

OLASILIK

OLASILIK

- Rastgele değişken: Gelecekteki bir gözlemde alacağı değerler önceden kesinlikle bilinemeyen bir değişkendir.

Örnek: madeni paranın yüzü, zarın herhangi bir yüzü....

- İstatistikte bir olayın beklendiği şekilde meydana gelmesi veya meydana gelmemesi olasılığı, bu iki halden her birine ait frekansın bütün (toplam) frekansa (mümkün haller sayısına) oranı veya frekansı olarak tanımlanır.

$$P(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_{\mathcal{A}}}{n}$$

$$0 \leq P_r(A) \leq 1$$

- Olasılığın **0 (sıfır) olması** bu halin imkansızlığını “**İmkansızlık hali**”, **1 olması** ise o halin kesinliğini “**Kesinlik hali**” belirtir.
- Olasılık bir “**BAĞIL FREKANS**” dan ibarettir.

Buna göre yazı gelme olasılığı:
$$P_r(A) = \frac{A}{A+B} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Tura gelme olasılığı:
$$P_r(B) = \frac{B}{A+B} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Yazı veya tura gelme olasılığı:
$$P_r(A) + P_r(B) = \frac{A}{A+B} + \frac{B}{A+B} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

OLASILIK TEOREMLERİ

1. Olasılıkların Toplamı Teoremi (Toplam Olasılık)

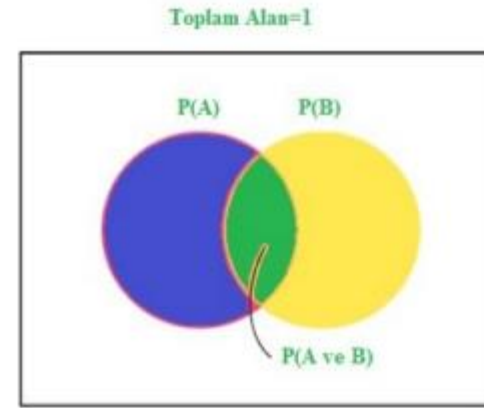
- aynı atışta 1 veya 3 çıkması olasılığı:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

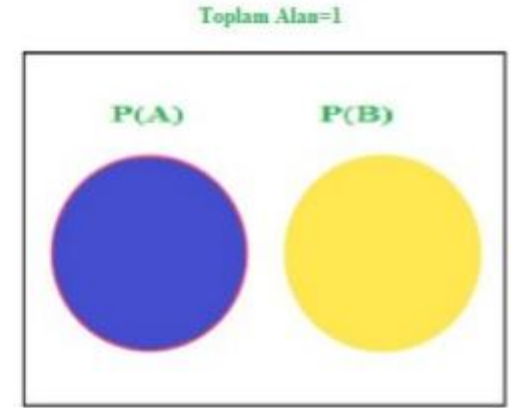
- 4, 5 veya 6 çıkması olasılığı:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Bileşik Olay



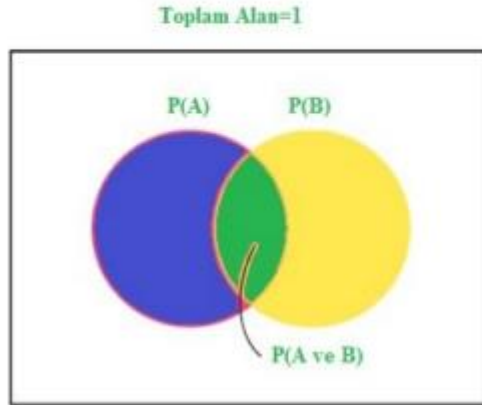
Ayrık Olay



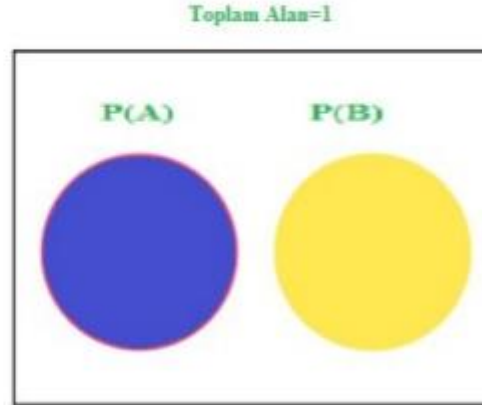
Ayrık iki olayın bileşimi olan bir olayın olasılığı bu iki olayın olasılıklarının toplamına eşittir.

$$P_r(A \cup B) = P_r(A) + P_r(B) \quad A \cap B = \emptyset$$

Bileşik Olay



Ayrık Olay



Ayrık olmayan iki olayın bileşiminin olasılığı

$$P_r(A \cup B) = P_r(A) + P_r(B) - P_r(A \cap B)$$

- Tek sayı gelme olasılığı $P(T)=1/2$
- 3'den küçük bir sayı gelme olasılığı $P(K) = 1/3$
- Tek ya da 3'den küçük bir sayı gelmesi olasılığı:

$$P(T \cup K) = P(T) + P(K) - P(T \cap K) = 1/2 + 1/3 - 1/6 = 2/3$$

OLASILIK TEOREMLERİ

2. Olasılıkların Çarpımı Teoremi (Bileşik Olasılık)

Atışı tek zarla değil iki zarla yaparsak ikisinde de aynı zamanda 1 (yani 1, 1) gelmesi olasılığı

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ olur.}$$

Birinin 1, diğerinin 6 (1, 6) gelmesi olasılığı yine:

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ olur.}$$

Birbirinden bağımsız basit olayların meydana getirdiği bileşik bir olayın olasılığı, onu meydana getiren basit olayların olasılıklar çarpımına eşittir.

$$P_r(A \cdot B) = P_r(A) \cdot P_r(B)$$

Bağımsızlık, iki olayın meydana gelmesinin birbirine etki etmemesidir.

OLASILIK TEOREMLERİ

2. Şartlı Olasılık

Bağımlı olaylar: Biri gerçekleşmeden diğerinin gerçekleşmesi mümkün olmaz.

$$A = \{3\}, B = \{\text{tek}\}. \quad P_r(A) = 1/6$$

$$B\text{'nin gerçekleşmesi durumunda} \quad P(A|B) = 1/3$$

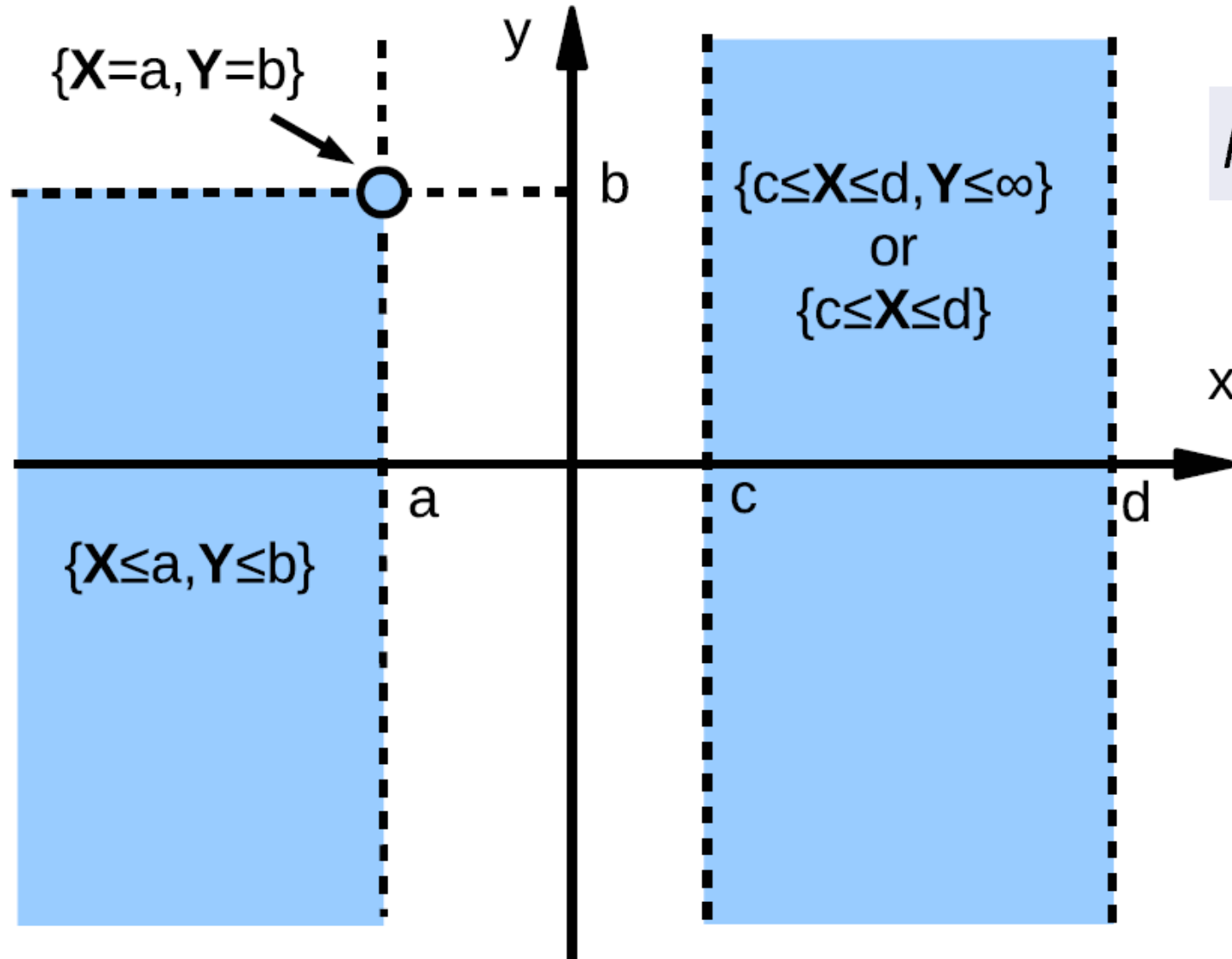
$$P(\mathcal{A} | \mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{P(\mathcal{B})}. \quad P(B) \neq 0$$

Çok Değişkenli Dağılımlar

- Aynı deneylerin sonucu olan birden fazla rastgele değişken olabilir,
- Örneğin: Bir kimya deneyinin sonunda ortaya çıkan sıcaklık ve pH.
- Örneğin: Bir hastanın yaşı ve kilosu
- Örneğin: Bir banka müşterisinin aylık kredi kartı harcaması
- Örneğin: Ortak dağılım fonksiyonu

