



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MEKANİK ANABİLİM DALI

DİNAMİK
0422311
DERSİ NOTLARI
ŞUBAT 2008

Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK

FORM 1: DERS TANITIM VE DEĞERLENDİRME

Kodu: 4202203 / 0422311		Dersin Adı: DİNAMİK						
Öğretim Yılı	Yarıyıl 1	Grup(lar)	Dili	Teori	Uyg.	Lab.	Kredi	ECTS
2007-2008	Güz	1-2-3-4	Türkçe	3	0	0	3	5
Dersin Türü		Temel Alan Dersi ☐	Alan Dersi ☒	Seçimlik Alan Dersi ☐		Sosyal ve Beşeri Bil. Dersi ☐		
Ön Koşul Dersleri		Yok						
Koordinatörü		Doç. Dr. İrfan COŞKUN						
Yürütücü(ler)		Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER, Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK, Doç. Dr. İrfan COŞKUN, Y. Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ, Y. Doç. Dr. Ayşe ERDÖLEN						
Amacı		Hareket eden maddesel nokta ve rijit cisimlerin incelenmesi.						
Dersin İçeriği		Maddesel Noktaların Kinematığı/ Maddesel Noktaların Kinetiği/ İş ve Enerji/ İmpuls ve Momentum/ Rijit Cisimlerin Kinematığı/ Rijit Cisimlerin Kinetiği (Düzlemsel Durum)/ Mekanik Titreşimler.						
Kazandırdığı Bilgi ve Beceriler		Dinamik ile ilgili problemlerin matematik modellerini kurabilme ve makul yaklaşıklıklarla istenen çözümleri elde edebilme özelliğinin kazanılması.						
Yararlanılan Kaynaklar		1. F. Beer ve E. R. Johnston, Jr., "DİNAMİK", Çevirenler: S. Tameroğlu, Tekin Özbek, Üç Er Matbaacılık, İstanbul (1979). 2. I. H. Shames, "Statics and Dynamics", Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi (1969).						
Ödev ve Proje Konuları		-						
Laboratuvar Deney Konuları		-						
Bilgisayar Yazılımları		-						
Diğer Etkinlikler		-						
BAŞARI DEĞERLENDİRME SİSTEMİ								
Teorik Ders			Proje Dersi ve Bitirme Çalışması					
	Adedi	Ağırlığı (%)		Adedi	Ağırlığı (%)			
Dönem İçi Sınavlar	2	60(2*0.30)	<i>Dönem İçi Sınavlar</i>					
Kısa Sınavlar	-		Dönem İçi Kontroller					
Ödevler	-		Ara Teslim					
Laboratuvar	-		<i>Sözlü Sınav</i>					
Diğer	-		<i>Diğer</i>					
Final Sınavı	1	40	<i>Final Sınavı</i>					

