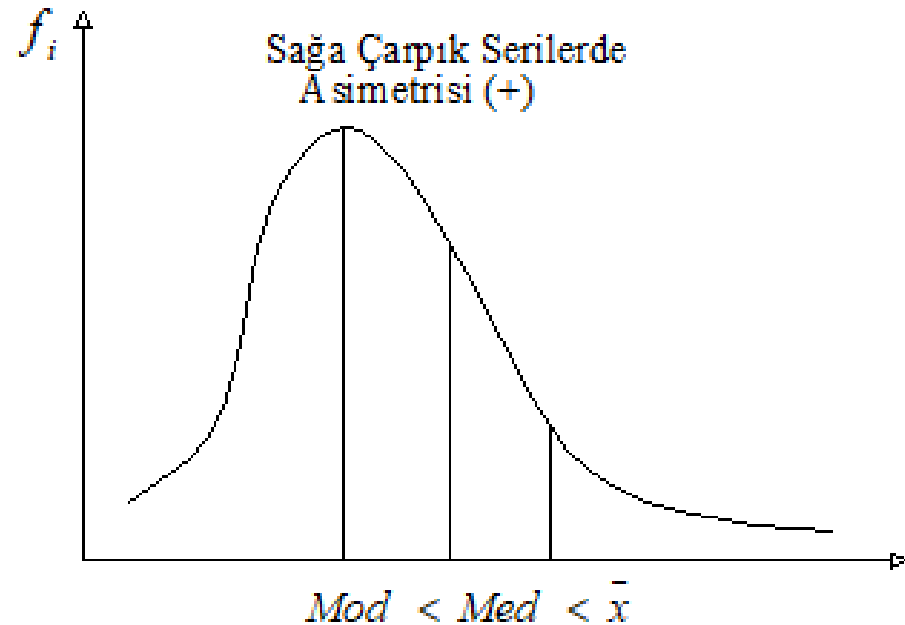
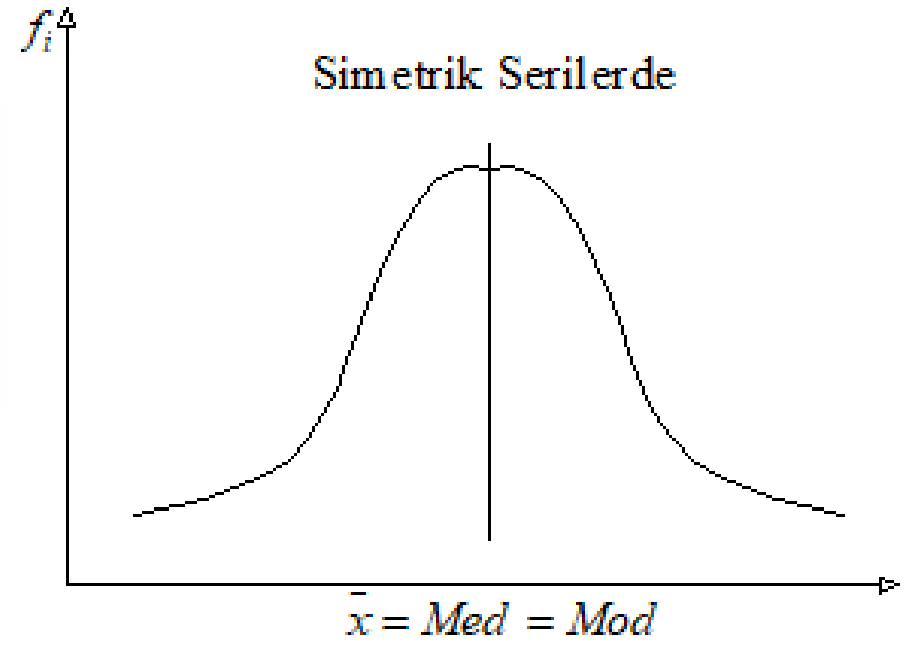
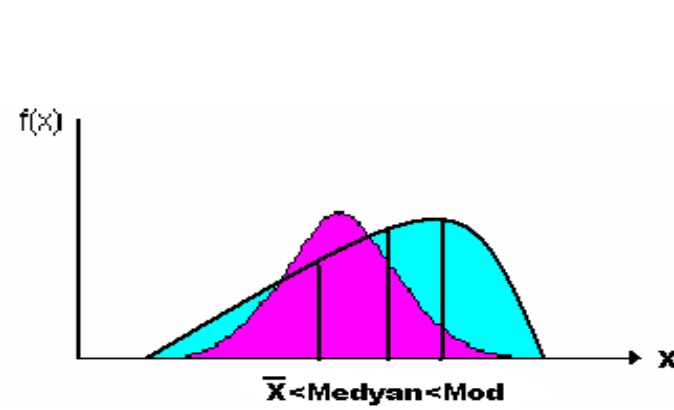
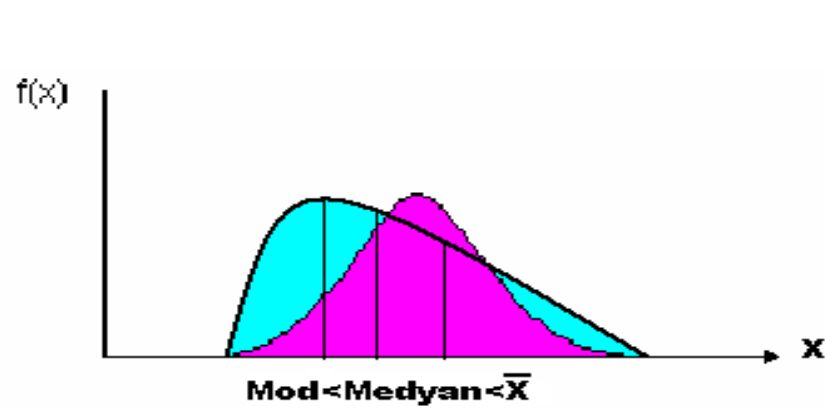
Modun Özellikleri

- Ortalamalar arasında en temsili olanıdır.
- Pratik hayatta çok kullanılan ortalamalardandır
- Özellikle kalitatif (niteliksel) serilerin ortalaması mod ile ifade edilir. Göz rengi, medeni hal, marka, cinsiyet v.s gibi değişkenler kalitatif değişkenler olup sayısal olarak ifade edilemezler
- Mod serideki aşırı değerlere karşı hassas değildir. Çünkü normal serilerde mod genellikle serinin orta bölgesinde yer alır, uç değerlerden etkilenmez.
- Yukarıdaki avantajlarının yanında analitik olmaması sebebi ile matematik işlemlere elverişli olmaması dezavantajıdır.

- **Örnek:** Aşağıda bir parçanın üretim süreleri verilmiştir. Bu parçanın üretim sürelerinin
 - a) Aritmetik (13,52)
 - b) Geometrik (12,77)
 - c) Harmonik (12,03)
 - d) Kareli ortalamalarını (14,25)
 - e) modunu bulunuz.

Üretim süresi	Parça sayısı (f_i)
5-9	4
9-13	10
13-17	7
17-21	4
21-25	2
Toplam	27

Aritmetik Ortalama, Medyan ve Mod Arasındaki İlişkiler



- Asimetri az ise,

$$(\bar{X} - \text{Mod}) \cong 3(\bar{X} - \text{Medyan})$$

Sınıflar	m_i	f_i	$f_i m_i$	$\sum f_i$
1 – 3’den az	2	7	14	7
3 – 5’den az	4	26	104	33
5 – 7’den az	6	40	240	73
7 – 9’dan az	8	24	192	97
9 – 11’den az	10	3	30	100
	Toplam	100	580	

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot m_i}{\sum f_i} = \frac{580}{100} = 5.8$$