$$F_{X,Y}(x,y) = P(\{X \leq x \text{ \& } Y \leq y\}).$$

Çok Değişkenli Dağılımlar



$$F_{X,Y}(x, y) = P(\{X \leq x \text{ \& } Y \leq y\}).$$

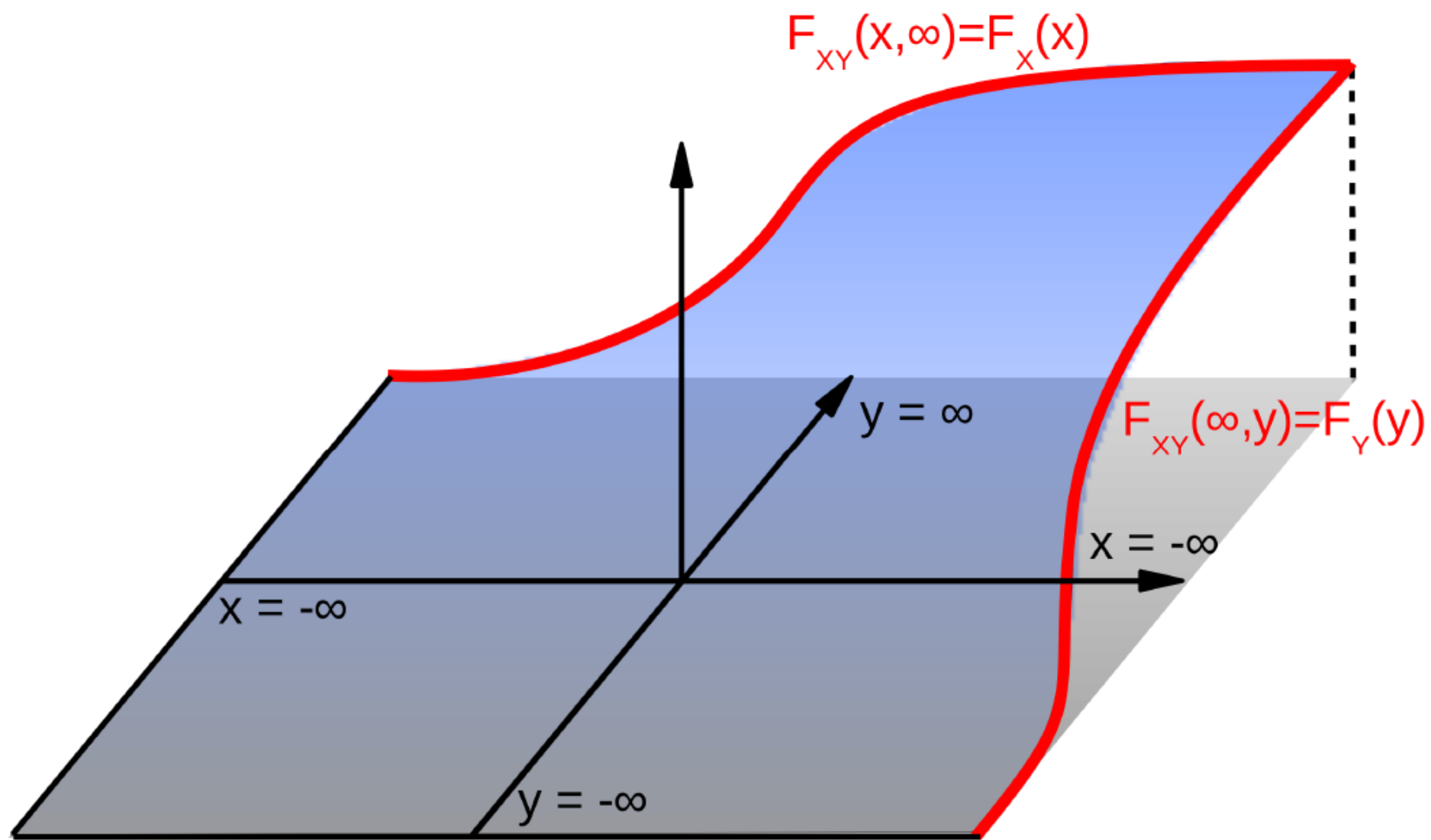
- Örnek uzay kesikli ise Ortak Olasılık Fonksiyonu :

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = P(\{X \leq x \& Y \leq y\}).$$

- $F(-\infty, y) = 0; F(x, -\infty) = 0; F(\infty, \infty) = 1;$
- $P(\{x_1 \leq X \leq x_2 \& Y \leq y\}) = F(x_2, y) - F(x_1, y);$
- similarly, $P([X \leq x \& y_1 \leq Y \leq y_2]) = F(x, y_2) - F(x, y_1).$
- For the rectangle $\mathcal{D} = \{x_1 \leq X \leq x_2 \& y_1 \leq Y \leq y_2\},$

$$P(\mathcal{D}) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) + F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1).$$



Rastgele Değişkenlerin Dağılımlarının Parametreleri

İstatistik momentleri

1.Ortalama

2.Varyans

3.Yüksek Mertebeden Momentler

Ortalama

Kesikli değişkenler için

$$E\{X\} = \sum_n p_n x_n$$

Surekli degiskenler icin

$$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Varyans

1 The variance relation

$$\sigma_X^2 = E \{X^2\} - E^2 \{X\}.$$

Kesikli değişkenler için

$$\sigma_X^2 = \sum_n p_n (x_n - \mu_x)^2.$$

Sürekli değişkenler için

Variance σ_X^2 (σ_X = standard deviation):

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx.$$

Mean $\simeq$ “central value”, Variance $\simeq$ “scatter” around mean.

$$D.K. = C_V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100$$

Yüksek Mertebeden Momentler

DEFINITION. Let $\mathbf{X}$ be a random variable with PDF f and $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{X} - \mu}{\sigma}$ its normalized vers

- (1) The the third moment of $\mathbf{Y}$ is called *skewness* of PDF f

$$\gamma_X = E\{\mathbf{Y}^3\} = \frac{E\{(\mathbf{X} - \mu_X)^3\}}{\sigma_X^3} = \frac{\tilde{\mu}_{X3}}{\sigma_X^3}.$$

- (2) The fourth moment of $\mathbf{Y}$ is called *kurtosis* of PDF f

$$\kappa_X = E\{\mathbf{Y}^4\} = \frac{E\{(\mathbf{X} - \mu_X)^4\}}{\sigma_X^4} = \frac{\tilde{\mu}_{X4}}{\sigma_X^4}.$$

The kurtosis of a Gaussian (normally distributed RV) is 3. The *excess kurtosis*

$$\kappa_X^{(e)} = \kappa_X - 3,$$

BİNOM DAĞILIMI

Binom (iki terimli, iki olasılıklı) dağılım

$$(p + q)^n$$

n: gözlenen olay sayısı

p: söz konusu olayda elverişli (uygun),

q: ise elverişsiz (uygun olmayan) olarak kabul edilecek halin olasılığı, (bağıl frekansı)

Para atışı: $p=q=1/2$ $p+q=1$

Olasılıklar eşitse simetrik bir bölünme, farklı ise asimetrik bir bölünme elde edilir.

SİMETRİK BİNOM DAĞILIMI

$$(p + q)^n \quad p = q = \frac{1}{2}$$

Tek Atışta

$$\left(\frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}T\right)^1 = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}T = 0.5Y + 0.5T$$

İki Atışta

$$\left(\frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}T\right)^2 = \frac{1}{4}Y^2 + \frac{2}{4}YT + \frac{1}{4}T^2 = 0.25Y^2 + 0.50YT + 0.25T^2$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}T\right)^4 &= \frac{1}{16}Y^4 + \frac{4}{16}Y^3T + \frac{6}{16}Y^2T^2 + \frac{4}{16}YT^3 + \frac{1}{16}T^4 \\ &= 0.0625Y^4 + 0.25Y^3T + 0.375Y^2T^2 + 0.25YT^3 + 0.0625T^4\end{aligned}$$

SİMETRİK BİNOM DAĞILIMI

- Simetrik binomun bu açılım şekillerinde görülen oranlar

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

Burada $p = q = 0.5$ olduğundan;

$$\binom{n}{x} (0.5)^x \cdot (0.5)^{n-x} \text{ ve dolayısıyla } \binom{n}{x} (0.5)^n \text{ bulunur.}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \longrightarrow \text{Binom açılımının katsayısı}$$

SİMETRİK BİNOM DAĞILIMI

- madeni para ile yapılacak
örneğin 4 atışta binom
katsayıları ve dolayısıyla
çeşitli kombinezonların
olasılıkları,

$$\binom{n}{x}(0.5)^n$$

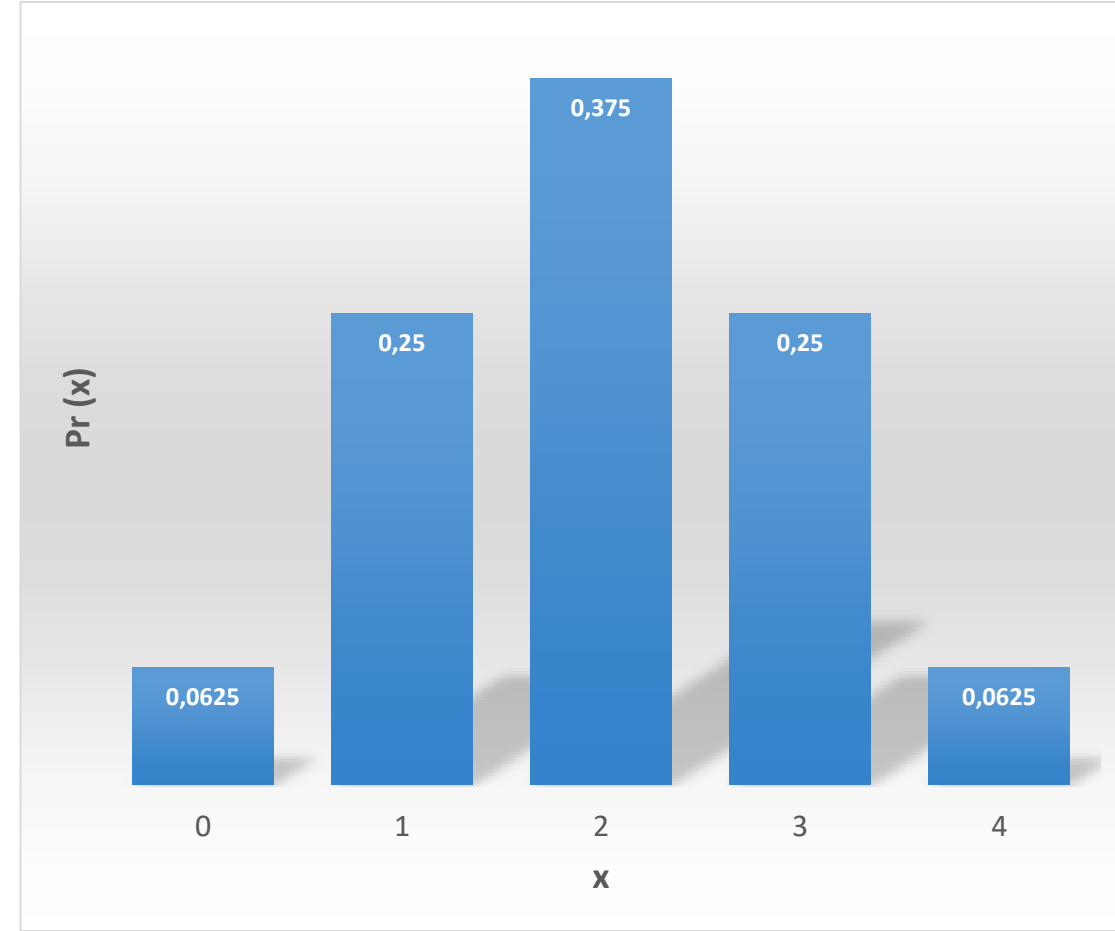
- 4 atışta 4 yazı gelmesi olasılığı;
$$\binom{4}{4} \cdot (0.5)^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} \cdot (0.5)^4 = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot (0.5)^4 = 1 \cdot (0.5)^4 = 0.0625$$
- 4 atışta 3 yazı gelmesi olasılığı;
$$\binom{4}{3} \cdot (0.5)^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot (0.5)^4 = 4 \cdot (0.5)^4 = 0.25$$
- 4 atışta 2 yazı gelmesi olasılığı;
$$\binom{4}{2} \cdot (0.5)^4 = 6 \cdot (0.5)^4 = 0.375$$
- 4 atışta 1 yazı gelmesi olasılığı;
$$\binom{4}{1} \cdot (0.5)^4 = 4 \cdot (0.5)^4 = 0.25$$
- 4 atışta hiç yazı gelmemesi olasılığı;
$$\binom{4}{0} \cdot (0.5)^4 = 1 \cdot (0.5)^4 = 0.0625 \text{ dir.}$$

SİMETRİK BİNOM DAĞILIMI

Yazı Gelme Sayısı x	Binom Katsayıları $\binom{n}{x}$	Her Numunenin Olasılığı $(0.5)^n$	Her Şıkkın Olasılığı $P(x) = \binom{n}{x} \cdot (0.5)^n$
0	1	0.0625	0.0625
1	4	0.0625	0.2500
2	6	0.0625	0.3750
3	4	0.0625	0.2500
4	1	0.0625	0.0625

Toplam 16

1.0000



BİNOM DAĞILIMININ ORTALAMASI, VARYANSI VE STANDART SAPMASI

$$\bar{x} = n \cdot p = \mu \quad \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

$$\bar{x} = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \quad \sigma^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \sigma = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

ASİMETRİK BİNOM DAĞILIMI

- $p \neq q \rightarrow p > q$ veya $p < q$
- Örnek: %60'ı kusurlu (p), %40'ı kusursuz (q) olan bir ana kütlede dört birim (n=4) rastgele bir numune çekildiğinde bunun içinde küçükten büyüğe doğru çeşitli sayılarda (x=0,1,2,3,4) kusurlu mal bulunması olasılığı