Hazırlayan: Doç. Dr. İrfan COŞKUN

Tarih: 28.12.2006

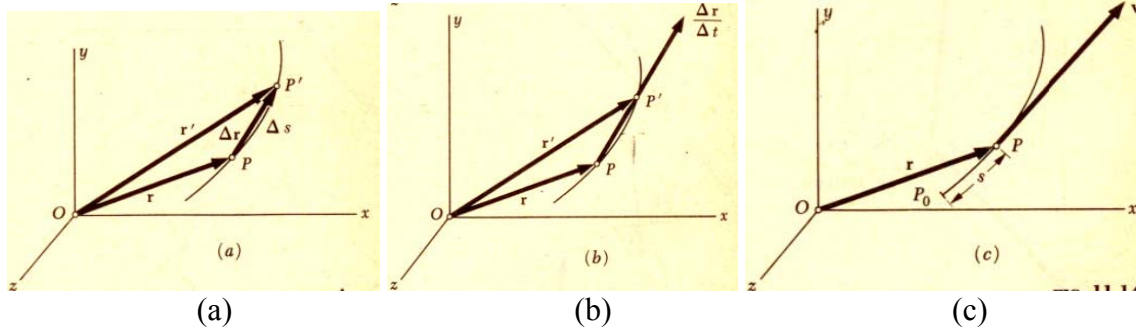
FORM 2: DERSİN İŞLENİŞ PROGRAMI

Kodu: 4202203 / 0422311	Dersin Adı: DİNAMİK
Yürütücü(ler)	Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER, Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK, Doç. Dr. İrfan COŞKUN, Y. Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ
1. Hafta	1. GİRİŞ 2. MADDESEL NOKTALARIN KİNEMATİĞİ - Diktörtgen koordinatlarda kinematik ifadeler - Doğal koordinatlarda kinematik ifadeler - Kutupsal koordinatlarda kinematik ifadeler
2. Hafta	- Silindirik koordinatlarda kinematik ifadeler - Ötelenme yapan bir takıma göre bağlı hareket
3. Hafta	3. MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ - Newton'un ikinci hareket yasası - Maddesel noktalar sistemi - D'Alembert ilkesi
4. Hafta	4. İŞ VE ENERJİ - Bir kuvvetin işi - İş - enerji denklemleri
5. Hafta	- Korunumlu (konservatif) kuvvetler - Minimum potansiyel enerji ilkesi
6. Hafta	5. İMPULS VE MOMENTUM - İmpuls ve momentum ilkesi - İmpulsif kuvvetler - Momentumun korunumu - Açısal momentum
7. Hafta	- Çarpışma - Elasto-kinetik
8. Hafta	6. RİJİT CİSİMLERİN KİNEMATİĞİ - Ötelenme - Sabit bir eksen etrafında dönme
9. Hafta	1. Vize Sınavı
10. Hafta	- Düzlemsel harekette salt ve bağlı hız - Düzlemsel harekette salt ve bağlı ivme
11. Hafta	7. RİJİT CİSİMLERİN KİNETİĞİ (Düzlemsel durum) Rijit bir cismin düzlemsel hareketi
12. Hafta	Rijit bir cismin düzlemsel hareketi ile ilgili problemler
13. Hafta	8. MEKANİK TİTREŞİMLER Sönümsüz titreşimler
14. Hafta	2. Vize Sınavı
15. Hafta	Sönümlü titreşimler

1. MADDESEL NOKTALARIN EĞRİSEL HAREKETİ

1.1.Yer vektörü, hız ve ivme. Bir maddesel nokta doğrusal olmayan bir çizgi üzerinde hareket ediyorsa nokta *eğrisel hareket* yapıyor denir. Noktanın verilen bir t zamanında bulunduğu P yerini tanımlamak için, örneğin Şekil 1.1a daki gibi eksenleri sabit bir x, y, z karşılaştırma takımı seçer ve O başlangıç noktasını P ye bağlayan $\vec{r}$ vektörünü çizeriz. $\vec{r}$ vektörü, r şiddeti ve karşılaştırma eksenlerine göre doğrultusu ve yönü ile tanımlandığından noktanın yerini bu eksenlere göre tam olarak belirtmiş olur; bu $\vec{r}$ vektörüne, noktanın t anındaki *yer vektörü* adı verilir.

Şimdi aynı noktanın biraz sonraki $t + \Delta t$ zamanında bulunduğu P' yerini tanımlayan $\vec{r}'$ vektörünü göz önüne alalım. P ile P' yü birleştiren $\Delta\vec{r}$ vektörü, yer vektörünün Δt zaman aralığındaki değişimini gösterir, çünkü Şekil 1.1a dan kolayca görülebileceği üzere, $\vec{r}'$ vektörü, $\vec{r}$ ve $\Delta\vec{r}$ vektörlerinin üçgen kuralına göre toplanması ile elde edilir. $\Delta\vec{r}$ nin, $\vec{r}$ vektörünün hem *doğrultusu ve yönünde*, hem de *şiddetindeki* değişmeyi gösterdiğine dikkati çekeriz. Maddesel noktanın Δt zaman aralığındaki *ortalama hızı*, $\Delta\vec{r}$ nin Δt ye oranı olarak tanımlanır. $\Delta\vec{r}$ bir vektör, Δt ise bir skaler olduğundan, $\Delta\vec{r} / \Delta t$ oranı, P den geçen ve $\Delta\vec{r}$ ile aynı doğrultu ve yönde olan bir vektördür; şiddeti ise $\Delta\vec{r}$ nin şiddetinin Δt ye bölümünden elde edilen değere eşittir (Şekil 1.1b).



Şekil 1.1

Maddesel noktanın t anındaki *ani hızı*, Δt zaman aralıklarını ve karşıt olarak $\Delta\vec{r}$ vektör artımlarını gittikçe küçülterek elde edilir. Böylece ani hız

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (1.1)$$

vektörü ile gösterilir. $\Delta\vec{r}$ ve Δt küçüldükçe, P ve P' noktaları birbirine yaklaşır: Şu halde $\vec{v}$ vektörü limitte maddesel noktanın yörüngesine teğet olur (Şekil 1.1c).

$\vec{r}$ vektörünün yeri t zamanına bağlı olduğundan, buna t skaler değişkeninin *vektör fonksiyonu* adını verebiliriz ve $\vec{r}(t)$ ile gösterebiliriz. Skaler fonksiyonun türevi kavramını da genişleterek $\Delta\vec{r} / \Delta t$ limitine, $\vec{r}(t)$ vektör fonksiyonunun *türevi* adını vereceğiz. Şu halde:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.2)$$