$$\text{Mod} \cong \bar{x} - 3(\bar{x} - \text{Med})$$

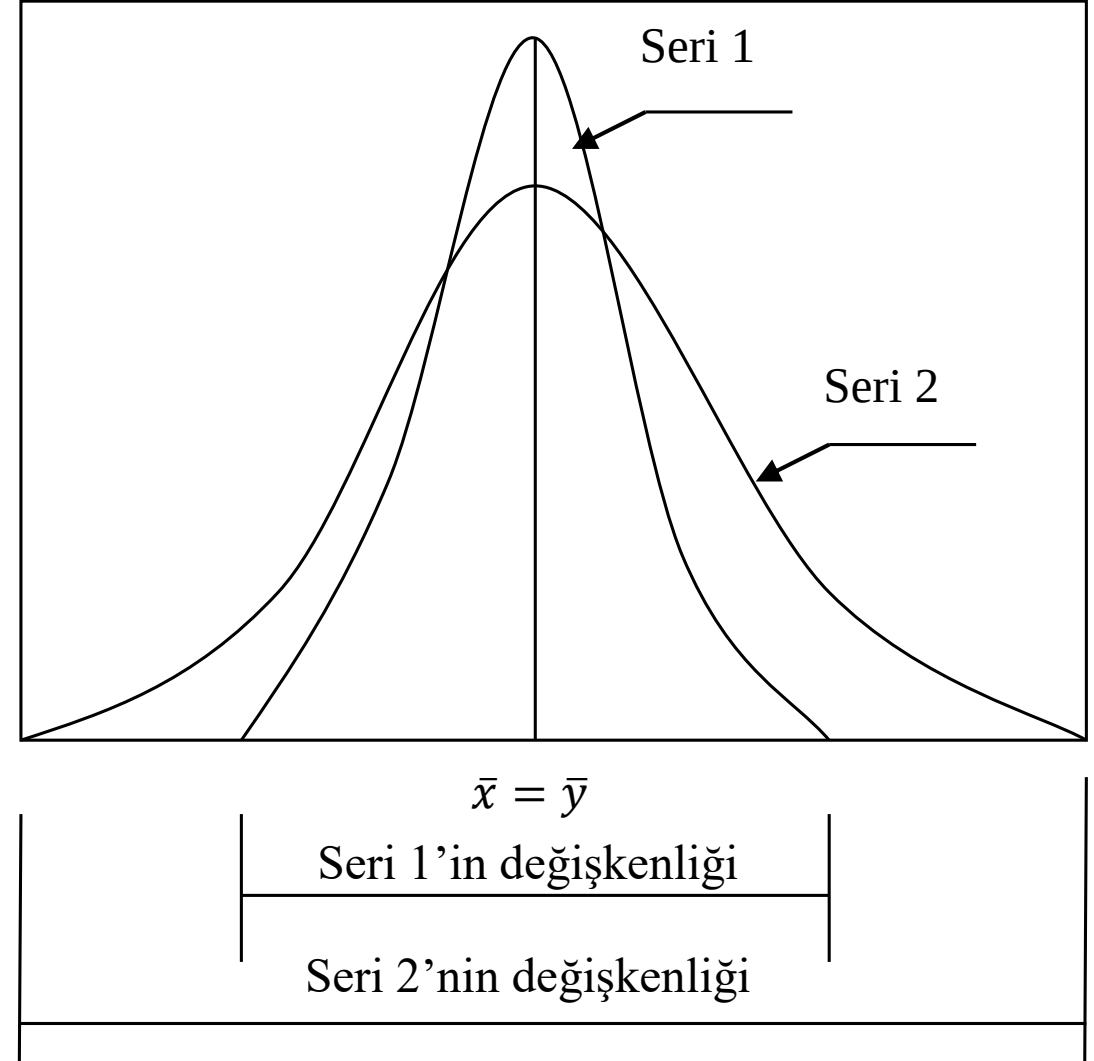
$$\text{Med} = 5.85, \text{Mod} = 5.94$$

$$\cong 5.85 - 3(5.8 - 5.85) \cong 5.95$$

DAĞILMA (DEĞİŞKENLİK) VE FREKANS BÖLÜNMESİNİN ŞEKLİ

x_i	y_i
20	1
22	4
23	10
25	45
30	60
$\bar{x} = 24$	$\bar{y} = 24$

Anlamli ortalama??



DAĞILMA ÖLÇÜLERİ

A. Mutlak Dağılma Ölçüleri

- Değişim Aralığı
- Kartiller ve Desiller Arası Aralık
- Ortalama Sapma
- Standart Sapma

B. Oransal (Nisbi) Dağılma Ölçüleri

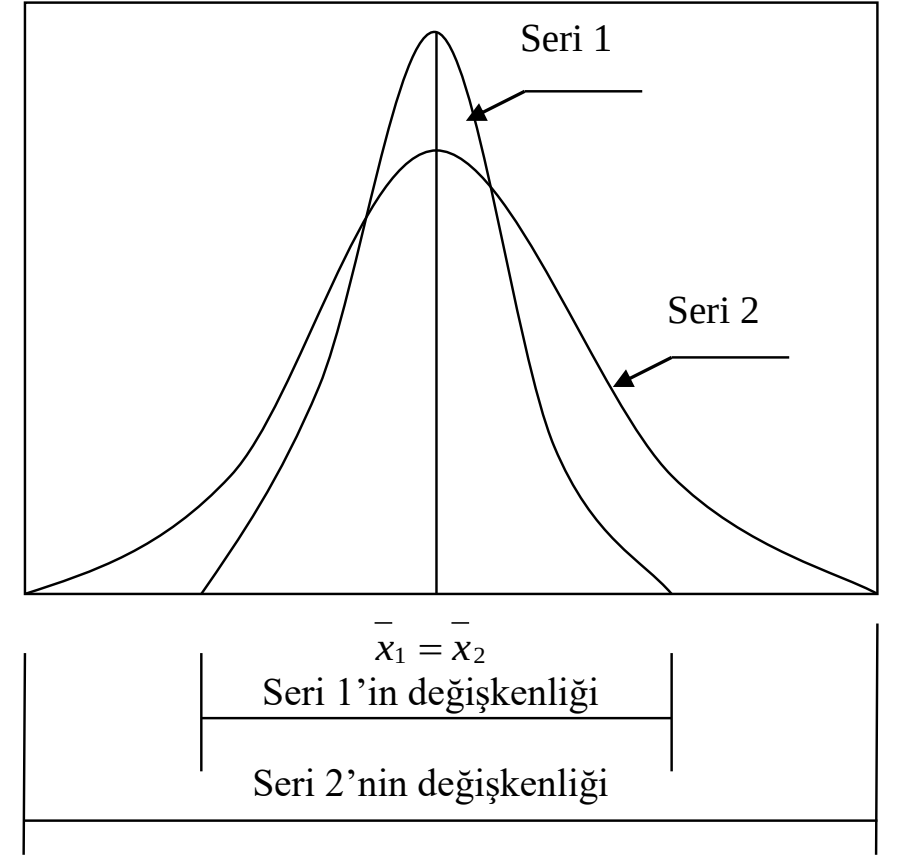
- Değişim Katsayısı

DEĞİŞİM ARALIĞI (RANGE)

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Örnek: Aşağıdaki serilerin değişim aralığını (R) bulunuz.

x_i	y_i
20	1
22	4
23	10
25	45
30	60



$$R_x = 30 - 20 = 10$$

$$R_y = 60 - 1 = 59' \text{ dur.}$$

- Anormal değerlere karşı çok hassastır.
- Sadece iki uç değeri dikkate alması diğer gözlem değerlerinin dağılımının hiç dikkate alınmamasına sebep olmaktadır.

KARTİLLER ARASI VE DESİLLER ARASI ARALIK

- Bir serinin elemanları küçükten büyüğe doğru sıralandığında,
Kartil: seriyi dört eşit parçaya bölen değerler,
Desil: on eşit parçaya bölen değerler,
Santil: yüz eşit parçaya bölen değerler

2.kartil= 5.desil= 50.santil = medyan

Basit ve düzenlenmiş edilmiş serilerde kartil, desil ve santilin sıra değerleri $\frac{Nh}{r} + 0.5$

N: Serinin toplam gözlem sayısı

h: Q, D veya C nin derecesi

r: Bölen değer → Q için 4, D için 10, C için 100 değerini alır.

Q, D, C nin serideki değeri saymak suretiyle bulunur. Eğer bu değer kesirli ise Q, D, C iki sayının arasına düşer.

Örnek: $X_i: 5, 8, 9, 12, 18, 22, 23, 28, 32, 45, 54, 67, 71, 75, 84$ seri değerleri verilmiştir. Bu verilerden hareketle;

a) Q_1 'i (1.kartili)

b) D_8 'i (8.desili)

c) C_{38} 'i (38.santili) bulunuz.

a) $N=15$ Q_1 'in sıra değeri $\frac{Nh}{r} + 0.5 = \frac{15 \cdot 1}{4} + 0.5 = 4.25$

4,25. sıradaki değer 12;18 aralığına düşmektedir.