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

$$P_r(0) = \binom{4}{0} \cdot (0.6)^0 \cdot (0.4)^4 = 0.0256$$

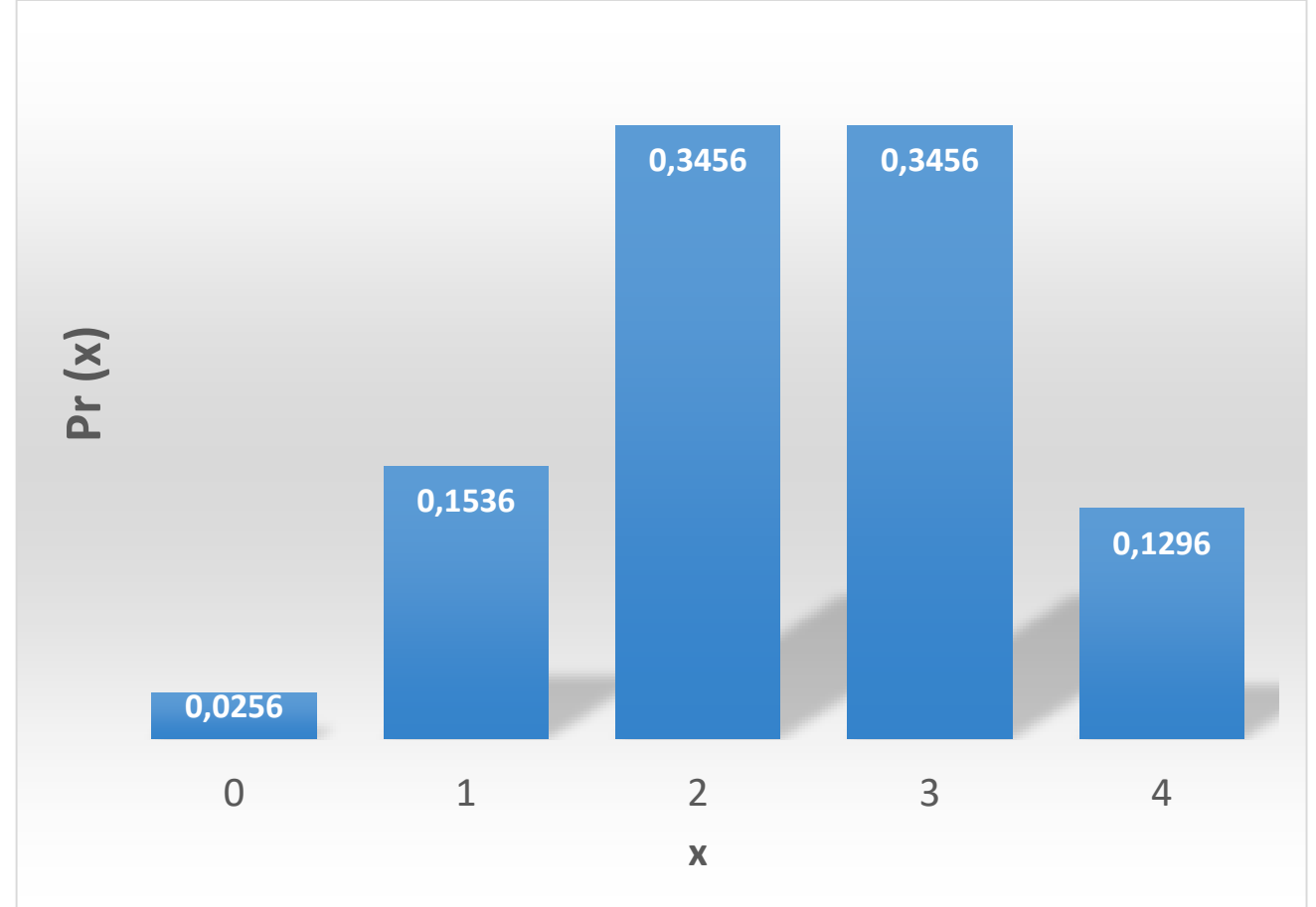
$$P_r(1) = \binom{4}{1} \cdot (0.6)^1 \cdot (0.4)^3 = 0.1536$$

$$P_r(2) = \binom{4}{2} \cdot (0.6)^2 \cdot (0.4)^2 = 0.3456$$

$$P_r(3) = \binom{4}{3} \cdot (0.6)^3 \cdot (0.4)^1 = 0.3456$$

$$P_r(4) = \binom{4}{4} \cdot (0.6)^4 \cdot (0.4)^0 = 0.1296$$

1.0000



$$\bar{x} = \mu = p \cdot q = 4 \times 0.4 = 1.6$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 4 \times 0.4 \times 0.6 = 0.96$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{0.96} = 0.98$$

POISSON DAĞILIMI

- Poisson dağılımı binomun özel bir halidir.
- “Nadir Olaylar” dağılımı
 - p (olayın olabilme olasılığı) $\rightarrow$ çok küçük (sıfıra yakın)
 - n (deney sayısı) $\rightarrow$ büyük
 - $n \cdot p = a$ (elverişli sayılan hallerin sayısı) $\rightarrow$ sonlu bir sayı
- $n \geq 50$ ve $n \cdot p < 5$

Binom dağılımında n ve p gibi bağımsız iki sabit değer bulunduğu halde Poisson dağılımında sadece bir tek a sabiti vardır.

N olayda b tane elverişli halin olasılığı:

$$P(X = b) = e^{-a} \cdot \frac{a^b}{b!}$$

Binom dağılımı $\rightarrow \bar{x} = n \cdot p \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Poisson dağılımı $\rightarrow \bar{x} = n \cdot p = n \cdot \frac{a}{n} = a \quad \bar{x} = a$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot \frac{a}{n} \cdot 1 = a \quad \sigma = \sqrt{a}$$

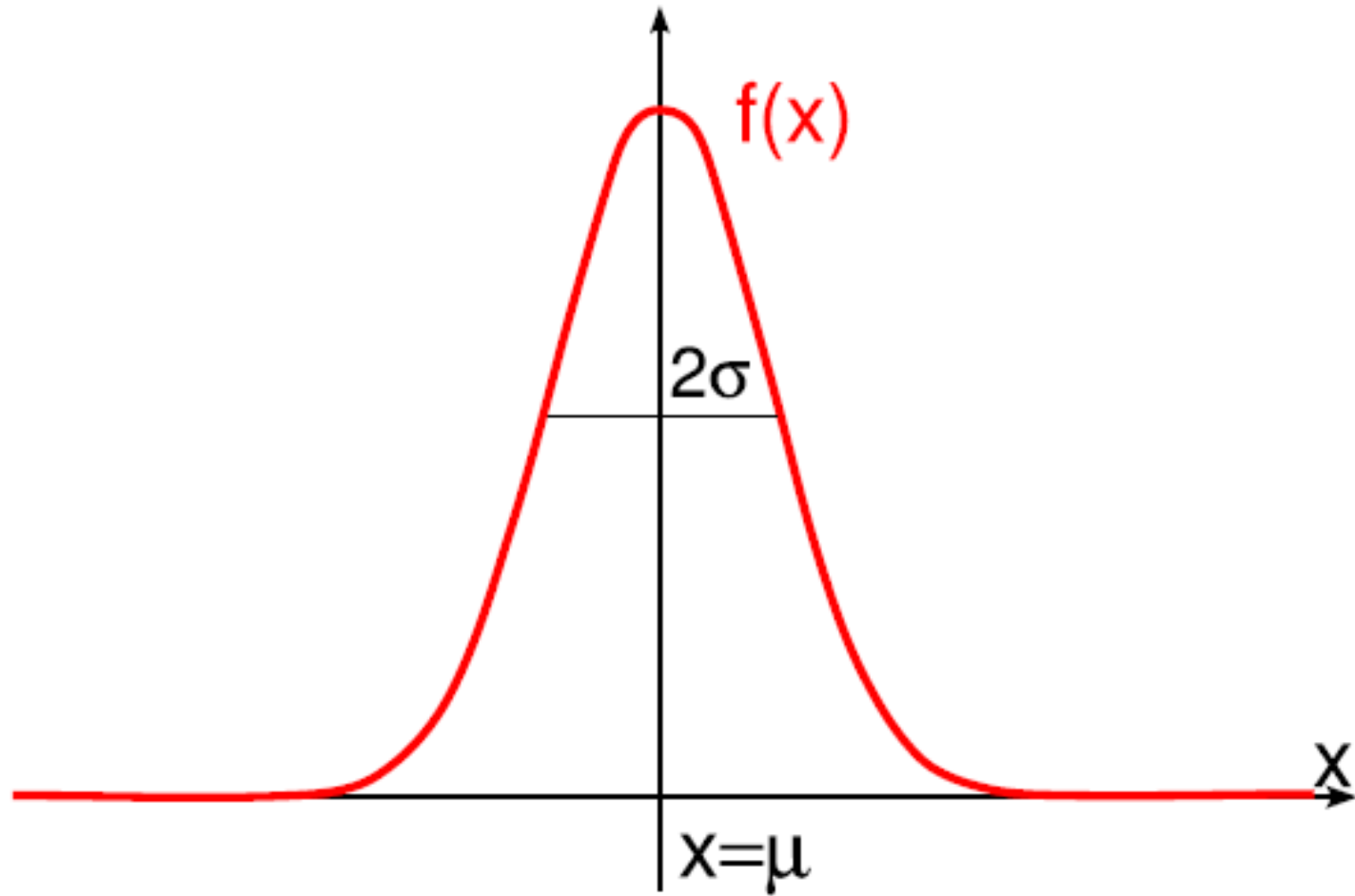
POISSON DAĞILIMINDA TEORİK FREKANSLARIN HESAPLANMASI

$$N \cdot P(x) = N \cdot e^{-a} \cdot \frac{a^x}{x!}$$

Belirli Bir Kademeyi Aşan Olasılıkların Toplamı

$$P(x) = e^{-a} \cdot \frac{a^x}{x!}$$

NORMAL DAĞILIM



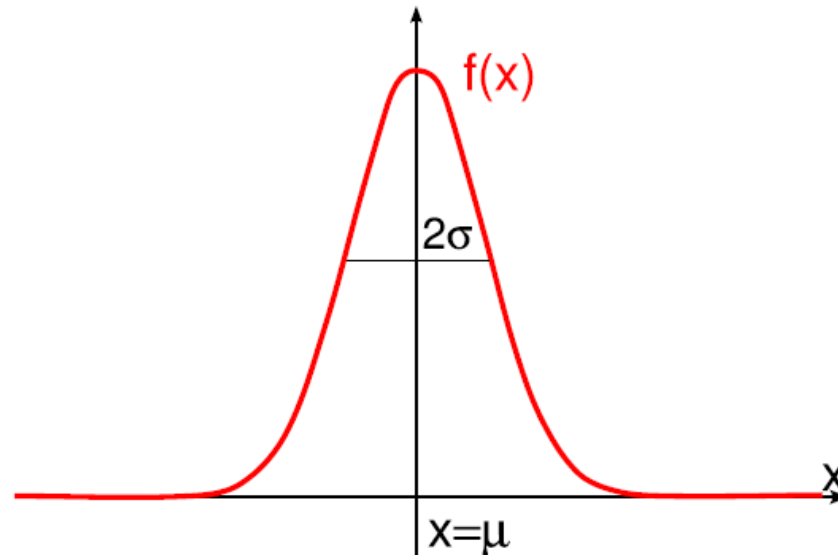
NORMAL DAĞILIM

Definition

RV X is called *normal* or *Gaussian*, written $X = N(\mu, \sigma)$, if its PDF is

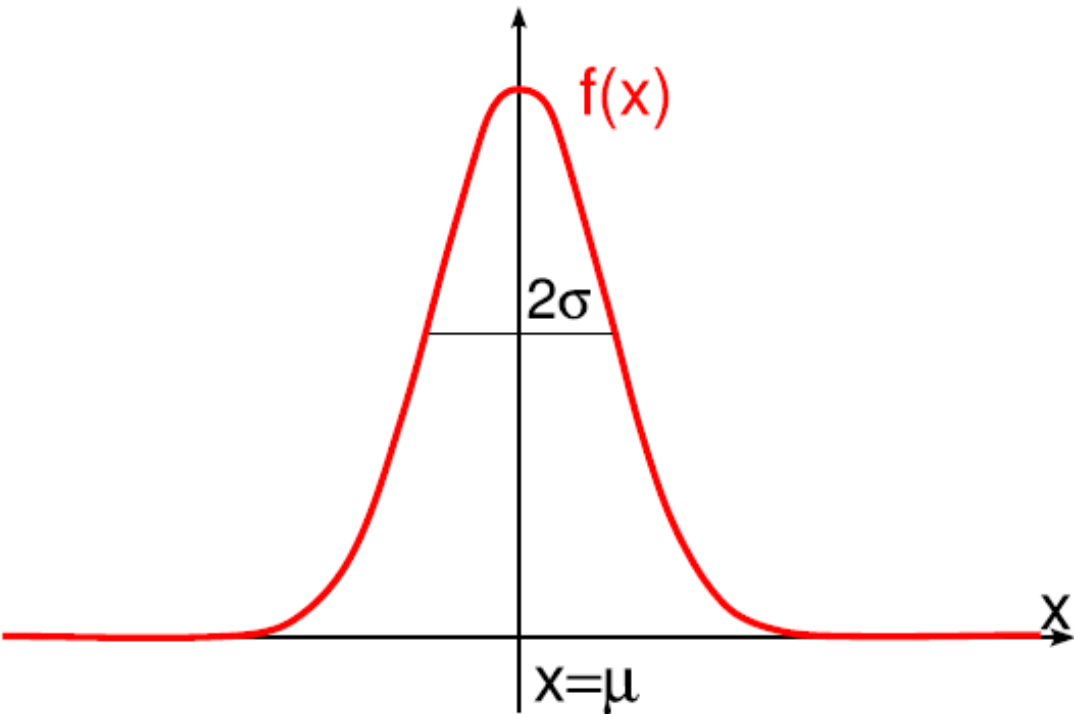
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right].$$

μ = mean; σ = standard deviation.