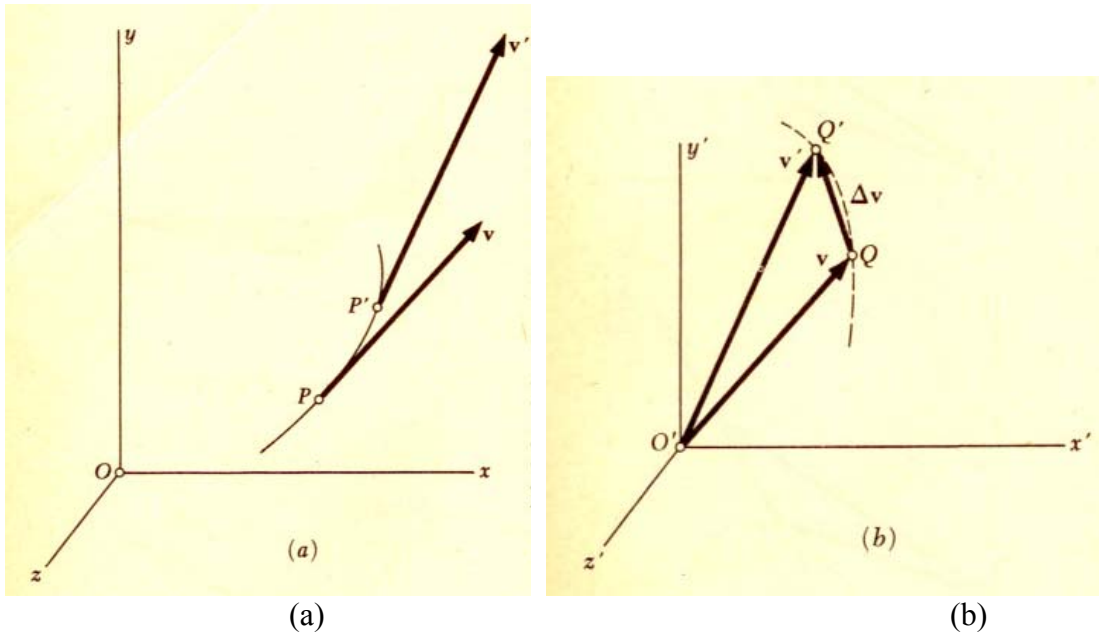
$\vec{v}$ vektörünün v şiddetine, maddesel noktanın **yörünge hızı** adı verilir. Bu, (1.1) denkleminde $\Delta\vec{r}$ vektörünün yerine, PP' kirişinin şiddetini koyarak elde edilebilir. Oysa Δt azaldıkça, PP' kirişinin boyu, PP' yayının Δs boyuna yaklaşır (Şekil 1.1a) ve dolayısıyla

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{pp'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.3)$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

yazabiliriz. Şu halde hızın v şiddeti, maddesel noktanın katettiği s yay boyunu t ye göre türeterek elde edilebilir.

Maddesel noktanın t zamanındaki $\vec{v}$ hızı ile $t + \Delta t$ zamanındaki $\vec{v}'$ hızını göz önüne alalım (Şekil 1.2a). Her iki $\vec{v}$ ve $\vec{v}'$ vektörünü aynı O' başlangıç noktasına taşıyalım (Şekil 1.2b). Q ile Q' yü birleştiren $\Delta\vec{v}$ vektörü, Δt zaman aralığında maddesel noktanın hızındaki değişmeyi gösterir, çünkü $\vec{v}'$ vektörü $\vec{v}$ ile $\Delta\vec{v}$ nin toplanmasıyla elde edilebilir. $\Delta\vec{v}$ nin, hızın hem **doğrultu ve yönünde**, hem de **şiddetindeki** değişmeyi gösterdiğine dikkat etmelidir. Maddesel noktanın Δt zaman aralığındaki **ortalama ivmesi**, $\Delta\vec{v}$ nin Δt ye oranı olarak tanımlanır. $\Delta\vec{v}$ bir vektör, Δt ise bir skaler olduğu için, $\Delta\vec{v} / \Delta t$ oranı, $\Delta\vec{v}$ nin doğrultu ve yönünde olacaktır.



Şekil 1.2

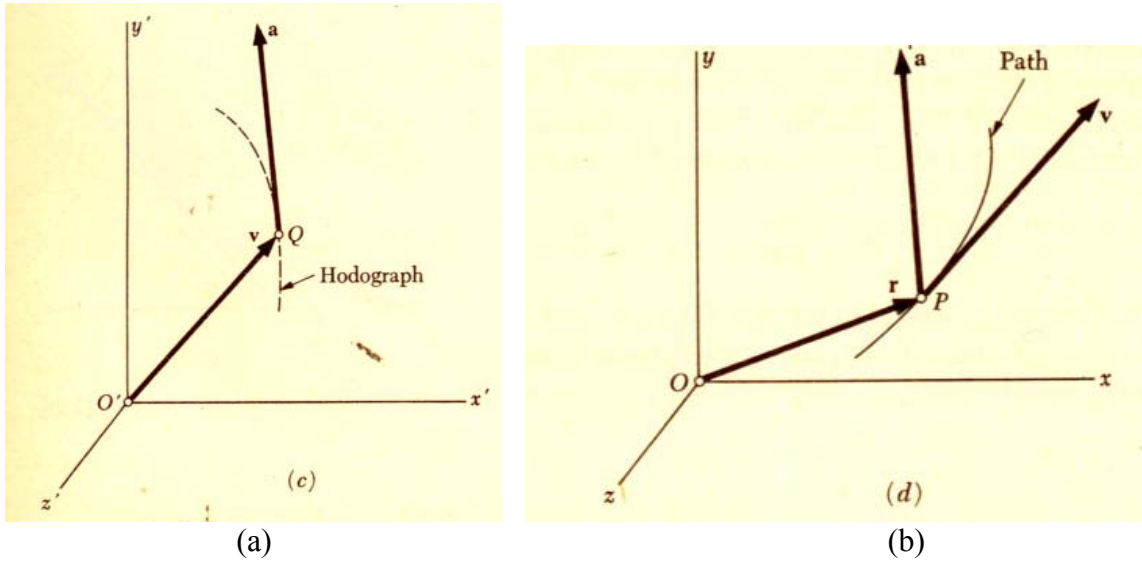
Maddesel noktanın t zamanındaki **ani ivmesi**, Δt ve $\Delta\vec{v}$ yi gittikçe küçülterek elde edilir. Böylece ani ivme