$$Q_1 = 0,75 \cdot 12 + 0,25 \cdot 18 \quad \mathbf{Q_1 = 13,5}$$

b) D_8 'in sıra değeri : $\frac{15 \cdot 8}{10} + 0,5 = 12,5$

$$D_8 = D_8 = 0,5 \cdot 67 + 0,5 \cdot 71 \Rightarrow \mathbf{D_8 = 69}$$

c) C_{38} 'in sıra değeri $\frac{15 \cdot 38}{100} + 0,5 = 6,2$

$$C_{38} = 0,8 \cdot 22 + 0,2 \cdot 23 \Rightarrow \mathbf{C_{38} = 22,2}$$

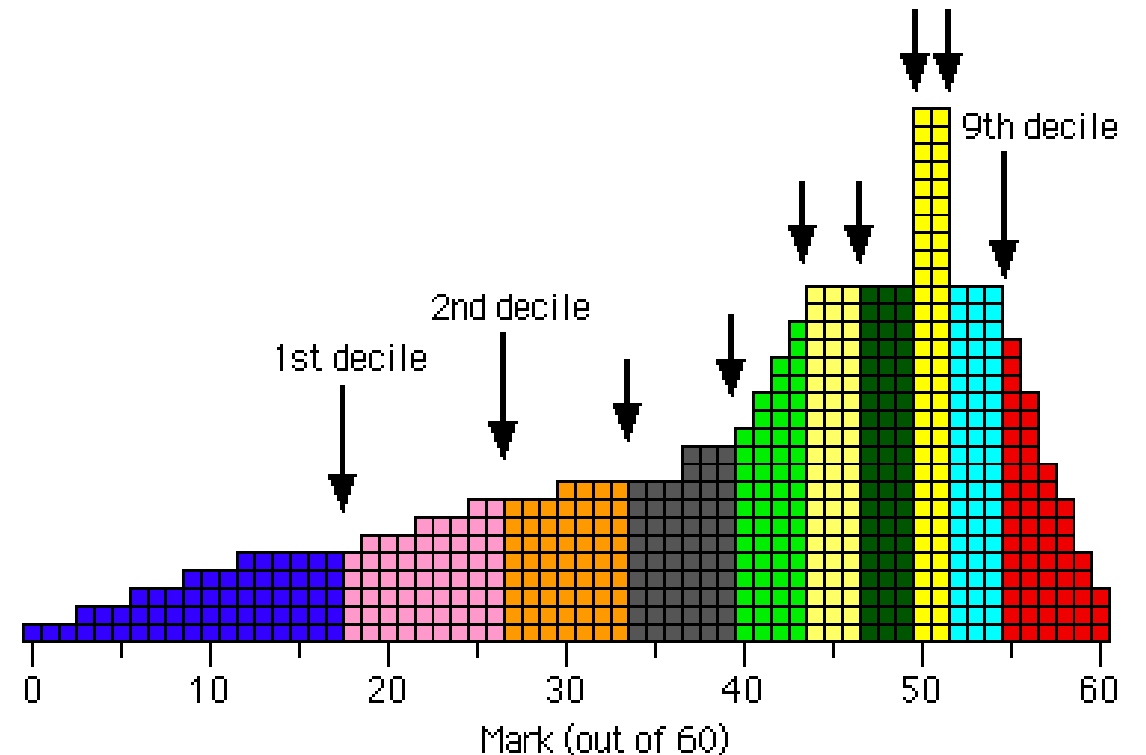
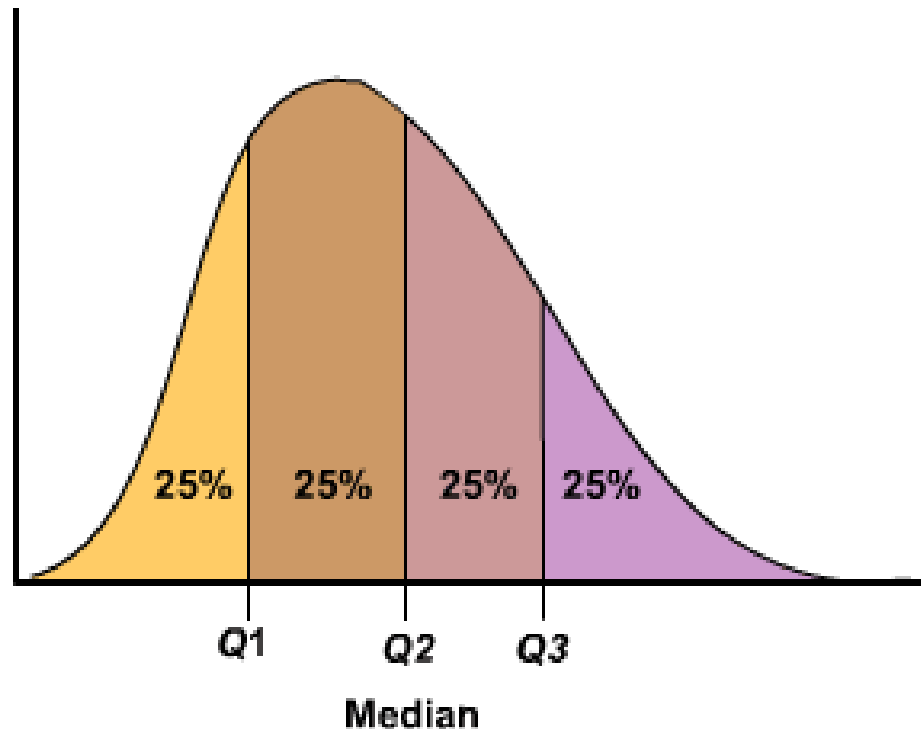
Kartil Aralığı: $Q = Q3 - Q1$

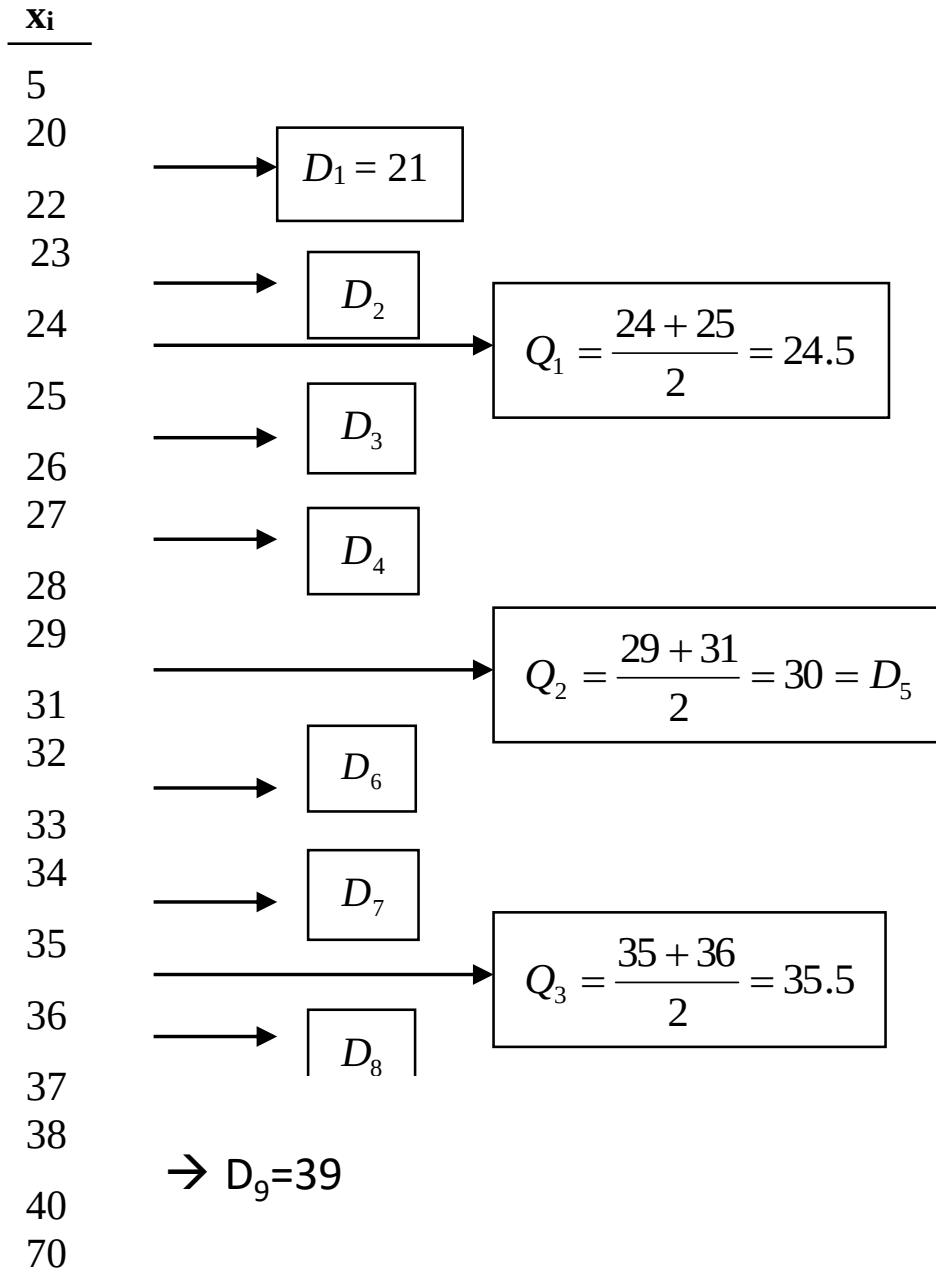
→ %50'lik gözlem kümesinin değişim aralığı

Desil Aralığı : $D = D9 - D1$

→ %80 lik gözlem değerinin değişim aralığı

Kartil veya desil aralığı daha büyük olan serideki dağılıma daha fazladır.





$$\frac{Nh}{r} + 0.5$$

$$R = 70 - 5 = 65$$

$$Q = 35.5 - 24.5 = 11$$

$$D = 39 - 21 = 18$$

Gruplanmış Serilerde Tam Kartil Bulunuşu;

$$Q_t = Q_{t/T} = \ell_1 + \left(\frac{\frac{t}{T} \times N - (\sum f_i)_{i-1}}{f_{qkartil}} \right) \times s_q$$

$T=4$ = Sabit(3 kartil seriyi 4 eşit parçaya böler)

t = aranan kartilin sayısı

ℓ_1 = Kartil sınıfının alt sınırı

$(\sum f_i)_{i-1}$ = Toplam frekans sütununda kartil sınıfından bir önceki değer

$f_{qkartil}$ = Kartil sınıfının frekansı

s_q = Sabit kalması gereken sınıf aralığı

Örnek:

Bir işletmede belli bir parçayı üreten işçinin bu parçayı üretim süresi gözlemlenmiş ve aşağıdaki veriler elde edilmiştir. Bu verilere göre parça üretim süresinin;

a) Değişim aralığını

b) Kartil aralığını

c) Desil aralığını bulunuz.

Üretim Süresi	Parça Sayısı	Σf_i
30-35	10	10
35-37	30	40
37-40	40	80
40-42	35	115
42-50	20	135
50-60	5	140

a) Değişim aralığı

Çözüm: a) $R = X_{\max} - X_{\min}$
 $R = 60 - 30 = 30$ dakika

b) $Q = Q_3 - Q_1$

Q3 için sıra $\frac{N \cdot h}{r} = \frac{140 \cdot 3}{4} = 105$

Bu değer 40-42 sınıfındadır.

$$Q_3 = 40 + \left(\frac{\frac{3}{4} \cdot 140 - 80}{35} \right) \cdot 2 = 41.43$$

Q1 için sıra $\frac{N \cdot h}{r} = \frac{140 \cdot 1}{4} = 35$

$$Q_1 = 35 + \left(\frac{\frac{1}{4} \cdot 140 - 10}{30} \right) \cdot 2 = 36.67$$

c) Desil aralığını bulunuz

Desil aralığı **D = 46,4 - 35.27 = 11.13** dakika

Üretim Süresi	Parça Sayısı	Σf_i
30-35	10	10
35-37	30	40
37-40	40	80
40-42	35	115
42-50	20	135
50-60	5	140

Kartil aralığı **Q = 41,43 - 36.67 = 4,76** dakika

$$\frac{N \cdot h}{r} = \frac{140 \cdot 1}{10} = 14 \quad 35 + \left(\frac{\frac{1 \cdot 140}{10} - 10}{30} \right) \cdot 2 = 35.27$$

$$\frac{140 \cdot 9}{10} = 126. \quad 42 + \left(\frac{\frac{9 \cdot 140}{10} - 115}{20} \right) \cdot 8 = 46.4$$

Örnek: Bir şirkette çalışan 476 kişinin \$ olarak aylık maaşlarının frekans dağılımı aşağıda verilmiştir. Buna göre kartilleri bulunuz.