NORMAL DAĞILIM

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

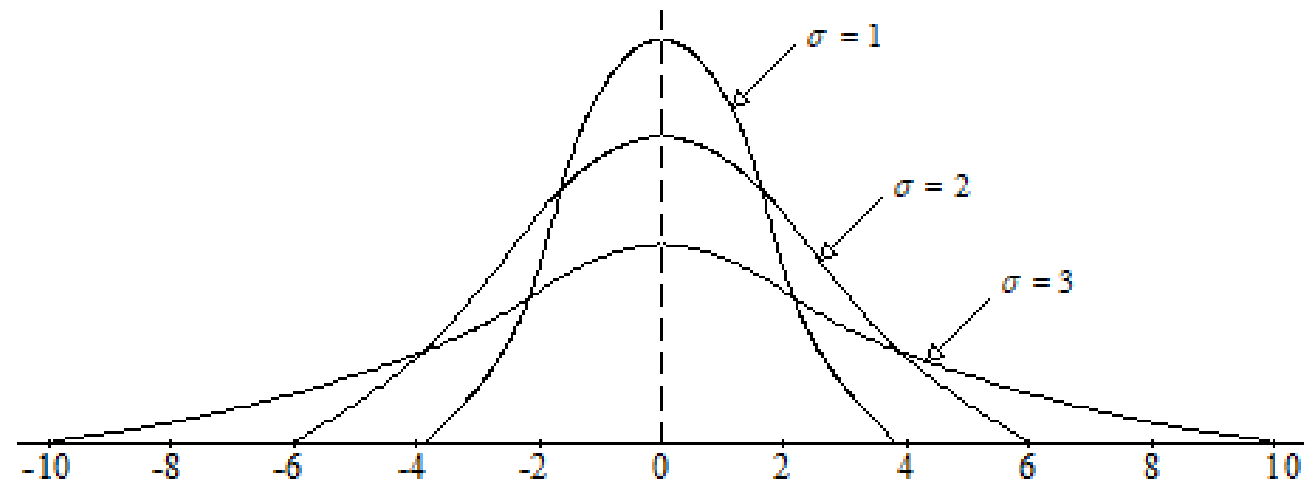


$$y_{\max}$$

$$x_i = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

$$y_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Ortalama= mod= medyan



Normal Eğrinin Standart Denklemi ve (z) Değerleri

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$



$$y = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2}$$

Normal Eğrinin Standart Denklemi

z: “Standart Normal Değişken” veya “Normal Değişken”

- ***Aritmetik ortalamaya karşı gelen z değerleri= 0***
- ***İki taraftan ortalamaya eşit uzaklıkta bulunan noktalara ait z değerlerinin birbirine mutlak eşitliği***
- ***Normal eğri alanın olasılıklar (bağıl frekanslar) toplamına eşitliği***

$$\int_{-\infty}^0 ydz = \int_0^{+\infty} ydz = 0.50 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} ydz = 1$$

Eğrinin standart denkleminde $z = 0$ 'a karşılık gelen ordinatla diğer herhangi bir z değerinin ordinatla arasında kalan, yani bu iki sınır arasındaki olasılıkların toplamı



$$\int_0^z ydz$$



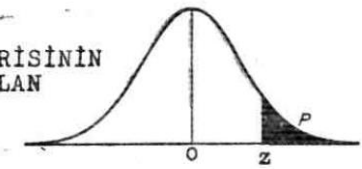
TABLE II

Standard Normal Distribution

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4027	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

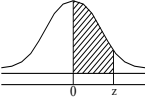
NORMAL DAĞILIM EĞRİSİNİN
ALTINDAKİ ALAN

$$A = \int_z^{\infty} \phi(z) dz$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

0'DAN Z'YE KADAR NORMAL EĞRİNİN ALTINDA KALAN ALAN



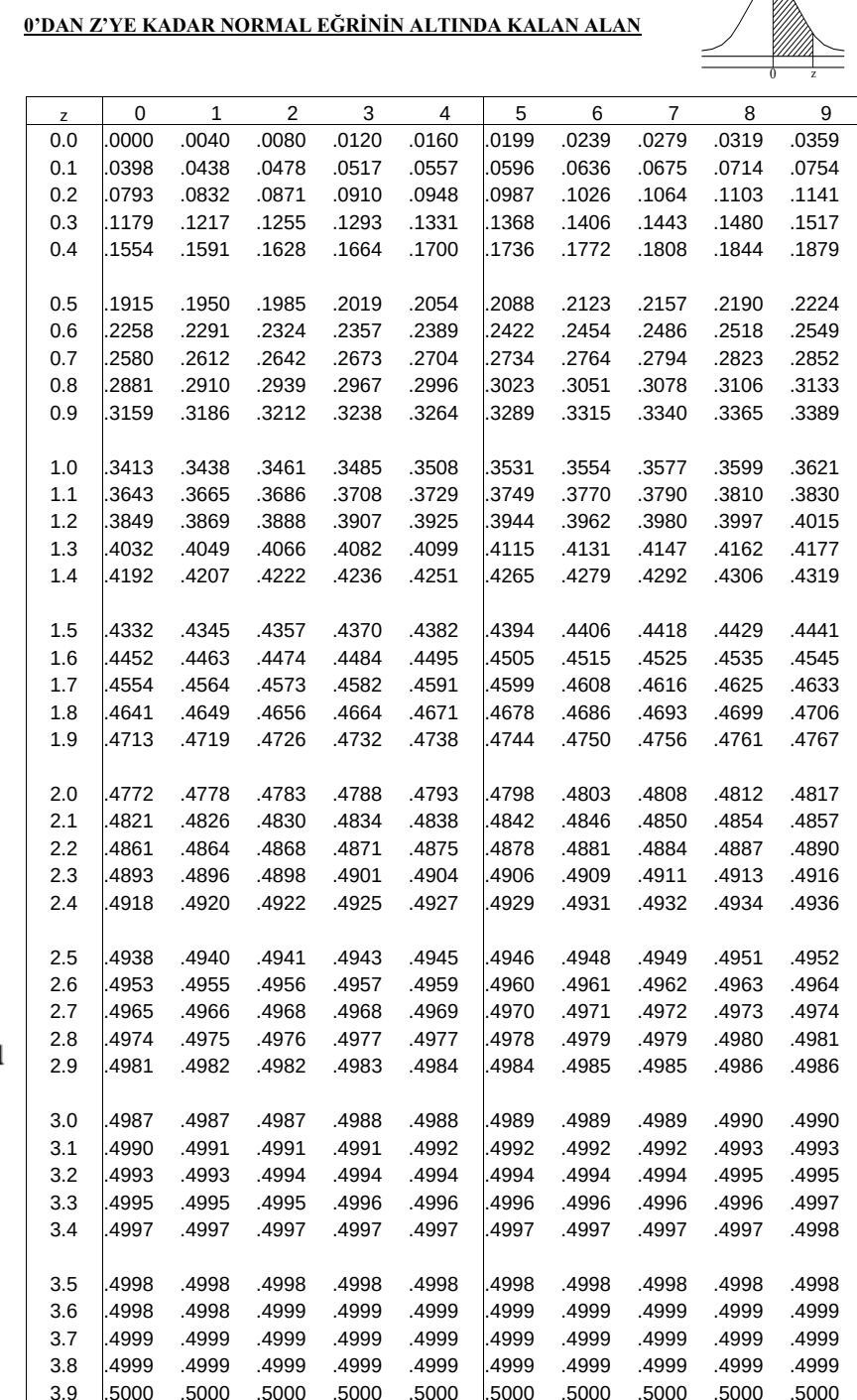
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4968	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

birbirine eşit $\pm z$ değerleri arasındaki bütün alanı bulmak için tabloda z ’ ye karşılık gelen değerlerin iki katını almak gerekir.

Örnek:

Belirli bir yaşta bulunan 200.000 çocuğun üzerinde yapılan zeka testi sonucunda elde edilen gruplanmış serinin aritmetik ortalaması $\bar{x} = 60$ ve standart sapması $\sigma = 8$ puan bulunmuştur. Olay normal bölündüğüne göre;

- a. Bu grupta 60-68 arasında puan alanların sayısını,
- b. 64-72 arasında puan alanların sayısını,
- c. 42-54 arasında puan alanların sayısını,
- d. 52-80 arasında puan alanların sayısını,
- e. 44'den az ve 82'den çok puan alanların sayısını bulunuz.



A normal distribution curve is shown. The horizontal axis is labeled x and z . The mean $\bar{x}$ is marked at 60, which corresponds to $z = 0$. The area under the curve between $x = 64$ and $x = 72$ is shaded with diagonal lines. The z -scores corresponding to these values are 0.5 and 1.5, respectively.

Tablodan $z_1 = 1.50$ için alan $\rightarrow 0.4332$

$$\int_{0.5}^{1.5} y dz = \int_0^{1.5} y dz - \int_0^{0.5} y dz = 0.4332 - 0.1915 = 0.2417$$

Buna göre 64-72 arasında puan alanların oranı yaklaşık olarak %24.2, sayısı ise 48340 kişidir.

$$z_2 = \frac{72 - 60}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

A graph of a normal distribution curve. The horizontal axis is marked with 0 at the mean and z to the right. The area under the curve to the right of z is shaded with diagonal lines.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4968	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

A normal distribution curve is shown with a horizontal axis labeled X and a vertical axis labeled Z . The mean $\bar{x} = 60$ is marked on the X -axis. The area under the curve between $X = 42$ and $X = 54$ is shaded with diagonal lines. The corresponding Z -scores are -2.25 and -0.75 .