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad (1.4)$$

vektörü ile gösterilir. $\vec{v}$ hızının t zamanının $\vec{v}(t)$ şeklinde bir vektör fonksiyonu olduğuna dikkat ederek $\Delta\vec{v}/\Delta t$ oranının limitine, $\vec{v}$ nin t ye göre türevi adını verebiliriz. Şu halde:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.5)$$

Görüyoruz ki $\vec{a}$ ivmesi, $\vec{v}$ vektörleri sabit bir O' başlangıç noktasına taşındığı takdirde, bu vektörlerin Q uçlarının çizdiği eğriye teğet olmakta (Şekil 1.3a) ve genel olarak maddesel noktanın yörüngesine teğet **olmamaktadır** (Şekil 1.3b). $\vec{v}$ vektörlerinin uçlarının çizdiği ve Şekil 1.3a da gösterilen eğriye hareketin **hodografi** adı verilir.



Şekil 1.3

1.2. Vektör fonksiyonlarının türevleri. Bundan önceki kısımda, eğrisel harekette bir maddesel noktanın yerini belirleyen $\vec{r}(t)$ vektör fonksiyonunun türevi ile $\vec{v}(t)$ hızının gösterilebileceğini gördük. Benzer şekilde, noktanın $\vec{a}$ ivmesi de $\vec{v}(t)$ vektör fonksiyonunun türevi olarak gösterilebilmektedir. Bu kısımda vektör fonksiyonlarının türevleri için formel bir tanım verecek ve vektörlerin toplam ve çarpımlarının türevlerine ait birkaç kural çıkaracağız.

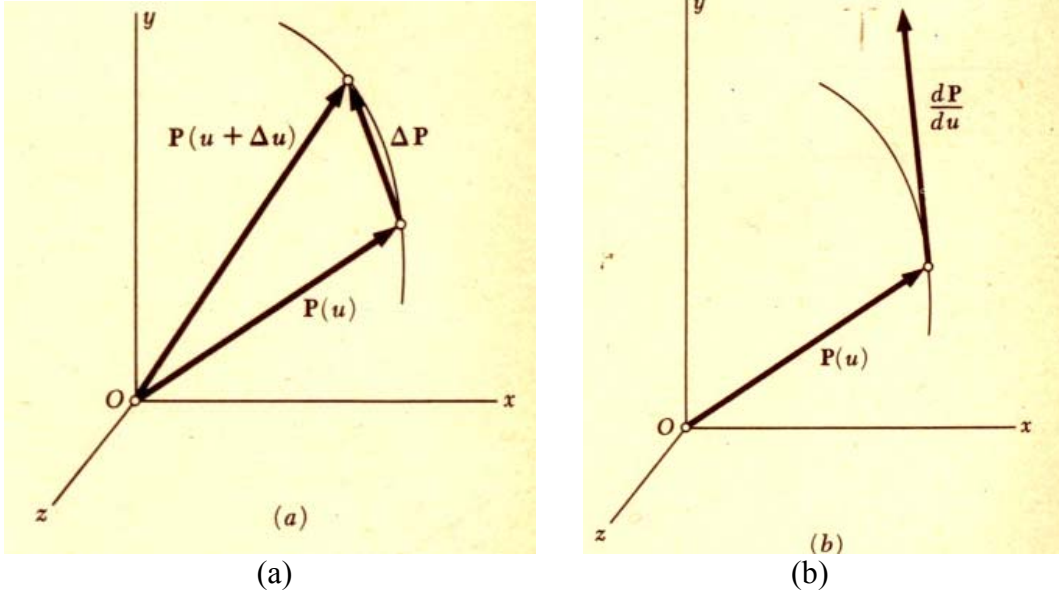
u skaler değişkeninin vektör fonksiyonu $\vec{P}(u)$ olsun. Bundan amacımız şudur: u skaleri, $\vec{P}$ vektörünün şiddetini, doğrultusunu ve yönünü tam olarak tanımlamaktadır. $\vec{P}$ vektörü sabit bir O başlangıç noktasından alınır ve u değiştirilirse, $\vec{P}$ nin ucu uzayda belirli bir eğri çizer. Skaler değişkenin sırasıyla u ve $u + \Delta u$ değerlerine karşı gelen $\vec{P}$ vektörlerini göz önüne alalım (Şekil 1.4a). Bu verilen iki vektörün uçlarını birleştiren vektör $\Delta\vec{P}$ olsun. Şu halde