Maaş (\$)	f_i	Σf_i
500-800	93	93
800-1100	103	196
1100-1400	89	285
1400-1700	55	340
1700-2000	61	401
2000-2300	56	457
2300-2600	13	470
2600-2900	6	476
	Σ 476	

$$Q_1 = Q_{1/4} = \ell_1 + \left(\frac{\frac{t}{T} \times N - (\sum f_i)_{i-1}}{f_{qkartil}} \right) \times s_q = 800 + \left(\frac{\frac{1}{4} \times 476 - 93}{103} \right) \times 300 = 875,73 \$$$

$$Q_2 = Q_{2/4} = \ell_1 + \left(\frac{\frac{t}{T} \times N - (\sum f_i)_{i-1}}{f_{qkartil}} \right) \times s_q = 1100 + \left(\frac{\frac{2}{4} \times 476 - 196}{89} \right) \times 300 = 1241,57 \$$$

$$Q_3 = Q_{3/4} = \ell_1 + \left(\frac{\frac{t}{T} \times N - (\sum f_i)_{i-1}}{f_{qkartil}} \right) \times s_q = 1700 + \left(\frac{\frac{3}{4} \times 476 - 340}{61} \right) \times 300 = 1783,61 \$$$

ORTALAMA SAPMA

Bir serideki değerlerin aritmetik ortalamadan mutlak sapmalarının aritmetik ortalamasıdır.

a) Basit serilerde
$$O.S. = \frac{\sum_i^N |x_i - \bar{x}|}{N} = \overline{|x - \bar{x}|}$$

Seri I

x_i	$ x_i - \bar{x} $
20	$20 - 24 = 4$
22	$22 - 24 = 2$
23	$23 - 24 = 1$
25	$25 - 24 = 1$
30	$30 - 24 = 6$
$\bar{x} = \frac{120}{5} = 24$	$\sum x_i - \bar{x} = 14$

$$O.S. = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{14}{5} = 2.8$$

Seri II

x_i	$ x_i - \bar{x} $
1	$1 - 24 = 23$
4	$4 - 24 = 20$
10	$10 - 24 = 14$
45	$45 - 24 = 21$
60	$60 - 24 = 36$
$\bar{x} = \frac{120}{5} = 24$	$\sum x_i - \bar{x} = 114$

$$O.S. = \frac{114}{5} = 22.8$$

ORTALAMA SAPMA

b) Düzenlenmiş serilerde $O.S. = \frac{\sum_{i=1}^n f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i |x_i - \bar{x}|}{N}$

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i \cdot x_i - \bar{x} $
4	4	16	$4 - 8 = 4$	16
6	3	18	$6 - 8 = 2$	6
10	2	20	$10 - 8 = 2$	4
14	1	14	$14 - 8 = 6$	6
20	1	20	$20 - 8 = 12$	12
	11	88		44

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{88}{11} = 8$$

$$O.S. = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{44}{11} = 4$$

ORTALAMA SAPMA

Gruplanmış serilerde $O.S. = \frac{\sum_{i=1}^n f_i |m_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i |m_i - \bar{x}|}{N}$

Sınıflar	f_i	m_i	$ m_i - \bar{x} $	$f_i \cdot m_i - \bar{x} $
0 – 2	6	1	$1 - 4.84 = 3.84$	23.04
2 – 4	3	3	$3 - 4.84 = 1.84$	5.52
4 – 6	7	5	$5 - 4.84 = 0.16$	1.12
6 – 8	5	7	$7 - 4.84 = 2.16$	10.80
8 – 10	4	9	$9 - 4.84 = 4.16$	16.64

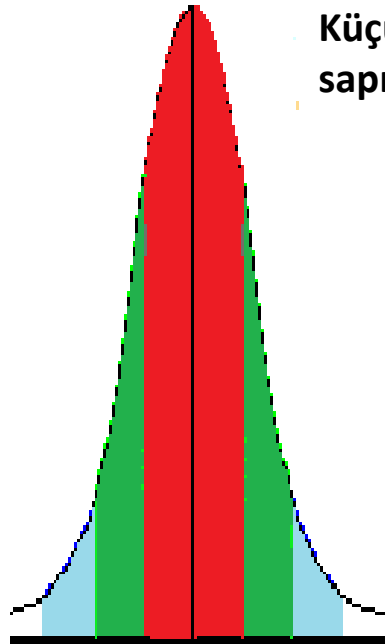
$$\sum f_i = 25 \quad \bar{x} = \frac{6 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + \dots + 4 \cdot 9}{25} = 4.84 \quad \sum f_i \cdot |m_i - \bar{x}| = 57.12$$

$$O.S. = \frac{\sum f_i |m_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{57.12}{25} = 2.285$$

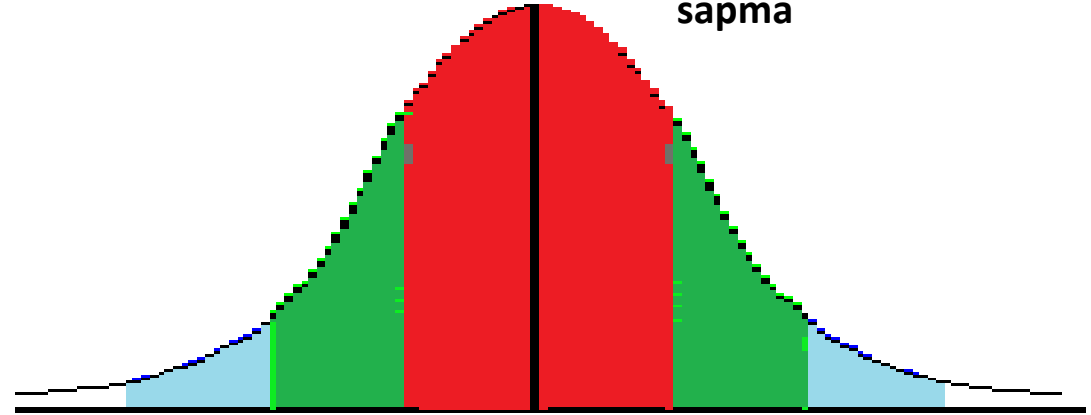
STANDART SAPMA

- Bir serinin standart sapması (σ), değerlerin aritmetik ortalamadan cebirsel sapmalarının kareli ortalamasıdır.
- Standart sapmanın karesine (σ^2) **varyans** adı verilir.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$



Küçük standart sapma



Büyük standart sapma

Notlar

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
2	$2 - 5 = -3$	9
4	$4 - 5 = -1$	1
9	$9 - 5 = 4$	16
$\bar{x} = 5$		$\sum = 26$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{26}{3}} = \sqrt{8.67} = 2.94$$

Her öğrencinin notunun serinin aritmetik ortalamasına (5'e) göre ortalama olarak 2.94 kadar farklı olduğu anlaşılmaktadır.

Düzenlenmiş serilerde standart sapma

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

Gündelik ücret (\$) İşçi sayısı

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
50	5	250	50 - 69 = -19	361	1805
80	3	240	80 - 69 = 11	121	363
100	2	200	100 - 69 = 31	961	1922
	10	690			$\Sigma = 4090$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{690}{10} = 69 \text{ \$}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{4090}{10}} = 20.22 \text{ \$}$$

Gruplanmış serilerde standart sapma

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

İşçi sayısı					
Ücret sınıfları (\$)	f_i	m_i	$(m_i - \bar{x})$	$(m_i - \bar{x})^2$	$f_i (m_i - \bar{x})^2$
0 – 2	6	1	$1 - 4.84 = 3.84$	14.7456	88.4736
2 – 4	3	3	$3 - 4.84 = 1.84$	3.3856	10.1568
4 – 6	7	5	$5 - 4.84 = 0.16$	0.0256	0.1792
6 – 8	5	7	$7 - 4.84 = 2.16$	4.6656	23.3280
8 – 10	4	9	$9 - 4.84 = 4.16$	17.3056	69.2224
	<u>25</u>				<u>$\Sigma = 191.36$</u>

$$\bar{x} = 4.84 \$$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{191.36}{25}} = 2.77 \$$$

Örnek: Bir liseden mezun olan ve ÖSS sınavına giren öğrencilerin puanlarının dağılımı aşağıda verilmiştir. Buna göre öğrenci puanlarının standart sapmasını bulunuz.