$z = -2.25$ ile -0.75 arasındaki alan arandığına göre,

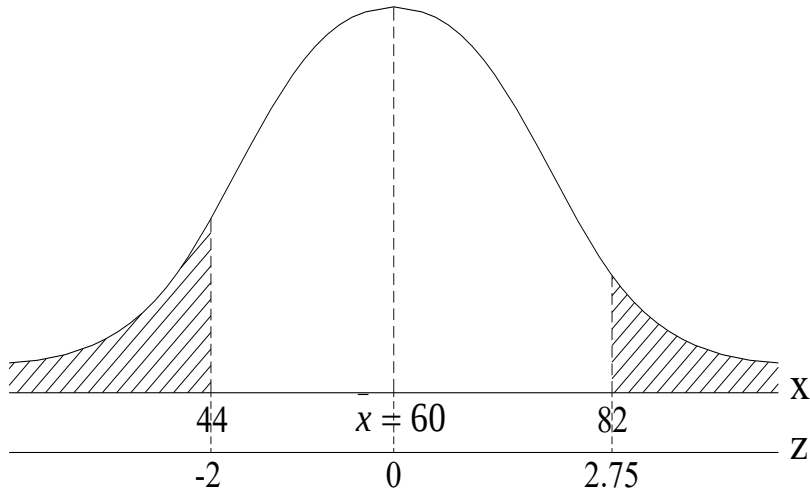
$$\int_{-2.25}^{-0.75} ydz = \int_{-2.25}^0 ydz - \int_{-0.75}^0 ydz = 0.4878 - 0.2734 = 0.2144$$

$$z_1 = \frac{42 - 60}{8} = \frac{-18}{8} = -2.25$$

$$z_2 = \frac{54 - 60}{8} = \frac{-6}{8} = -0.75$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4968	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

d. 44'den az ve 82'den çok puan alanlar



İlk yarıdaki alan

$$\int_{-\infty}^{-2} y dz = \int_{-\infty}^0 y dz - \int_0^2 y dz = 0.5 - 0.4773 = 0.0227$$

İkinci yarıdaki alan

$$\int_{2.75}^{+\infty} y dz = \int_0^{+\infty} y dz - \int_0^{2.75} y dz = 0.5 - 0.4970 = 0.0030$$

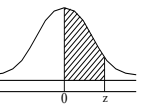
O halde eğrinin iki ucunda yer alan bu alanların toplamı:

$$\int_{-\infty}^{-2} y dz + \int_{2.75}^{+\infty} y dz = 0.0227 + 0.0030 = 0.0257$$

44'den az ve 82'den çok puan alanların oranı %2.57, sayıları ise,

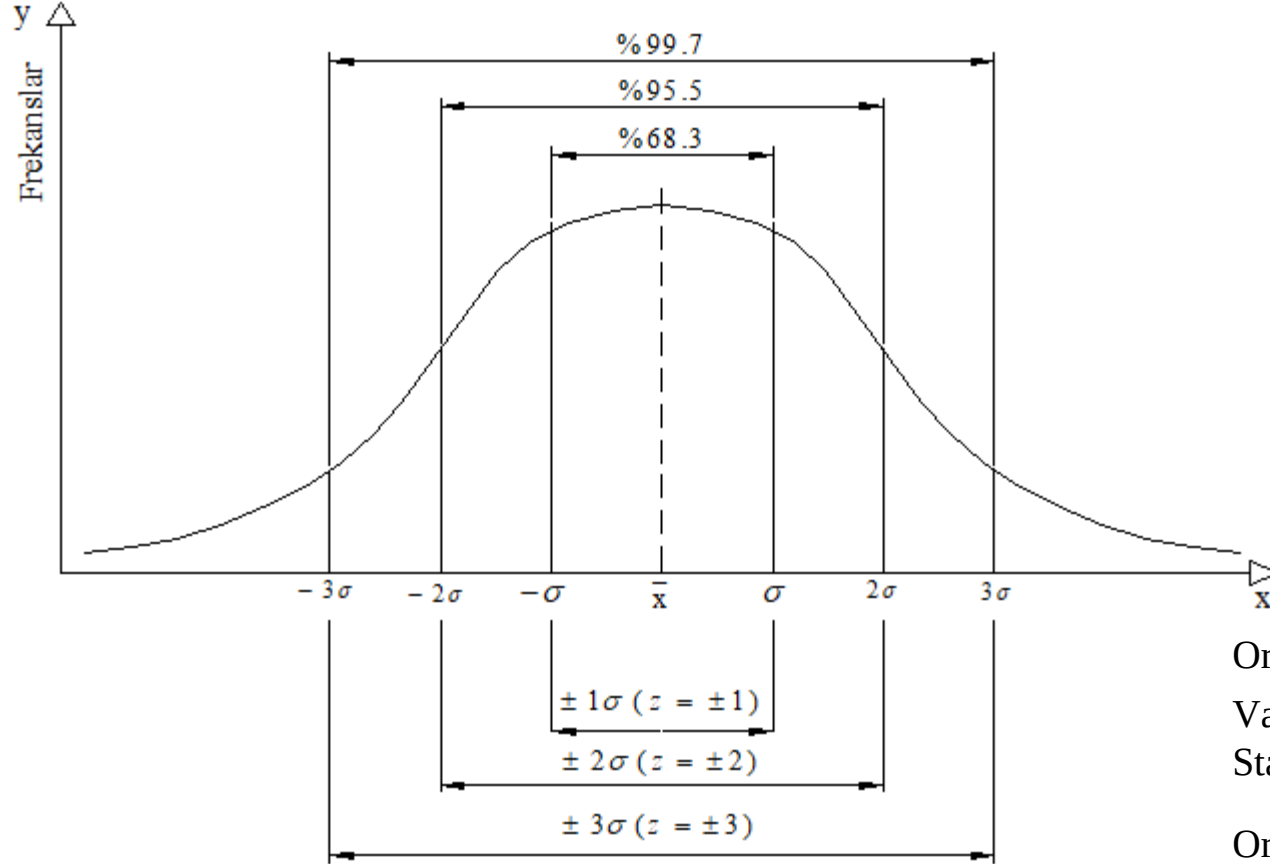
$0.0257 \times 200.000 = 5140$ olur.

0'DAN Z'YE KADAR NORMAL EĞRİNİN ALTINDA KALAN ALAN



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4968	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

Normal Eğri Alanının Olasılık Hesabı Bakımından Önemli Kısımları



Alanların Sınırları	Bütün Alana Oranı (%)
$\pm \sigma$	68.3
$\pm 1.96\sigma$	95.0
$\pm 2\sigma$	95.5
$\pm 2.576\sigma$	99.0
$\pm 3\sigma$	99.7

Ortalama $\bar{x} = \mu$

Varyans = σ^2

Standart Sapma = σ

Ortalama Sapma = $\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0.7979 \sigma$

Basıklık Ölçüsü = $\alpha_4 = 3$

Çarpıklık Ölçüsü = $\alpha_3 = 0$

olması halinde kesinlikle “Normal Dağılım” söz konusudur.

Frekans Faktörü ve Dönüş Aralığı

- Taşkın debilerinin frekans analizi
- Dönüş aralığı T yıl olan taşkın debisi $\rightarrow$ T yıllık taşkın debisi olarak adlandırılır
- dönüş aralığı $\rightarrow T = \frac{1}{P_r(x)}$ $P_r(x) = 1 - P(x)$
- T yıllık taşkın debisi $\rightarrow x_T = \bar{x} + \sigma \cdot K$
- K: frekans faktörü

Normal dağılımda bu denklemdeki T dönüş aralığı için $P_r(z) = 1/T$ şeklinde hesaplandıktan sonra normal dağılım eğri alanları tablosundan z değeri okunur ve bu değer K frekans faktörü olarak alınıp yukarıdaki denklemde yazılarak x taşkın debisinin değeri hesaplanır.

Örnek: Ortalaması $\bar{x} = 3976 \text{ m}^3/\text{sn}$ ve standart sapması $\sigma = 2210 \text{ m}^3/\text{sn}$ olan bir nehre ait taşkın debilerinin dağılımının normal dağılıma uyduğu bilindiğine göre 100 yıllık taşkın debisini tahmin ediniz.

$$x_T = \bar{x} + \sigma \cdot K$$

$$x_{100} = 3976 + 2210 \cdot K$$

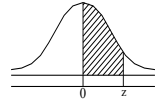
$$K \rightarrow \text{Normal Dağılımda} \quad P_r(z) = 1/T = 1/100 = 0.01$$

Tablodan $P_r(z) = 0.01$ için $\rightarrow z = K = 2.33$ elde edilir.

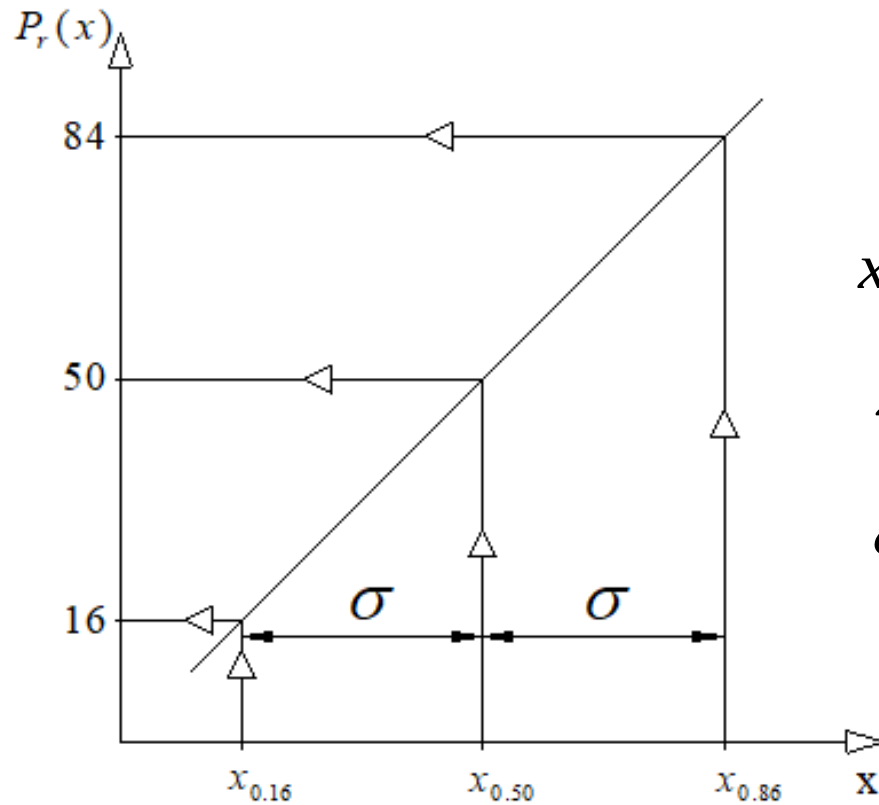
Şöyle ki $\rightarrow 0.5 - 0.01 = 0.49 \rightarrow 2.33$

$$x_{100} = 3976 + 2210 \cdot 2.33 = 9215 \text{ m}^3/\text{sn}$$

0'DAN Z'YE KADAR NORMAL EĞRİNİN ALTINDA KALAN ALAN

[illegible]

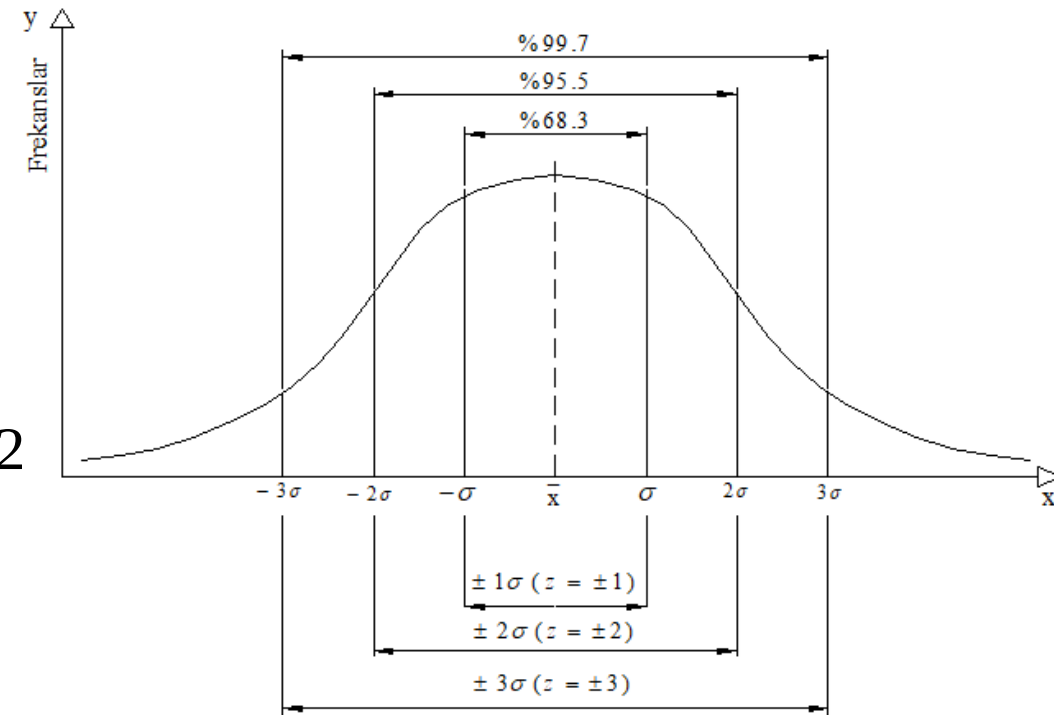
Normal Dağılım Parametrelerinin Tahmini



$$x_{0.84} = \bar{x} + \sigma$$

$$x_{0.16} = \bar{x} - \sigma$$

$$\sigma = (x_{0.84} - x_{0.16}) / 2$$



Problem: Dicle nehrinin Cizre akım ölçme istasyonunda 1947-1975 yılları arasında ölçülen yıllık yağış hacimleri aşağıda verilmiştir.