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}(u + \Delta u) - \vec{P}(u)$$

yazılır. Bunu Δu ya bölüp Δu yu sıfıra yaklaştırarak, $\vec{P}(u)$ **vektör fonksiyonunun türevini tanımlıyoruz** :

$$\frac{d\vec{P}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{P}(u + \Delta u) - \vec{P}(u)}{\Delta u} \quad (1.6)$$

Δu sıfıra yaklaştıkça $\Delta \vec{P}$ nin etki çizgisi Şekil 1.4a daki eğriye teğet hale gelir. Şu halde $\vec{P}(u)$ vektör fonksiyonunun $d\vec{P}/du$ türevi, $\vec{P}(u)$ **nun ucunun çizdiği eğriye teğettir**.



Şekil 1.4

Şimdi de skaler fonksiyonların toplam ve çarpımlarının türevlerine ait kuralların, vektör fonksiyonlarına da uygulanabileceğini göstereceğiz. Önce aynı u skaler değişkeninin $\vec{P}(u)$ ve $\vec{Q}(u)$ gibi **iki vektör fonksiyonunun toplamını** göz önüne alalım. (1.6) da verilen tanım gereğince $\vec{P} + \vec{Q}$ vektörünün türevi

$$\frac{d(\vec{P} + \vec{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta(\vec{P} + \vec{Q})}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta u} + \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta u} \right)$$

veya, bir toplamın limiti, terimlerinin limitlerinin toplamına eşit olduğundan

$$\frac{d(\vec{P} + \vec{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta(\vec{P})}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta u} \quad (1.7)$$

$$\frac{d(\vec{P} + \vec{Q})}{du} = \frac{d\vec{P}}{du} + \frac{d\vec{Q}}{du}$$

yazılır.

Şimdi de aynı u skaler değişkeninin **bir $f(u)$ skaler fonksiyonu ile $\vec{P}(u)$ vektör fonksiyonunun çarpımının** türevini göz önüne alalım. $f\vec{P}$ vektörünün türevi

$$\frac{d(f\vec{P})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(f + \Delta f)(\vec{P} + \Delta \vec{P}) - f\vec{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta u} \vec{P} + f \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta u} \right)$$

veya toplam ve çarpımların limitlerine ait özellikleri hatırlayarak

$$\frac{d(f\vec{P})}{du} = \frac{df}{du} \vec{P} + f \frac{d\vec{P}}{du} \quad (1.8)$$

olur. $\vec{P}(u)$ ve $\vec{Q}(u)$ gibi iki vektör fonksiyonunun **skaler çarpımının** ve **vektörel çarpımının** türevleri de, benzer şekilde elde edilebilir :

$$\frac{d(\vec{P} \cdot \vec{Q})}{du} = \frac{d\vec{P}}{du} \cdot \vec{Q} + \vec{P} \cdot \frac{d\vec{Q}}{du} \quad (1.9)$$

$$\frac{d(\vec{P} \times \vec{Q})}{du} = \frac{d\vec{P}}{du} \times \vec{Q} + \vec{P} \times \frac{d\vec{Q}}{du} \quad (1.10)$$

Vektörel çarpım komütatif olmadığı için (1.10) daki çarpanların sırası bozulmamalıdır.

Yukarıda çıkarılan özellikleri, bir $\vec{P}(u)$ **vektör fonksiyonunun türevinin dik bileşenlerini** bulmakta kullanacağız. $\vec{P}$ nin sabit x, y, z dik eksenleri üzerindeki izdüşümlerini

$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k} \quad (1.11)$$

yazalım; burada P_x, P_y, P_z ; $\vec{P}$ vektörünün skaler dik (kartezyen) bileşenleri ve $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sırasıyla x, y ve z eksenleri üzerindeki birim vektörlerdir. (1.7) gereğince $\vec{P}$ nin türevi, sağ taraftaki terimlerin türevlerinin toplamına eşittir. Bu terimlerin her biri bir skaler ve vektör fonksiyonunun çarpımı olduğundan (1.8) i kullanmamız gerekir. Oysa $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birim vektörlerinin şiddetleri sabittir (1 e eşit) ve yönleri değişmemektedir. Şu halde onların türevleri sıfırdır ve