ÖSS Puanları	Öğr.Sayısı	m_i	$f_i.m_i$	$m_i - \bar{X}$	$f_i(m_i - \bar{X})^2$
90-110	10	100	1000	-37,9	14364,1
110-130	30	120	3600	-17,9	9612,3
130-150	50	140	7000	2,1	220,5
150-170	25	160	4000	22,1	12210,25
170-210	5	190	950	52,1	13572,05
Toplam	120		16550		49979,2

$$\text{Ortalama : } \bar{X} = \frac{16550}{120} \cong 137,9 \text{ puan}$$

$$\text{Standart sapma } \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(m_i - \bar{X})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{49979,2}{120}} \Rightarrow \sigma \cong 20,4 \text{ puan}$$

Standart sapma ve ortalamalar arasındaki ilişkiler

Kareli ortalama $\rightarrow K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}}$

Varyans $\rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$

Standart sapma ve ortalamalar arasındaki ilişkiler

Kareli ortalama $\rightarrow K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}}$

Varyans $\rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i^2 - 2x_i \cdot \bar{x} + \bar{x}^2)}{N} = \frac{\sum x_i^2}{N} - 2\bar{x} \cdot \frac{\sum x_i}{N} + \frac{N \cdot \bar{x}^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \underbrace{\frac{\sum x_i^2}{N}}_{K^2} - \bar{x}^2$$

$\sigma = \sqrt{K^2 - \bar{x}^2}$

K^2

x	x_i²
2	4
4	16
9	91
$\bar{x} = 5$	101

$$K^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} = \frac{101}{3} = 33.67$$

$$\sigma = \sqrt{K^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{33.67 - 5^2} = 2.94$$

Ücret sınıfları (\$)	f_i	m_i	m_i^2	$f_i \cdot m_i^2$
0 – 2	6	1	1	6
2 – 4	3	3	9	27
4 – 6	7	5	25	175
6 – 8	5	7	49	245
8 – 10	4	9	81	324
	25			777

$$\bar{x} = 4.84 \$$$

$$K^2 = \frac{\sum f_i \cdot m_i^2}{\sum f_i} = \frac{777}{25} = 31.08$$

$$\sigma = \sqrt{31.08 - 4.84^2} = 2.77 \$$$

Gruplamalardan İleri Gelen Hatalar ve Sheppard Düzeltmesi

- Gruplanmış serilerde hesaplar m_i' 'lere göre yapılmaktadır.
- Serinin normal ve normale yakın frekansların büyük ve serinin iki ucunda asimptotik olarak sıfıra inmeye eğilimli bulunduğu sürekli serilerde gruplamadan ileri gelen bu hatanın şu formülle düzeltilmesi Sheppard tarafından ispat edilmiştir:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma^2 - \frac{s^2}{12}}$$

σ' : Düzeltilmiş standart sapma

σ : Normal standart sapma

S : Seride sabit kalması gereken sınıf aralığı

$$\sigma' \leq \sigma$$

Örnek:

$$\sigma = 70.45$$

$$\sigma^2 = 4963.71 \quad \text{ise Sheppard düzeltmesinin hesabı:}$$

$$s = 50$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma^2 - \frac{s^2}{12}} = \sqrt{4963.71 - \frac{50^2}{12}}$$

$$\sigma' = 68.96 < 70.45 = \sigma$$

Standart Sapmanın Özellikleri:

- Matematik işlemler için uygun bir dağılma ölçüsüdür. Bu sebeple en yaygın kullanılan ölçüdür.
- Standart sapmada aritmetik ortalama gibi istatistik analiz için temel ölçülerden birisidir.
- Genel olarak standart sapma ortalama sapmadan daha büyüktür.

$$(OS < \sigma)$$

- N_1 ve N_2 gözlemden oluşan iki serinin ortalamaları aynı ve sırayla varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 olsun. Bu iki serinin birleştirilmiş ortak varyansı

$$\sigma^2 = \frac{N_1 \cdot \sigma_1^2 + N_2 \cdot \sigma_2^2}{N_1 + N_2}$$

ORANSAL DAĞILMA ÖLÇÜLERİ

1. Mutlak dağılma ölçüleri serideki değerler cinsinden bir netice gösterir.
2. Mutlak dağılma ölçülerinin vereceği sonuçlar, serideki değerlerin büyüklüğünün etkisi altındadır.

DEĞİŞİM KATSAYISI (VARYANS KATSAYISI)

$$D.K. = C_v = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100$$

$$\sigma > \bar{X} \rightarrow ???$$

Seri I**Boy uzunluğu (cm)** **x_i**

162

165

170

172

161

$$\bar{x} = 166 \text{ cm}$$

$$\sigma = 4.86 \text{ cm}$$

$$D.K_x = \frac{4.86}{166} \cdot 100 = \%2.93$$

Seri II**Ağırlık (kg)** **y_i**

53

64

68

69

71

$$\bar{x} = 65 \text{ kg}$$

$$\sigma = 6.42 \text{ kg}$$

$$D.K_y = \frac{6.42}{65} \cdot 100 = \%9.88$$

Örnek:

- Konutlarda tüketilen aylık elektrik ve su miktarları için aşağıdaki veriler elde edilmiştir. Değişim katsayılarını bularak hangi grupta değişikliğin daha fazla olduğunu araştırın.

Elekt. Tük.(kw/h)	Konut Say.(f _i)	m _i	f _i .m _i	f _i .m _i ²
50-100	10	75	750	56250
100-150	20	125	2500	312500
150-200	30	175	5250	918750
200-300	15	250	3750	937500
300-500	5	400	2000	800000

- Elektrik Tüketimi İçin:

$$\bar{X} = \frac{14250}{80} = 178,125 \quad K^2 = \frac{3025000}{80} = 37812,5$$

$$\sigma = \sqrt{K^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{37812,5 - 178,125^2} = \sqrt{6083,98} \cong 78$$

- Değişim katsayısı: $D.K = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100 \Rightarrow D.K = \frac{78}{178,125} \cdot 100$ DK = %44,8

Su Tük.(ton/h)	Konut Say.	mi	fi.mi	fi.mi ²
5-15	10	10	100	1000
15-25	30	20	600	12000
25-35	40	30	1200	36000
35-45	20	40	800	32000
45-65	10	55	550	30250

- Su Tüketimi İçin değişim katsayısı;

$$\bar{X} = \frac{3250}{110} = 29,55 \quad K^2 = \frac{111250}{110} = 1011,4$$

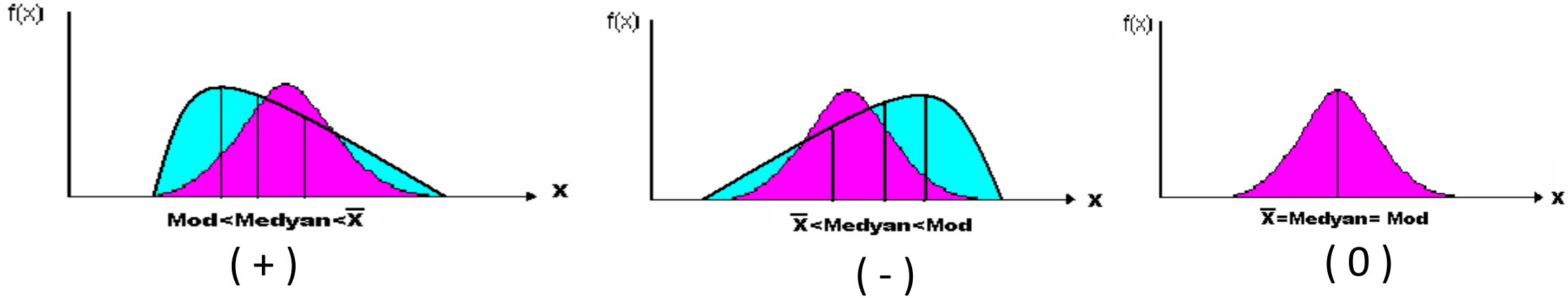
$$\sigma = \sqrt{K^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{1011,4 - 29,55^2} = \sqrt{138,16} \cong 11,75$$

$$D.K = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100 \Rightarrow D.K = \frac{11,75}{29,55} \cdot 100$$

$$DK = \%39,76$$

- Bu verilere göre elektrik tüketiminin değişkenliği (DK=44,8) su tüketiminin değişkenliğine göre (DK=39.7) daha fazladır.

ASİMETRİ (ÇARPIKLİK) VE BASIKLIK



$$Mod = \bar{x} - 3(\bar{x} - Med) \rightarrow \bar{x} - Mod = 3(\bar{x} - Med)$$

α_3 : Asimetri, Çarpıklık (Skewness)

$$\alpha_3 = \frac{\bar{x} - Mod}{\sigma} \quad \alpha_3 = \frac{3(\bar{x} - Med)}{\sigma}$$

“Pearson Asimetri Ölçüsü”

α_3 , ± 1 'e yaklaştıkça çarpıklık kuvvetli hale gelirken, 0.5'e yaklaştıkça orta şiddette 0'a yaklaştıkça hafif şiddette çarpıklık söz konusu olur.

Örnek: Bir işyerinde çalışan 200 işçinin gündelik ücretlerini gösteren aşağıdaki serinin asimetrisini (çarpıklığını) Pearson ölçüsü ile hesaplayalım.