- Normal dağılıma uygunluğunu grafik olarak kontrol ediniz.
- Normal dağılımın parametrelerini grafik olarak belirleyiniz.
- Parametreleri normal yoldan hesaplayınız.

Yıl	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955
Akış hacmi (10^6 m^3)	12841	23910	17793	16524	13354	21174	20823	25359	11127

Yıl	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
Akış hacmi (10^6 m^3)	18135	18786	14460	11807	12524	8324	13073	30268	17845	14911

Yıl	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Akış hacmi (10^6 m^3)	23437	23091	27502	34341	11926	11625	16405	9661	13406	11539

a.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	8324	9661	11127	11539	11625	11807	11926	12574	12844	13033
Pr(x)	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

m	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x	13354	13406	14460	14911	16405	16524	17793	17845	18135	18786
Pr(x)	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

m	21	22	23	24	25	26	27	28	29
x	20823	21174	23091	23437	23910	25359	27502	30368	34341
Pr(x)	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967

a. Olasılık kağıdı üzerinde işaretlenmiş noktaların göz kararıyla bir doğru geçirilecek olursa dağılımın parametreleri:

$$\bar{x} = x_{0.50} = 17500 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

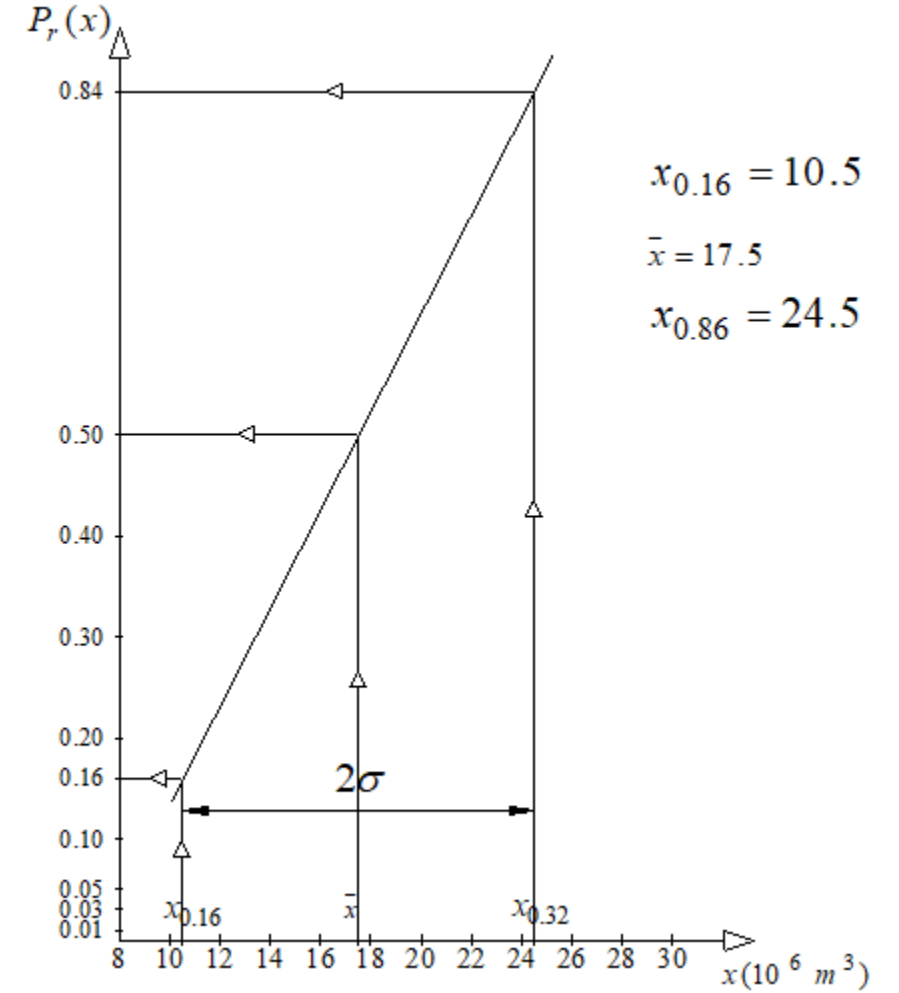
$$\sigma = \frac{x_{0.84} - x_{0.16}}{2} = \frac{24500 \cdot 10^6 - 10500 \cdot 10^6}{2} = 7000 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \text{ olarak bulunur.}$$

b. $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{505971}{29} = 17447 \cdot 10^6 \text{ m}^3$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1180666584}{29}} = 6380 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

Ayrıca; Çarpıklık $\alpha_3 = 0.839$

Basıklık $\alpha_4 = 2.69$ Olması normal dağılıma uymadığını gösterir.



LOG NORMAL DAĞILIM

- normal dağılmış olmayan (çarpık dağılmış) değişkenlerin de uygun bir dönüşümle normal dağılıma uydurulması

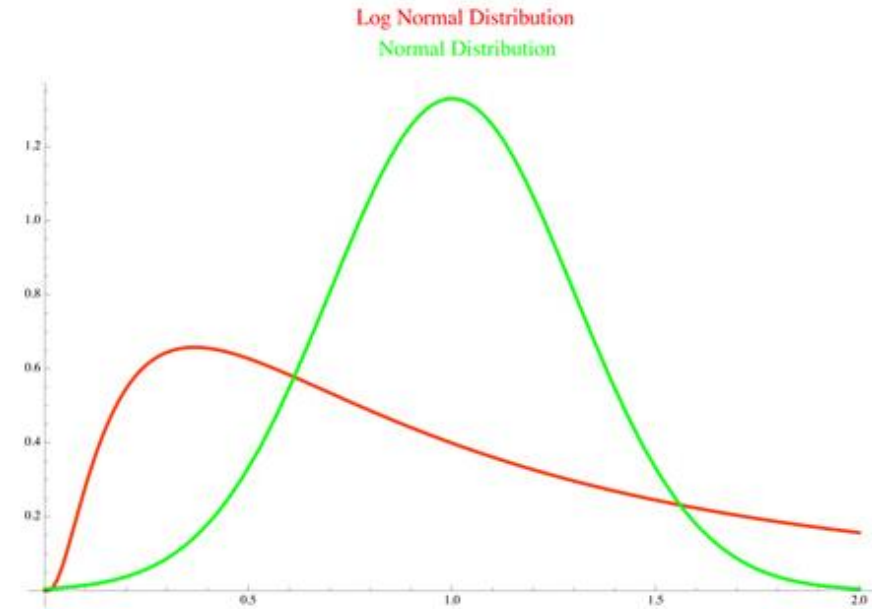
x: rastgele değişken $\rightarrow y = \ln x$

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(\ln x - \mu_y)^2 / 2\sigma_y^2\right] \quad x > 0$$

$$\mu_y = \ln \left[\frac{\mu_x}{\left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1\right)^{0.5}} \right] \quad \sigma_y = \left[\ln \left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1 \right) \right]^{0.5}$$

$$\mu_x = \exp \left(\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2} \right) \quad \sigma_x = \mu_x \left(e^{\sigma_y^2} - 1 \right)^{0.5}$$



$$\text{Çarpıklık} = \alpha_3 = 3C_v + C_v^3$$

$$\text{Basıklık} = \alpha_4 = C_v^8 + 6C_v^6 + 15C_v^4 + 16C_v^2 + 3$$

$\alpha_3 \neq 0$ ve $\alpha_4 > 3$ ise lognormal dağılım kullanılabilir.

Örnek: Ortalaması 20 °C olan ve standart sapması 8 °C olan bir data topluluğunun hangi dağılıma uyduğunu bulalım.

$$\mu = \bar{x} = 20 \text{ °C}$$

$$\sigma = 8 \text{ °C}$$

$$C_v = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{8}{20} = 0.4$$

$$\alpha_3 = 3C_v + C_v^3 = 3 \cdot 0.4 + 0.4^3 = 1.264 \neq 0$$

$$\alpha_4 = C_v^8 + 6C_v^6 + 15C_v^4 + 16C_v^2 + 3$$

$$\alpha_4 = 0.4^8 + 6 \cdot 0.4^6 + 15 \cdot 0.4^4 + 16 \cdot 0.4^2 + 3 = 5.96 > 3$$

$\alpha_3 \neq 0$ ve $\alpha_4 > 3$ olduğundan lognormal dağılım olabilir.

Örnek: Bir köprünün ortalama ömrünün 40 yıl olduğu bilindiğine göre ve standart sapması da 10 yıl olarak hesaplandığına göre ve de köprünün ömrü lognormal dağılıma uyduğuna göre köprü ömrünün 60 yılı geçmesi olasılığı nedir?

$$\mu_x = 40$$

$$\sigma_x = 10$$

$$C_v = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{10}{40} = 0.25$$

$$\mu_y = \frac{1}{2} \ln \frac{\mu_x^2}{C_v^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{40^2}{0.25^2 + 1} = 3.65857$$

$$\sigma_y^2 = \ln(C_v^2 + 1) = \ln(0.25^2 + 1) = 0.0606$$

$$\sigma_y = 0.24622$$

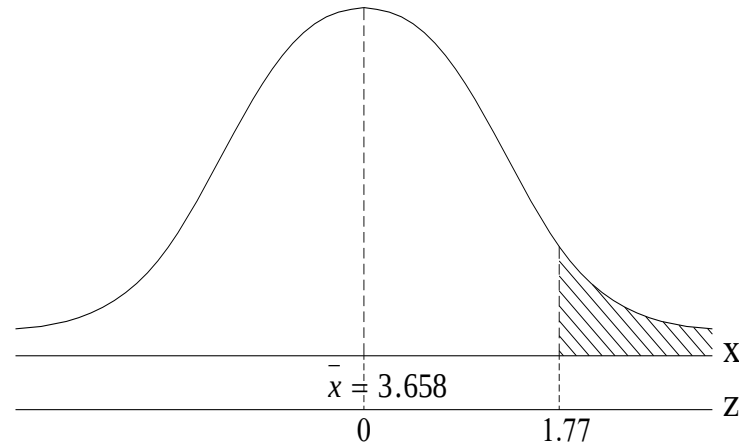
$y = \ln x$ olduğuna göre

$y = \ln x$ ortalaması $\bar{x} = 3.65857$ ve standart sapması $\sigma = 0.24622$ olan bir normal dağılım halindedir

$$P_r(x > 60) = P_r(\ln x > \ln 60)$$

$\ln x$ yerine y yazarak ve $\ln 60 = 4.094345$ olarak

$$P_r(x > 60) = P_r(y > 4.094345) \text{ olur.}$$



$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{4.094345 - 3.65857}{0.24622} = 1.77$$

$$P_r(z > 1.77) = \int_0^{\infty} y dz - \int_0^{1.77} y dz = 0.5 - 0.4616 = 0.0384 = \%3.84 \text{ olur.}$$

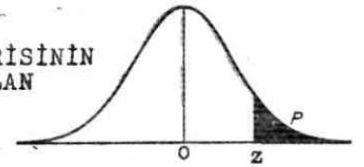
Köprü ömrünün 60 yıldan fazla olması olasılığı % 3.84 olarak bulunur.