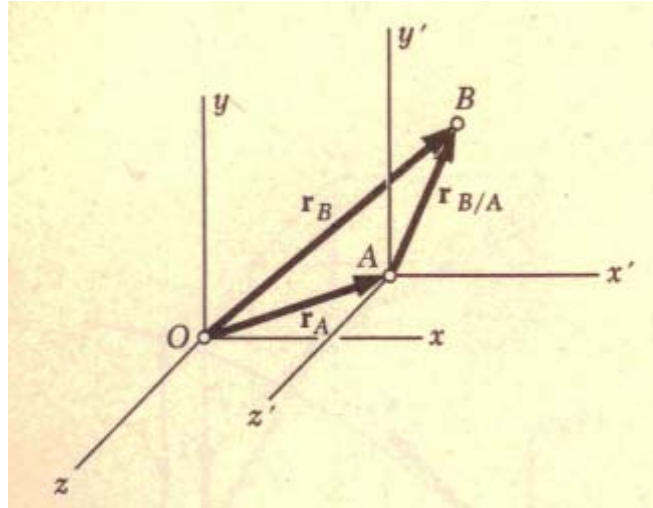
$$\frac{d\vec{P}}{du} = \frac{dP_x}{du} \vec{i} + \frac{dP_y}{du} \vec{j} + \frac{dP_z}{du} \vec{k} \quad (1.12)$$

yazılır. Birim vektörlerin katsayıları tanım gereğince $d\vec{P}/du$ vektörünün skaler bileşenleri olduğundan, şu sonuca ulaşırız : **Bir $\vec{P}(u)$ vektör fonksiyonunun $d\vec{P}/du$ türevinin dik skaler bileşenleri, $\vec{P}$ nin karşıt skaler bileşenlerinin türevlerini alarak elde edilir.**

Bir vektörün değişim hızı. $\vec{P}$ vektörü t zamanının fonksiyonu ise, bu vektörün $d\vec{P}/dt$ türevi, $\vec{P}$ nin $Oxyz$ takımına göre **değişim hızını** gösterir. $\vec{P}$ yi dik bileşenlere ayırarak (1.12) gereğince aşağıdaki eşitlik bulunur :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt} \vec{i} + \frac{dP_y}{dt} \vec{j} + \frac{dP_z}{dt} \vec{k} \quad (1.13)$$

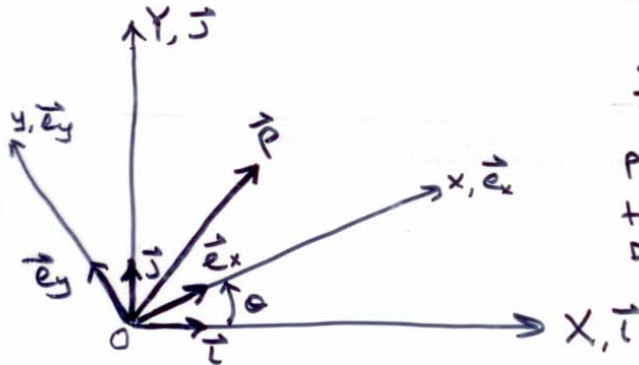
Daha sonra görüleceği gibi, bir $\vec{P}$ vektörünün **hareketli bir karşılaştırma takımından** gözlenen değişim hızı, genel olarak sabit bir karşılaştırma takımından gözlenen değişim hızından farklıdır. Bununla birlikte, eğer hareketli $O'x'y'z'$ takımı **ötelenme** yapıyorsa, yani eksenleri, sabit $Oxyz$ takımının karşıt eksenlerine paralel kalıyorsa (Şekil 1.5), iki takımda da aynı $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birim vektörleri kullanılır ve $\vec{P}$ vektörünün P_x, P_y, P_z bileşenleri, verilen bir anda her iki takımda da aynı olur. (1.13) den, $d\vec{P}/dt$ değişim hızının, $Oxyz$ ve $O'x'y'z'$ takımlarına göre aynı olduğu sonucu çıkar. O halde şunu söyleyebiliriz : **Bir vektörün, sabit bir takıma göre değişim hızı ile ötelenme yapan bir takıma göre değişim hızı aynıdır.** Bu özellik işimizi bir hayli kolaylaştıracaktır, çünkü biz esas olarak, ötelenme yapan takımlarla uğraşacağız.



Şekil 1.5

Döner Bir Takıma Göre Bir Vektörün Değişim Hızı (3')

Bu örnekte bir $\vec{P}$ vektörünün değişim hızının sabit bir takıma ve öteleme yapan bir takıma göre aynı olduğu belirtilmiştir. Burada bir $\vec{P}$ vektörünün sabit bir takıma göre değişim hızı ile döner bir takıma göre değişim hızı karşılaştırılacaktır. Ayrıca bir takıma göre bileşenleriyle verilen $\vec{P}$ 'nin ötekli karşılaştırma takıma göre değişim hızının belirlenmesi öğretilmektedir.