Ücret sınıfları (\$)	f_i	Σf_i	m_i	$f_i m_i$	m_i^2	$f_i m_i^2$
10 – 20	15	15	15	225	225	3375
20 – 30	27	42	25	675	625	16875
30 – 40	43	85	35	1505	1225	52675
40 – 50	58	143	45	2610	2025	117450
50 – 60	33	176	55	1815	3025	99825
60 – 70	17	193	65	1105	4225	71825
70 – 80	5	198	75	375	5625	28125
80 – 90	2	200	85	170	7225	14450
	200			8480		404600

$$\bar{x} = \frac{8480}{200} = 42.4 \text{ \$} \quad K^2 = \frac{\sum f_i \cdot m_i^2}{\sum f_i} = \frac{404600}{200} = 2023 \text{ \$}$$

$$\sigma = \sqrt{K^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{2023 - 42.4^2} = 15.01$$

$$\text{Medyan sınıfı} = \frac{N+1}{2} = \frac{200+1}{2} = 100.5 \Rightarrow 40 - 50$$

$$Med = Med = \ell_I + \left(\frac{\frac{N}{2} - (\sum f_i)_{i-n}}{f_{med}} \right) \times c = 40 + \left(\frac{\frac{200}{2} - 85}{58} \right) \cdot 10 = 42.59 \text{ \$}$$

$$Mod = l_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) \times c = 40 + \left(\frac{58 - 43}{15 + 25} \right) \times 10 = 43.75$$

$$Mod = 43.75 \text{ \$}$$

$$Med = 42.59 \text{ \$}$$

$$\bar{x} < Med < Mod$$

$$\alpha_3 = \frac{\bar{x} - Mod}{\sigma} = \frac{42.40 - 43.75}{15.01} = -0.090$$

$$\alpha_3 = \frac{3(\bar{x} - Med)}{\sigma} = \frac{3(42.40 - 42.59)}{15.01} = -0.038$$

- **Örnek :** X marka piller için yapılan ömür testinde, 150 pil tesadüfen seçilmiş ve saat cinsinden ömürleri aşağıda verilmiştir. Pearson asimetri ölçülerini bulup sonucu yorumlayınız.

Ömür (saat)	Pil sayısı	m_i	$f_i m_i$	$f_i m_i^2$
100-120	10	110	1100	121000
120-140	50	130	6500	845000
140-160	60	150	9000	1350000
160-180	20	170	3400	578000
180-200	10	190	1900	361000
Toplam	150		21900	3255000

- Pearson asimetri ölçülerini elde edilebilmesi için serinin aritmetik ortalaması, standart sapması, mod ve medyanının bilinmesi gerekir.

- Aritmetik ortalama

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i m_i}{\sum f_i} = \frac{21900}{150} = 146 \text{ saat}$$

- Kareli ortalama

$$K^2 = \frac{\sum f_i m_i^2}{\sum f_i} = \frac{3255000}{150} = 21700$$

- Standart sapma

$$\sigma = \sqrt{K^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{21700 - 146^2} = \sqrt{384} \cong 19,6 \text{ saat}$$

- Mod

$$Mod = \ell_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot s = 140 + \frac{10}{10 + 40} \cdot 20 \Rightarrow \text{mod} = 144 \text{ saat}$$

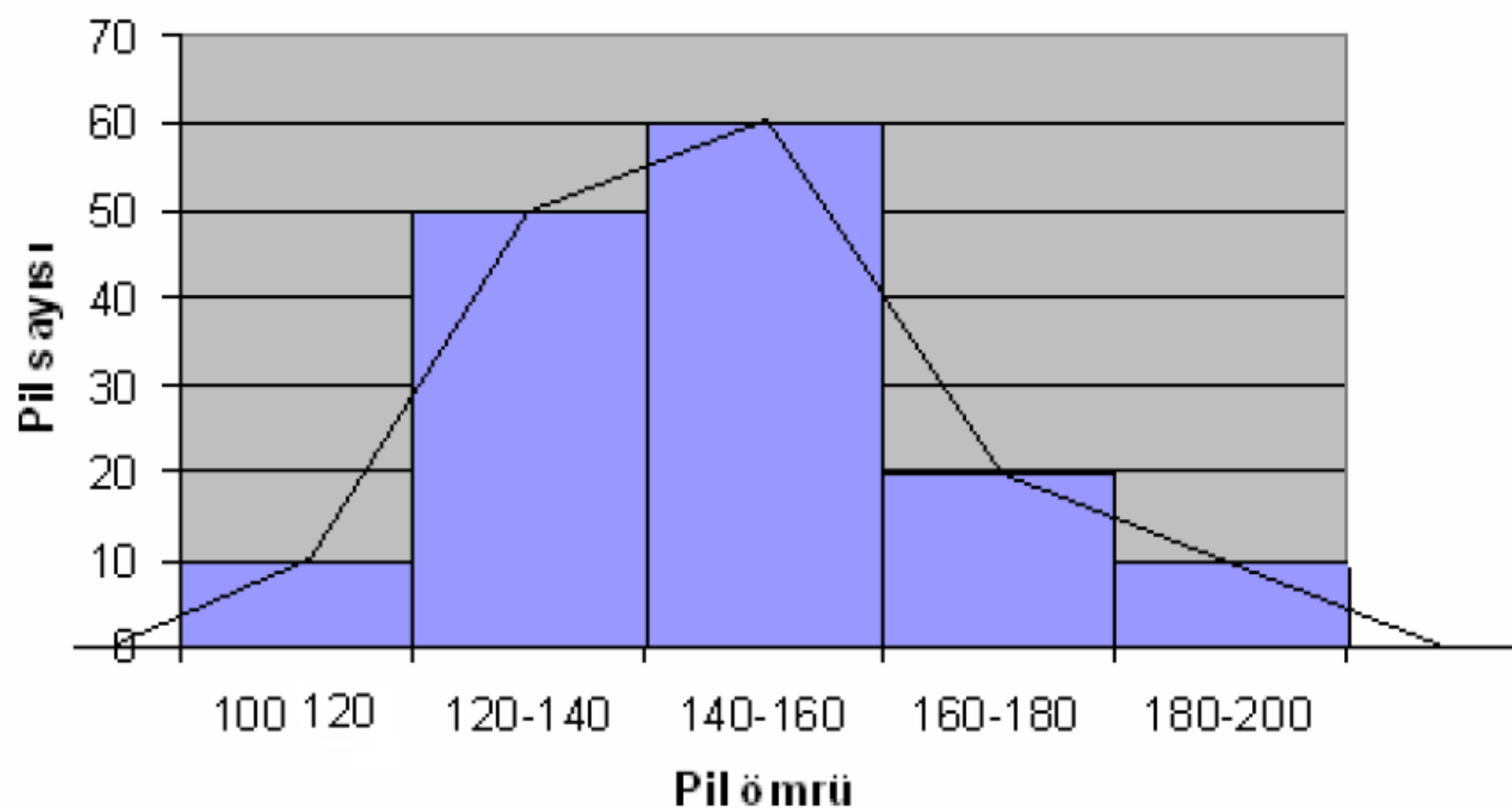
- Medyan

$$Medyan = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{m-1} N_i}{N_m} \cdot S_m = 140 + \frac{75 - 60}{60} \cdot 20 \Rightarrow \text{medyan} = 145 \text{ saat}$$

$$1) As = \frac{\bar{X} - \text{mod}}{\sigma} = \frac{146 - 144}{19,6} \Rightarrow As \cong 0,1 > 0 \text{ seri sağa çarpık}$$

$$2) As = \frac{3(\bar{X} - \text{Medyan})}{\sigma} \Rightarrow As = \frac{3(146 - 145)}{19,6} \Rightarrow As \cong 0,15 > 0 \text{ seri sağa çarpık}$$

Histogram ve Frekans Poligonu



MOMENTLERE DAYANAN ASİMETRİ VE BASIKLIK ÖLÇÜLERİ

MOMENT: Bir seride değerlerin sıfıra veya ortalamaya (veya herhangi bir değere) nazaran farklarına dayanan ölçülerdir.

Serinin Şekli	Sıfır Noktası Etrafındaki Momentler	Aritmetik Ortalama Etrafındaki Momentler
Basit	$M_r(0) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^r}{N}$	$M_r(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r}{N}$
Düzenlenmiş	$M_r(0) = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i^r}{\sum_{i=1}^n f_i}$	$M_r(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot (x_i - \bar{x})^r}{\sum_{i=1}^n f_i}$
Gruplanmış	$M_r(0) = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot m_i^r}{\sum_{i=1}^n f_i}$	$M_r(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot (m_i - \bar{x})^r}{\sum_{i=1}^n f_i}$

Sıfır etrafındaki momentler

$$M_1(0) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} = \bar{x}$$

$$M_2(0) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{N} = K^2$$

$$M_3(0) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{N}$$

$$M_4(0) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4}{N}$$

Aritmetik ortalama etrafındaki momentler

$$M_1(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}{N} = 0$$

$$M_2(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{N} = \sigma^2$$

$$M_3(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{N}$$

$$M_4(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{N}$$

Basit Serilerde

$$M_1(0) = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$M_2(0) = \frac{\sum x_i^2}{N}$$

$$M_3(0) = \frac{\sum x_i^3}{N}$$

$$M_4(0) = \frac{\sum x_i^4}{N}$$

Düzenlenmiş Serilerde

$$M_1(0) = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$$

$$M_2(0) = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i}$$

$$M_3(0) = \frac{\sum f_i \cdot x_i^3}{\sum f_i}$$

$$M_4(0) = \frac{\sum f_i \cdot x_i^4}{\sum f_i}$$

- **Aritmetik ortalamaya göre 1. moment:**

$$\mu_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})}{N} \text{ acilirsa } \frac{\sum X_i}{N} - \frac{N \bar{X}}{N} \Rightarrow \bar{X} - \bar{X} = 0 \text{ olur.}$$