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(\ln x - \mu_y)^2 / 2\sigma_y^2\right] \quad x > 0$$

$$\mu_y = \ln \left[\frac{\mu_x}{\left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1 \right)^{0.5}} \right] \quad \sigma_y = \left[\ln \left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1 \right) \right]^{0.5}$$

NORMAL DAĞILIM EĞRİSİNİN
ALTINDAKİ ALAN

$$A = \int_z^{\infty} \phi(z) dz$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233

Örnek: Bir bölgeye ait yıllık yağış yüksekliklerinin ortalaması 50 cm, standart sapması 10 cm olarak hesaplanmıştır. Dağılımın lognormal kabulü ile yıllık yağışın 45 ile 62 cm arasında kalma olasılığı nedir?

$$\mu_x = 50 \text{ cm}$$

$$\sigma = 10 \text{ cm}$$

$$C_v = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{10}{50} = 0.20$$

$$\mu_y = \frac{1}{2} \ln \frac{\mu_x^2}{C_v^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{50^2}{0.20^2 + 1} = 3.892$$

$$\sigma_y^2 = \ln(C_v^2 + 1) = \ln(0.20^2 + 1) = 0.0392$$

$$\sigma_y = 0.198$$

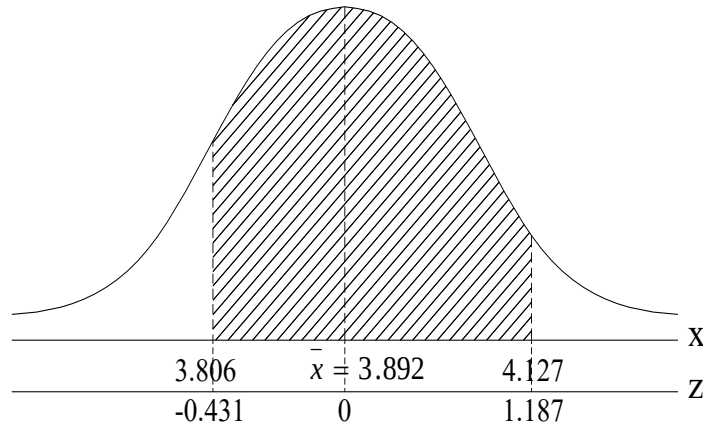
$$y = \ln x$$

$$y_1 = \ln 45 = 3.806$$

$$y_2 = \ln 62 = 4.127$$

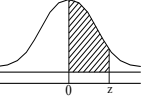
$$P_r(45 < x < 62) = P_r(\ln 45 < \ln x < \ln 62)$$

$$P_r(45 < x < 62) = P_r(3.806 < y < 4.127)$$



$$\mu_y = \ln \left[\frac{\mu_x}{\left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1 \right)^{0.5}} \right] \quad \sigma_y = \left[\ln \left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1 \right) \right]^{0.5}$$

0'DAN Z'YE KADAR NORMAL EĞRİNİN ALTINDA KALAN ALAN



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4968	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995

$$P_r(-0.431 < z < 1.187) = \int_{-0.431}^0 y dz + \int_0^{1.187} y dz = 0.1664 + 0.3830 = 0.5494$$

Örnek: Bir akarsudan alınan 10 örnekte ölçülen koliform sayıları:

$(x) = 100, 25, 12, 250, 10000, 75, 125, 600, 18, 1500$ olarak verildiğine ve lognormal dağıldığına göre dağılımın parametrelerini bulunuz.

Cözüm: x için lognormal kabulü yapılarak $y = \ln x$ değişkeninin parametreleri iki yoldan hesaplanır.

1. Her bir değerin logaritması alınır ve μ_y (ortalama) bulunur.

$$\mu_y = \bar{y} = \frac{\sum \ln y_i}{N} = \frac{\ln 100 + \ln 25 + \ln 12 + \ln 250 + \ln 10000 + \ln 75 + \ln 125 + \ln 600 + \ln 18 + \ln 1500}{10}$$

$$\mu_y = \bar{y} = 5.078$$

$$\sigma_y = \sqrt{K^2 - \mu_y^2} = 4.426$$

2. x değerlerinin parametreleri

$$\mu_x = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = 1270$$

$$\sigma_x = \sqrt{K^2 - \mu_x^2} = 9,62 \cdot 10^6 \quad C_v = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{9,62 \cdot 10^6}{1270} = 7574,80$$

Bu değerleri aşağıdaki formüllerde yazarsak,

$$\mu_y = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\mu_x^2}{C_v^2 + 1} \right] = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1270^2}{\left(\frac{9.62 \cdot 10^6}{1270} \right)^2 + 1} \right] = 6.176$$

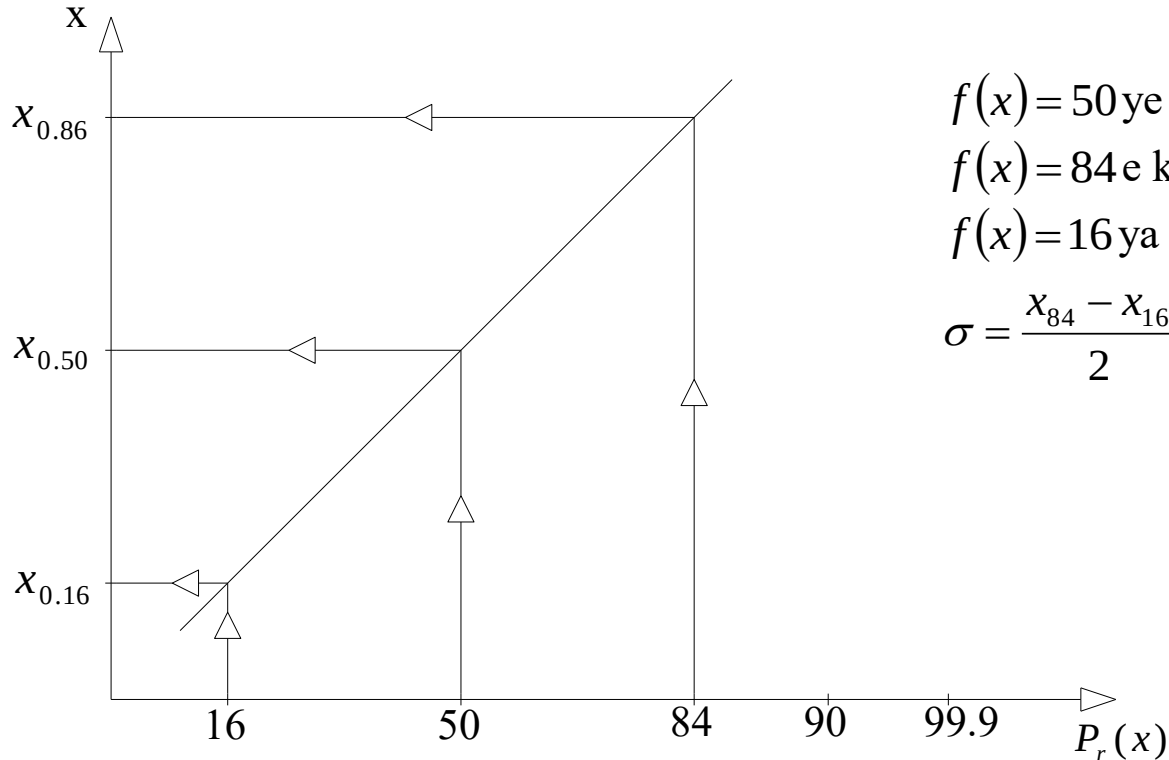
$$\underline{\underline{\sigma_y = \sqrt{\ln(C_v^2 + 1)}}} = 1.941$$

$$\mu_y = \ln \left[\frac{\mu_x}{\left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1 \right)^{0.5}} \right]$$

$$\sigma_y = \left[\ln \left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1 \right) \right]^{0.5}$$

LOGNORMAL DAĞILIMDA PARAMETRELERİN TAHMİNİ

1. Hesap yolu ile parametrelerin belirlenmesi $\mu_x, \sigma_x \rightarrow \mu_y, \sigma_y$
2. Grafik yöntem



$$f(x) = 50 \text{ ye karşılık gelen } x_{50} = \mu$$

$$f(x) = 84 \text{ e karşılık gelen } x_{84} = \mu + \sigma$$

$$f(x) = 16 \text{ ya karşılık gelen } x_{16} = \mu - \sigma \text{ okunur ve}$$

$$\sigma = \frac{x_{84} - x_{16}}{2} \text{ elde edilir.}$$

x eksenindeki (düşey eksen) değerler logaritmiktir.

Örnek: Bir su kaynağından alınan 10 örnekte koliform bakteri tayini yapılmıştır. Deney sonuçları aşağıda verildiğine göre σ ve μ değerlerini hem hesap yolu, hem de grafik yöntemle belirleyiniz. Dağılım lognormaldir.

Numune No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Koliform Bakteri Sayısı (x)	120	40	18	200	8900	84	140	480	26	1800

1) Hesap yolu

$$\mu_x = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{120 + 40 + \dots + 1800}{10} = 1180.8$$

$$\sigma_x^2 = \sqrt{K^2 - \mu_x^2} = 6,88 \cdot 10^6$$

Bu değerler yardımıyla σ_y ve μ_y hesaplanır.

$$\mu_y = 6.18 \quad \sigma_y = 1.33$$

$$\mu_y = \ln \left[\frac{\mu_x}{\left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1 \right)^{0.5}} \right] \quad \sigma_y = \left[\ln \left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} + 1 \right) \right]^{0.5}$$

2) Grafik yolu

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	18	26	40	84	120	140	200	480	1800	8900
Pr(x)	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.54	0.63	0.72	0.82	0.91

$$\underline{\mu_y = 5.3} \quad \underline{\sigma_y = 2.1} \quad \underline{\text{bulunur.}}$$

Lognormal Dağılımda K (Frekans Faktörü)

Lognormal dağılımda

$$y = \ln x = \mu_y + K \cdot \sigma_y$$

$$x_T = \bar{X} + \sigma \cdot K$$

Normal dağılımda

Logaritmik Dağılımda K Frekans Faktörü

Dönüş aralığı									
C _v	1.053	1.111	1.25	2	5	10	20	50	100
0.05	-1.601	-1.264	-0.848	-0.025	0.833	1.296	1.686	2.134	2.437
0.1	-1.555	-1.244	-0.851	-0.05	0.822	1.307	1.725	2.213	2.549
0.15	-1.508	-1.221	-0.852	-0.074	0.808	1.315	1.76	2.289	2.661
0.2	-1.46	-1.196	-0.85	-0.097	0.792	1.319	1.791	2.364	2.772
0.25	-1.412	-1.17	-0.846	-0.119	0.774	1.32	1.818	2.434	2.881
0.3	-1.363	-1.142	-0.84	-0.141	0.754	1.318	1.841	2.501	2.987
0.35	-1.315	-1.113	-0.831	-0.16	0.733	1.312	1.86	2.563	3.09
0.4	-1.268	-1.083	-0.822	-0.179	0.71	1.303	1.874	2.621	3.188
0.45	-1.222	-1.053	-0.81	-0.196	0.687	1.291	1.885	2.673	3.281
0.5	-1.178	-1.024	-0.798	-0.211	0.662	1.277	1.891	2.719	3.368
0.55	-1.134	-0.994	-0.785	-0.225	0.637	1.261	1.893	2.761	3.45
0.6	-1.093	-0.964	-0.77	-0.238	0.612	1.242	1.891	2.797	3.525
0.65	-1.053	-0.936	-0.756	-0.249	0.587	1.222	1.886	2.827	3.594
0.7	-1.014	-0.908	-0.741	-0.258	0.563	1.2	1.878	2.852	3.657
0.75	-0.978	-0.88	-0.725	-0.267	0.538	1.178	1.867	2.873	3.713
0.8	-0.943	-0.854	-0.71	-0.274	0.514	1.154	1.854	2.888	3.763
0.85	-0.91	-0.828	-0.695	-0.28	0.491	1.13	1.838	2.899	3.807
0.9	-0.878	-0.803	-0.679	-0.285	0.468	1.105	1.821	2.906	3.845
0.95	-0.849	-0.78	-0.664	-0.289	0.446	1.08	1.802	2.909	3.877
1	-0.82	-0.757	-0.649	-0.293	0.425	1.055	1.781	2.909	3.905

Örnek: $\mu_x = 3976 \text{ m}^3/\text{sn}$ ve $\sigma_x = 2210 \text{ m}^3/\text{sn}$ olan bir nehrin lognormal dağılıma uyduğu bilindiğine göre 100 yılda gelebilecek taşkın debisini bulunuz.

1.YOL: $\frac{1}{T} = \frac{1}{100} = 0.01$

$C_v = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{2210}{3976} = 0.556$ ve $T = 100$ yıl için

C_v - Dönüş Aralığı Tablosundan; $K = 3.46$ bulunur.