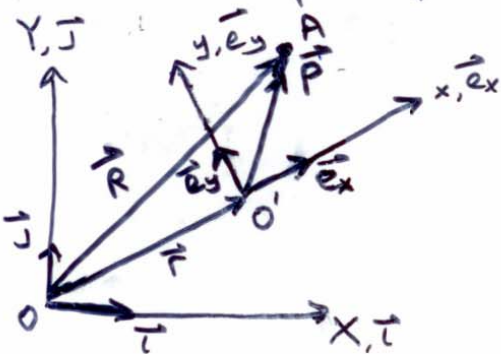
$$\vec{P} = P_x \vec{e}_x + P_y \vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dP_y}{dt} \vec{e}_y$$

P_x ve P_y , $\vec{P}$ vektörünün döner takıma göre bileşenleridir. Döner takıma göre $\vec{e}_x$ ve $\vec{e}_y$ vektörleri sabit vektörlerdir.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \underbrace{\frac{dP_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dP_y}{dt} \vec{e}_y}_{\frac{d\vec{P}}{dt}} + \underbrace{P_x \frac{d\vec{e}_x}{dt} + P_y \frac{d\vec{e}_y}{dt}}_{\vec{\Omega} \times \vec{P}} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{P}$$

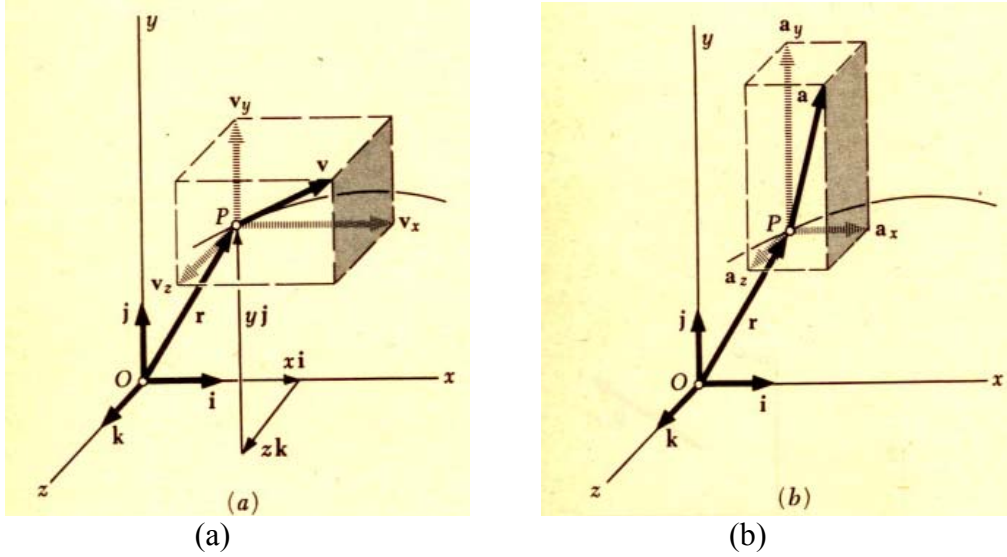
$\vec{P}$ vektörü Oxy takımına göre sabit olsaydı $\frac{d\vec{P}}{dt}$ sıfır olurdu. Bu durumda $P_x \frac{d\vec{e}_x}{dt} + P_y \frac{d\vec{e}_y}{dt}$ 'nin $\vec{\Omega} \times \vec{P}$ ($\Omega = \dot{\theta}$) olduğu ortaya çıkar. Bu durumda, döner bir takıma göre bir maddesel noktanın hızı bilindiğinde, bu noktanın sabit bir takıma göre hızı ulaşılabileceği anlaşılmış olur. Hareketli takıma hem döner hem de öteleme yapan durumda izleyen ifadeye ulaşılır:



$\vec{P}$ 'nin Oxy ye göre, $\vec{r}$ 'nin OXY ye göre bileşenleri bilinmektedir. A noktasının sabit takıma göre hızı saptanmaktadır.

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{P}$$

1.3. Hız ve İvmenin Dik Bileşenleri. Bir P maddesel noktasının herhangi bir andaki yeri x, y, z dik koordinatlarıyla tanımlanmışsa, noktanın $\vec{v}$ hızının ve $\vec{a}$ ivmesinin de dik bileşenlere ayrılması kolay olur (Şekil 1.6).