- **Aritmetik ortalamaya göre 2. moment**

$$\mu_2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{N} = \frac{\sum X_i^2}{N} - \frac{2 \bar{X} \sum X_i}{N} + \frac{N \bar{X}^2}{N}$$

$$= M_2 - 2M_1^2 + M_1^2 \quad \mu_2 = M_2 - M_1^2$$

- Aritmetik ortalamaya göre 3. moment

$$\mu_3 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^3}{N} = \frac{\sum X_i^3}{N} - \frac{3\bar{X} \sum X_i^2}{N} + \frac{3\bar{X}^2 \sum X_i}{N} - \frac{N\bar{X}^3}{N}$$

$$\mu_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 3M_1^2M_1 - M_1^3$$

$$\mu_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3$$

- Aritmetik ortalamaya göre 4. moment

$$\mu_4 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^4}{N} = \frac{\sum X_i^4}{N} - \frac{4\bar{X} \sum X_i^3}{N} + \frac{6\bar{X}^2 \sum X_i^2}{N} - \frac{4\bar{X}^3 \sum X_i}{N} + \frac{N\bar{X}^4}{N}$$

$$\mu_4 = M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 4M_1^3M_1 + 6M_1^4$$

$$\mu_4 = M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 3M_1^4$$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$
2	-3	9	-27	81
3	-2	4	-8	16
10	5	25	125	625
$\bar{x} = 5$	0	38	90	722

$$M_1(\bar{x}) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{N} = 0$$

$$M_2(\bar{x}) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{38}{3} = 12.67$$

$$M_3(\bar{x}) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{N} = \frac{90}{3} = 30$$

$$M_4(\bar{x}) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{N} = \frac{722}{3} = 240.666$$

$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{x_i^2}$	$\mathbf{x_i^3}$	$\mathbf{x_i^4}$
2	4	8	16
3	9	27	81
10	100	1000	10000
15	113	1035	10097

$$M_1(0) = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{15}{3} = 5$$

$$M_2(0) = \frac{\sum x_i^2}{N} = \frac{113}{3} = 37.6666$$

$$M_3(0) = \frac{\sum x_i^3}{N} = \frac{1035}{3} = 345$$

$$M_4(0) = \frac{\sum x_i^4}{N} = \frac{10097}{3} = 3365.67$$

$$M_2(\bar{x}) = M_2(0) - M_1^2(0) = 37.6666 - 5^2 = 12.67$$

$$M_3(\bar{x}) = M_3(0) - 3M_1(0) \cdot M_2(0) + 2M_1^3(0) = 345 - 3 \cdot 5(37.666) + 2 \cdot 5^3 = 30$$

$$M_4(\bar{x}) = M_4(0) - 4M_1(0) \cdot M_3(0) + 6M_1^2(0) \cdot M_2(0) - 3M_1^4(0)$$

$$M_4(\bar{x}) = 3365.67 - 4 \cdot 5 \cdot 345 + 6 \cdot 5^2 \cdot (37.666) - 3 \cdot 5^4 = 240.67$$

Momentlere Dayanan Çarpıklık (Asimetri) Ölçüsü

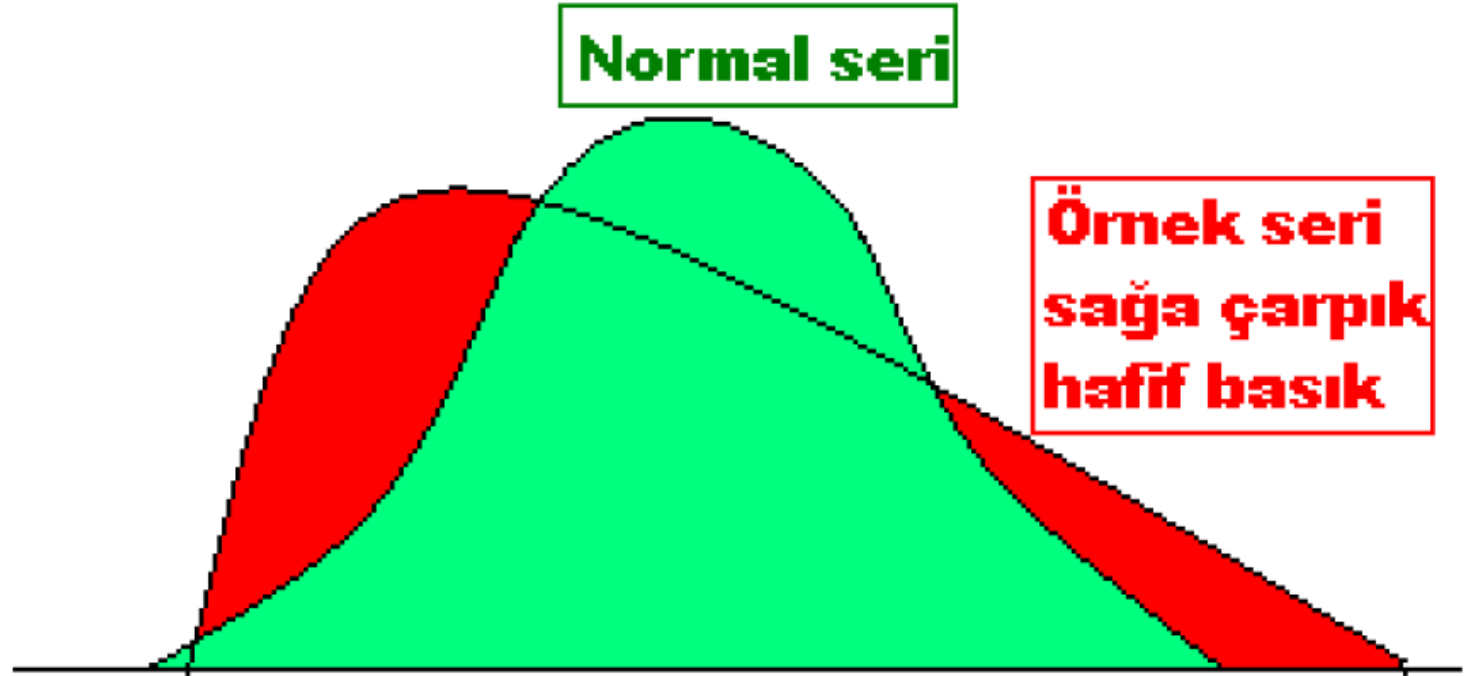
$$\alpha_3 = \frac{M_3(\bar{x})}{\sigma^3}$$

$$-1 \leq \alpha_3 \leq +1$$

$$\alpha_3 = 0 \rightarrow \text{SİMETRİK}$$

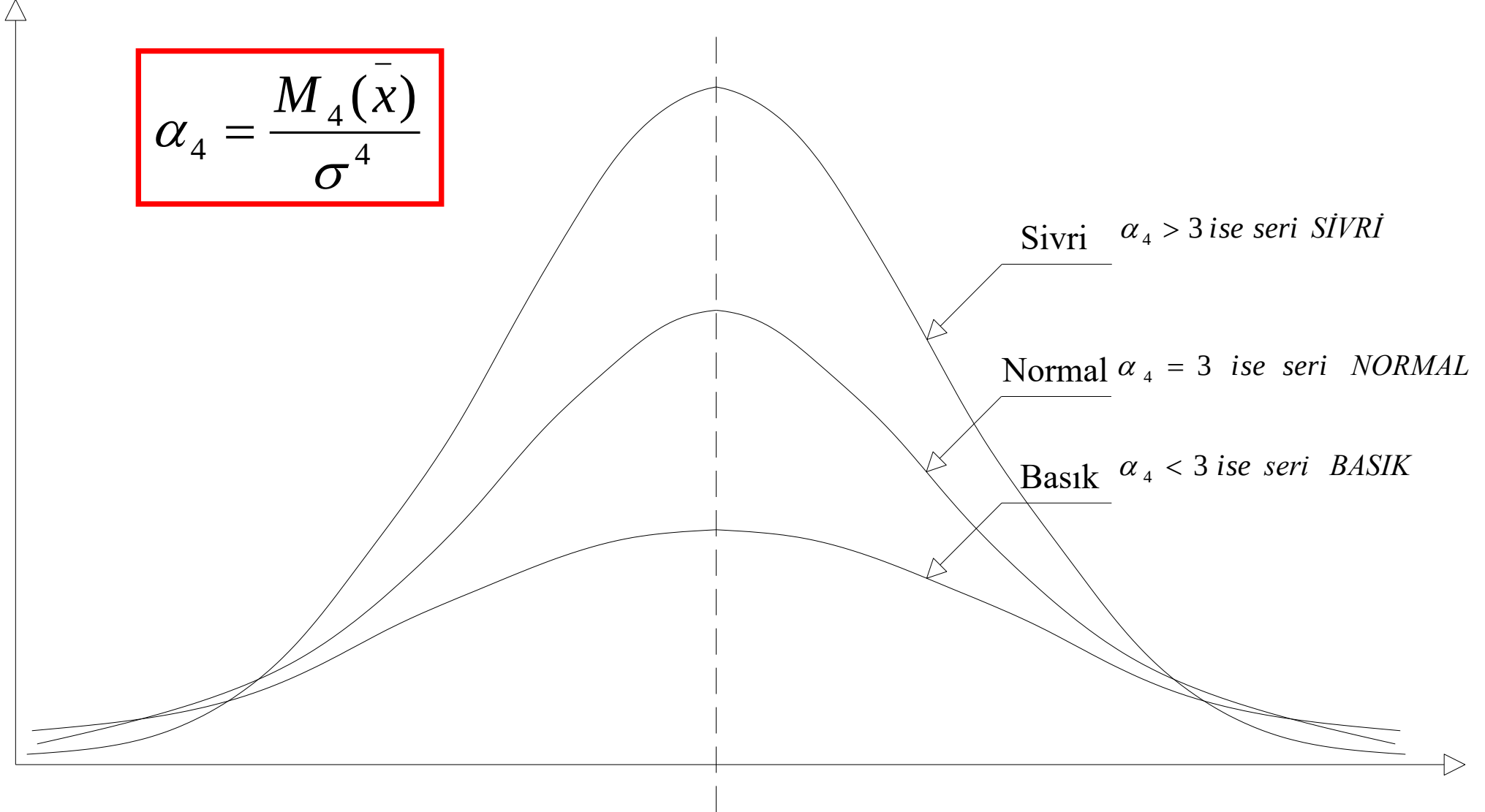
$$\alpha_3 < 0 \rightarrow \text{SAĞA ÇARPIK, ASİMETRİ (+)}$$