$x = \mu_x + \sigma_x \cdot K$

$x_{100} = 11623 \text{ m}^3/\text{sn}$

Normal dağılımda $x_{100} = 9215 \text{ m}^3/\text{sn}$ çıkmıştı.
(Daha önce)

Logaritmik Dağılımda K Frekans Faktörü									
Dönüş aralığı									
C_v	1.053	1.111	1.25	2	5	10	20	50	100
0.05	-1.601	-1.264	-0.848	-0.025	0.833	1.296	1.686	2.134	2.437
0.1	-1.555	-1.244	-0.851	-0.05	0.822	1.307	1.725	2.213	2.549
0.15	-1.508	-1.221	-0.852	-0.074	0.808	1.315	1.76	2.289	2.661
0.2	-1.46	-1.196	-0.85	-0.097	0.792	1.319	1.791	2.364	2.772
0.25	-1.412	-1.17	-0.846	-0.119	0.774	1.32	1.818	2.434	2.881
0.3	-1.363	-1.142	-0.84	-0.141	0.754	1.318	1.841	2.501	2.987
0.35	-1.315	-1.113	-0.831	-0.16	0.733	1.312	1.86	2.563	3.09
0.4	-1.268	-1.083	-0.822	-0.179	0.71	1.303	1.874	2.621	3.188
0.45	-1.222	-1.053	-0.81	-0.196	0.687	1.291	1.885	2.673	3.281
0.5	-1.178	-1.024	-0.798	-0.211	0.662	1.277	1.891	2.719	3.368
0.55	-1.134	-0.994	-0.785	-0.225	0.637	1.261	1.893	2.761	3.45
0.6	-1.093	-0.964	-0.77	-0.238	0.612	1.242	1.891	2.797	3.525
0.65	-1.053	-0.936	-0.756	-0.249	0.587	1.222	1.886	2.827	3.594
0.7	-1.014	-0.908	-0.741	-0.258	0.563	1.2	1.878	2.852	3.657
0.75	-0.978	-0.88	-0.725	-0.267	0.538	1.178	1.867	2.873	3.713
0.8	-0.943	-0.854	-0.71	-0.274	0.514	1.154	1.854	2.888	3.763
0.85	-0.91	-0.828	-0.695	-0.28	0.491	1.13	1.838	2.899	3.807
0.9	-0.878	-0.803	-0.679	-0.285	0.468	1.105	1.821	2.906	3.845
0.95	-0.849	-0.78	-0.664	-0.289	0.446	1.08	1.802	2.909	3.877
1	-0.82	-0.757	-0.649	-0.293	0.425	1.055	1.781	2.909	3.905

bilindiğine göre 100 yılda gelebilecek taşkın debisini bulunuz.

1.YOL: $\frac{1}{T} = \frac{1}{100} = 0.01$ = Aşılma olasılığı $Pr(x)$

$$C_v = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{2210}{3976} = 0.556 \text{ ve } T = 100 \text{ yıl için}$$

C_v - Dönüş Aralığı Tablosundan; $K = 3.46$ bulunur.

$$X = \mu_x + \sigma_x \cdot K$$

$$x_{100} = 11623 \text{ m}^3/\text{sn}$$

Normal dağılımda $x_{100} = 9215 \text{ m}^3/\text{sn}$ çıkmıştı.

2.YOL: $\mu_y = \frac{1}{2} \ln \frac{\mu_x^2}{C_v^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{3976^2}{0.556^2 + 1} = 8.153$

$$\sigma_y^2 = \ln(C_v^2 + 1) = \ln(0.556^2 + 1) = 0.269$$

$$\sigma_y = 0.519$$

$$y = \ln x = \mu_y + \sigma_y \cdot K = 8.153 + 0.519 \cdot 2.33 = 9.36$$

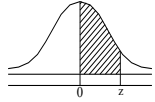
$$y = \ln x = 9.36$$

$$x=11614.39 \text{ m}^3/\text{sn}$$

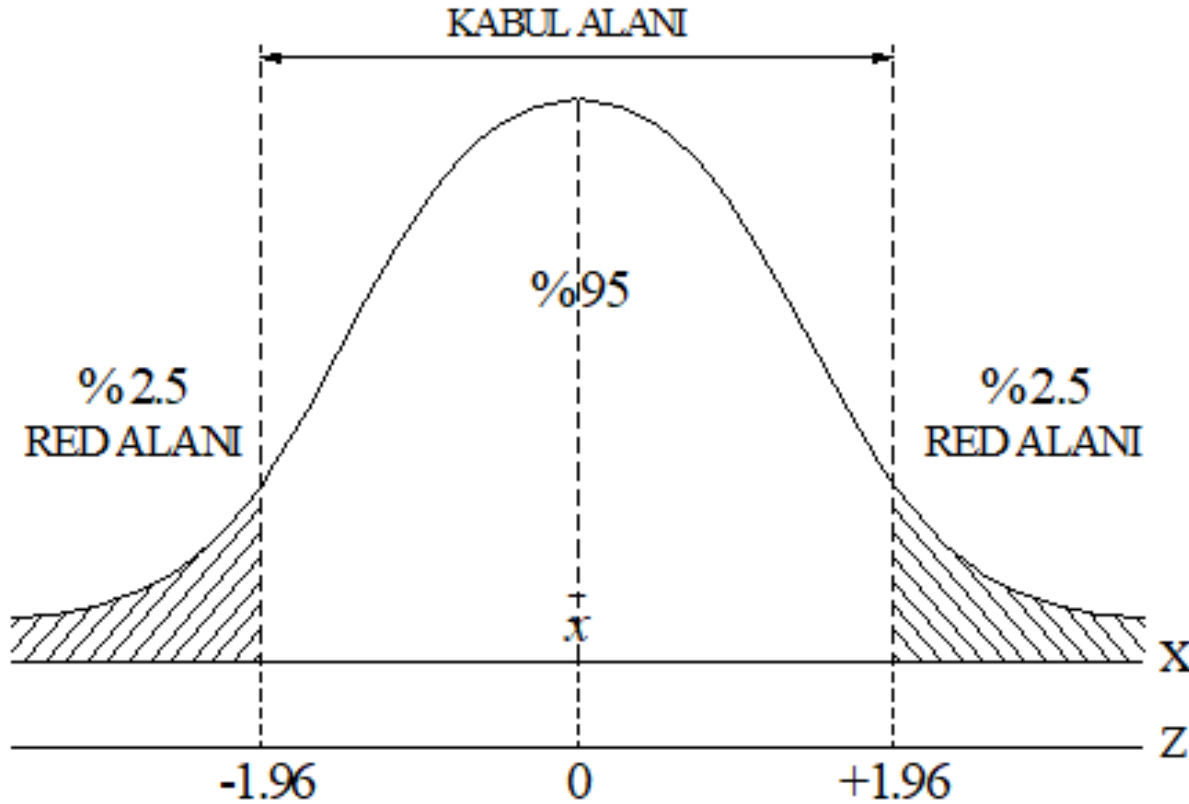
Normal dağılımda Aşılmama olasılığı ($1-\Pr(x)$) tablosu

0.5-aşılma
olasılığı(Pr(x)):
 $0.5-0.01=0.49$

0'DAN Z'YE KADAR NORMAL EĞRİNİN ALTINDA KALAN ALAN

[illegible]

Anlamlılık Seviyesinin Belirlenmesi



Alanların Sınırları	Bütün Alana Oranı (%)
$\pm \sigma$	68.3
$\pm 1.96\sigma$	95.0
$\pm 2\sigma$	95.5
$\pm 2.576\sigma$	99.0
$\pm 3\sigma$	99.7

UYGUNLUK VE BAĞIMSIZLIK TESTLERİ (Kİ-KARE TESTLERİ)

- frekans dağılımının spesifik bir teorik dağılıma belirli bir ölçüde uygun olup olmadığı (uygunluğu), yani gerçek ve teorik frekans dağılımları arasındaki farklar Ki-kare testi ile belirlenerek kontrol edilebilir.
- Ki-kare testi, gerçek frekanslarla teorik frekanslar arasında karşılaştırma yapmak esasına dayanır.

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(E_f - O_f)^2}{E_f}$$

E_f = Beklenen frekans (teorik frekans)

O_f = Gözlenen frekans (gerçek frekans)

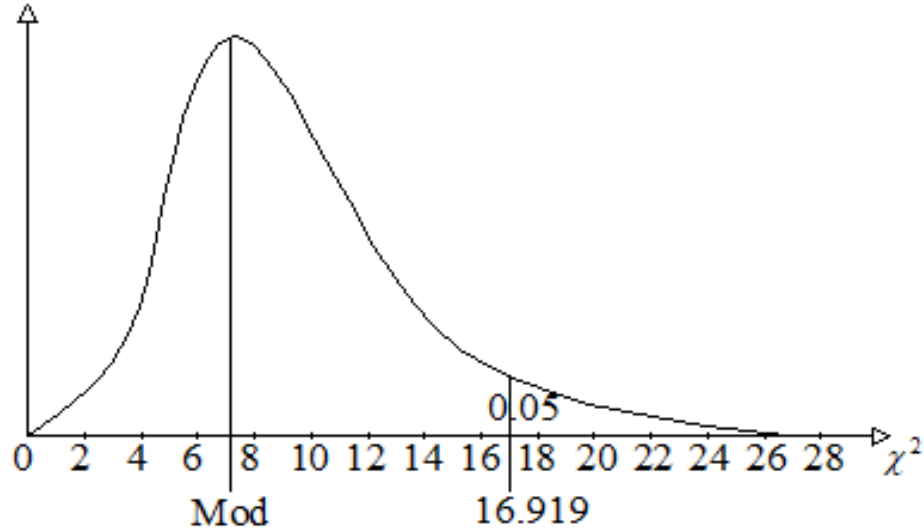
600 zar atışı

Şıklar	Gözlenen Frekanslar (O_f)	Teorik Frekanslar (E_f)	$(E_f - O_f)$	$(E_f - O_f)^2$	$\frac{(E_f - O_f)^2}{E_f}$
1	91	100	+9	81	0.81
2	112	100	-12	144	1.44
3	80	100	+20	400	4.00
4	108	100	-8	64	0.64
5	95	100	+5	25	0.25
6	114	100	-14	196	1.96
Toplam	600	600	0		$\chi^2 = 9.10$

$\chi^2 = 0 \Rightarrow$ gözlenen dağılımın beklenen (teorik) dağılıma aynen (yüzde yüz) uyar.

- değer sıfırdan uzaklaştıkça gözlenen durumun beklenen (teorik) dağılımdan uzaklaştığı, ona uymadığı anlaşılabacaktır

χ^2 Eğrileri ve χ^2 Tabloları



s.d.= serbestlik derecesi

Mod degeri: $\chi^2 = 9 - 2 = 7$

. Örneğin yukarıdaki tek zarla yapılan 600 atışlık deney örneğinde $\chi^2=9.10$ bulunmuştur. Bu örnekteki serbestlik derecesi de 5'tir. % 5 olasılık kademesine göre karar verilecek ise, 5 serbestlik derecesi ve % 5 olasılık kademesi için χ^2 tablosundaki değer araştırılacaktır. χ^2 tablo değeri tesadüflerin üst sınırını gösterdiğine göre, ancak bunun altında kalan χ^2 değerleri tesadüflere bağlanabilir. Sonuçta bizim örneğimizde:

$E_p = \% 5$ için $\chi^2=9.10 < \chi^2_{0.05} = 11.10$ şeklinde belirlenebilir.

TABLO 4**Kİ-KARE DAĞILIM TABLOSU**

f	p=0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.000157	0.000628	0.00393	0.0158	0.0642	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	0.0201	0.0404	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.00	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.040	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.000
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	4.107	4.756	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.683
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.821	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	7.015	7.906	9.390	10.865	13.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.856	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.359	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

SERBESTLİK DERECESESİ

- serbestlik derecesi verilerin içerdiği (frekans dağılımının gösterdiği) sıkların (veya grupların) sayısı (k) ile yakından ilgilidir.

$$f = k - l$$

k: Grup sayısı (şık sayısı)

l : Parametre sayısı (Teorik dağılımın parametre sayısı)

f : Serbestlik derecesi

Örnek: Japonya'nın Nagoya şehrinde meydana gelen depremlerin yıl olarak sayısı aşağıda verildiğine göre ve toplam olarak 185 tane depremin meydana geldiği bilindiğine göre Poisson dağılımına göre belirlenen teorik deprem sayılarını (teorik frekanslar) bulunuz ve % 5'lik bir olasılık kademesi için χ^2 Ki-kare testi ile hipotezin doğruluğunu kontrol ediniz.

Deprem sayısı (xi)	Gözlenen deprem sayısı (yıl) (fi)
0	40
1	70
2	41
3	20
4	13
5	0
6 veya daha fazla	1
Toplam	185