$$\alpha_3 > 0 \rightarrow \text{SOLA ÇARPIK, ASİMETRİ (-)}$$



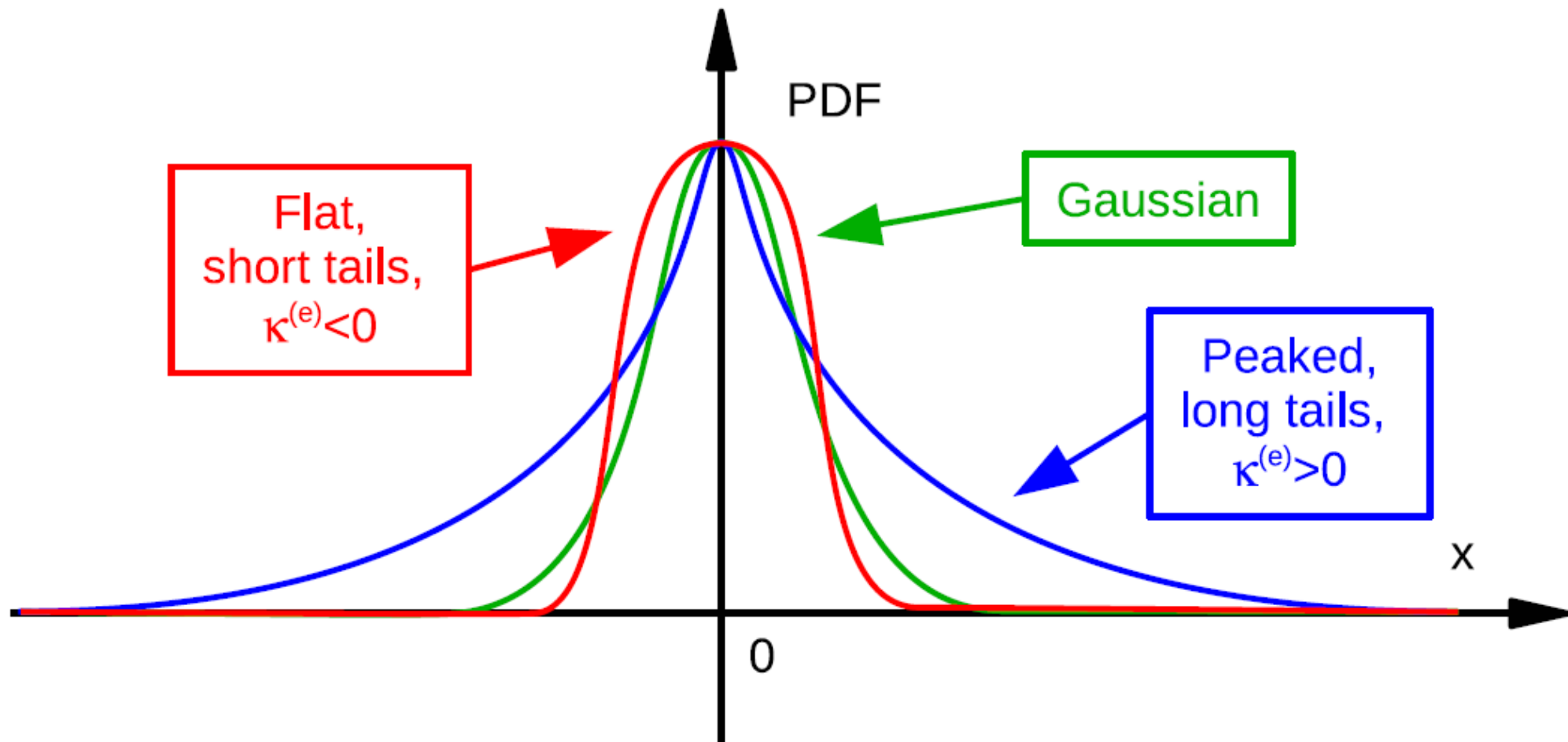
Momentlere Dayanan Basıklık Ölçüsü

$$\alpha_4 = \frac{M_4(\bar{x})}{\sigma^4}$$



Higher order moments

- $k(e) > 0$ means that the PDF is more peaked, and has “longer” tails than the Gaussian;
- $k(e) < 0$ means that the PDF is flatter and has “smaller” tails than the Gaussian.



- Aşağıda D100 karayolunun Adapazarı İzmit kesiminde meydana gelen kazaların günlere göre dağılımı verilmiştir. Bu veriler göre serinin;
- a) Sıfıra ve aritmetik ortalamaya göre momentleri bulunuz.
- b) Asimetri ölçüsünü bulunuz.
- c) Basıklık ölçüsünü bulup yorumlayınız.

Kaza sayısı	Gün sayısı	
0	5	
1	10	
2	12	
3	18	
4	11	
5	4	
Toplam	60	

a) Sıfıra göre momentler

Sıfıra göre 4 moment şöyle olur.

$$M_1 = \bar{X} = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i} = \frac{152}{60} \Rightarrow M_1 = 2,53$$

$$M_2 = \frac{\sum f_i X_i^2}{\sum f_i} = \frac{496}{60} \Rightarrow M_2 = 8,27$$

$$M_3 = \frac{\sum f_i X_i^3}{\sum f_i} = \frac{1796}{60} \Rightarrow M_3 = 29,93$$

$$M_4 = \frac{\sum f_i X_i^4}{\sum f_i} = \frac{6976}{60} \Rightarrow M_4 = 116,27$$

Aritmetik ortalamaya göre momentlerin hesaplanması

Kaza sayısı	Gün sayısı				
0	5				
1	10				
2	12				
3	18				
4	11				
5	4				
Toplam	60				

- Aritmetik ortalamaya göre momentlerin farklar serisinden hesaplanması

$$\mu_2 = \frac{\sum f_i (m_i - \bar{X})^2}{\sum f_i} = \frac{110,93}{60} \Rightarrow \mu_2 = 1,85$$

$$\mu_3 = \frac{\sum f_i (m_i - \bar{X})^3}{\sum f_i} = \frac{-22,6}{60} \Rightarrow \mu_3 = -0,377$$

$$\mu_4 = \frac{\sum f_i (m_i - \bar{X})^4}{\sum f_i} = \frac{462,02}{60} \Rightarrow \mu_4 = 7,7$$

Sıfıra göre momentlerden aritmetik ortalamaya göre momentlerin bulunuşu

$$\mu_2 = M_2 - M_1^2 = 8,27 - 2,53^2 \Rightarrow \mu_2 = 1,87$$

$$\begin{aligned}\mu_3 &= M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3 \\ &= 29,93 - 3 \cdot 8,27 \cdot 2,53 + 2 \cdot 2,53^3 \Rightarrow \mu_3 = -0,45\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_4 &= M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 3M_1^4 \\ &= 116,27 - 4 \cdot 29,93 \cdot 2,53 + 6 \cdot 8,27 \cdot 2,53^2 - 3 \cdot 2,53^4 \\ &\Rightarrow \mu_4 = 8,07\end{aligned}$$

c) Asimetri ve basıklık ölçüleri

- Asimetri ölçüsü (α_3)

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-0,377}{1,36^3} \cong -0,15 < 0 \text{ sola çarpık}$$

- Basıklık ölçüsü (α_4)

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{7,7}{1,36^4} = 2,25 < 3 \text{ seri basık}$$

- **Örnek:** Basit bir seri için aşağıdaki verilere ulaşılmıştır. Bu verilerden hareketle;

$$\frac{1}{N} \sum (X_i - K) = -1,74 \quad \mu_2 = 32,6 \quad M_3 = 1643,5$$

$$\sum (X_i - \bar{X})^3 = 1191 \quad M_4 = 29339 \quad Medyan = 9,2$$

- a) Aritmetik ortalamayı (8.5)
- b) Kareli ortalamayı (10,238)
- c) Gözlem sayısını (N=6)
- d) Modu tahmin ediniz (Mod=10,6)
- e) α_3 asimetri ölçüsünü (1,07)
- f) μ_4 aritmetik ortalamaya göre 4. momenti (3230,6)
- g) α_4 Basıklık ölçüsünü (3,04)
- h) Değişim katsayısını bulunuz. (%67,17)

- **Ornek:** Basit bir seri ile ilgili aşağıdaki veriler elde edilmiştir.
- $M_2 = 69,8$ $DK = 38,38$ $\sum X_i^3 = 3429$ $\alpha_3 = 0,059$
- $M_4 = 7282$ $\prod X_i = 1920$ $Mod = 8,4$
- a) Aritmetik ortalamayı, (7,8)
- b) Gözlem sayısını, (5)
- c) Geometrik ortalamayı bulunuz. (4,536)
- d) Standart sapmayı, (3)
- e) Medyanı tahmin ediniz. (8)
- f) α_4 basıklık ölçüsünü, (3,21)

BOWLEY' in Kartillere Dayanan Asimetri Ölçüsü

$$\alpha_3 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)}$$

$$-1 \leq \alpha_3 \leq +1$$

$\alpha_3 = 0$ ise seri SİMETRİK

$\alpha_3 < 0$ ise seri SAĞA ÇARPIK, ASİMETRİ (+)

$\alpha_3 > 0$ ise seri SOLA ÇARPIK, ASİMETRİ (-)