Şekil 1.6

$\vec{r}$ yer vektörünü dik bileşenlere ayırarak

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1.14)$$

yazarız.; burada x, y, z koordinatları, t zamanının fonksiyonlarıdır. İki kere türev alarak

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad (1.15)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad (1.16)$$

elde ederiz; burada x, y, z nin t ye göre birinci ve ikinci türevleri $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ve $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ ile gösterilmektedir. (1.15) ve (1.16) dan hız ve ivmenin skaler bileşenlerinin

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \quad (1.17)$$

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z} \quad (1.18)$$

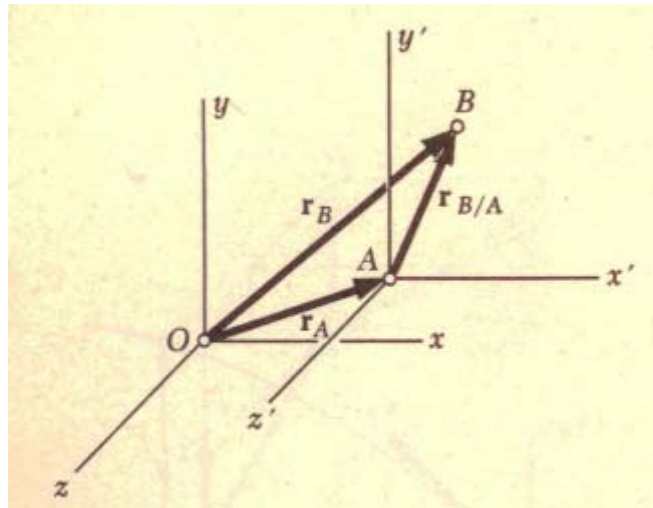
olduğu anlaşılır. V_x in pozitif olması, $\vec{v}_x$ vektör bileşeninin sağa doğru; negatif olması, sola doğru yönlenmiş olduğunu ifade eder; diğer vektör bileşenlerinin yönleri de benzer şekilde karşıt skaler bileşenlerinin işaretinden belirtilir. İstenirse, hız ve ivmenin şiddet, doğrultu ve yönleri de elde edilebilir.

Eğer ivmenin a_x bileşeni yalnız t, x ve/veya v_x e bağlı ise ve benzer şekilde a_y yalnız t, y ve/veya v_y ye ve a_z ; t, z ve/veya v_z ye bağlı ise, maddesel noktanın yeri, hızı ve ivmesini belirlemek için dik koordinatların kullanılması etkili olur. O zaman (1.18) denklemleri, ve

aynı şekilde (1.17) denklemleri bağımsız olarak integre edilebilir. Başka bir deyimle, maddesel noktanın x doğrultusundaki, y doğrultusundaki ve z doğrultusundaki hareketi ayrı ayrı göz önüne alınabilir.

1.4. Ötelenme Yapan Bir Takıma Göre Bağlı Hareket. Önceki kısımda, bir maddesel noktanın hareketini tanımlamak için bir tek takım kullanılmıştı. Pek çok durumlarda bu takım dünyaya bağlı alınmış ve sabit kabul edilmişti. Şimdi, aynı anda birden fazla karşılaştırma takımı kullanmanın kolaylık sağlayabileceği halleri inceleyeceğiz. Takımlardan biri dünyaya bağlı ise ona **sabit karşılaştırma takımı**, diğer takımlara ise **hareketli karşılaştırma takımı** adını vereceğiz. Bununla birlikte sabit bir karşılaştırma takımının seçimi tamamıyla keyfidir. Herhangi bir takım **sabit** olarak alınabilir; o zaman bu takıma rijit bağlı olmayan bütün öteki takımlar **hareketli** sayılır.

Uzayda hareket etmekte olan A ve B gibi iki maddesel nokta göz önüne alalım (Şekil 1.7); $\vec{r}_A$ ve $\vec{r}_B$ vektörleri bu noktaların, verilen herhangi bir anda, $Oxyz$ sabit takımındaki yerlerini tanımlasınlar. Şimdi başlangıç noktası A da olan ve x, y, z eksenlerine paralel bir x', y', z' eksen takımını göz önüne alalım. Bu eksenlerin başlangıcı



Şekil 1.7

hareket ettiği halde doğrultuları aynı kalmaktadır; $Ax'y'z'$ takımı, $Oxyz$ takımına göre **ötelenme** yapmaktadır. A ile B yi birleştiren $\vec{r}_{B/A}$ vektörü, **B nin $Ax'y'z'$ takımına göre bağlı (veya kısaca, B nin A ya göre bağlı) yerini** tanımlar.

Şekil 1.7 den görülür ki, B maddesel noktasının $\vec{r}_B$ yer vektörü, A noktasının $\vec{r}_A$ yer vektörü ile B nin A ya göre $\vec{r}_{B/A}$ bağıl yer vektörünün toplamıdır; o halde

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad (1.19)$$

yazılır. (1.19) un, sabit karşılaştırma takımında, t ye göre türevini alarak

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} \quad (1.20)$$

elde ederiz. $d\vec{r}_A/dt$ ve $d\vec{r}_B/dt$ türevleri, A ve B maddesel noktalarının $\vec{v}_A$ ve $\vec{v}_B$ hızlarını gösterir. $d\vec{r}_{B/A}/dt$ ise, $\vec{r}_{B/A}$ nın hem $Ax'y'z'$ takımına göre, hem de sabit takıma göre değişim hızını gösterir, çünkü $Ax'y'z'$ ötelenme yapmaktadır. O halde bu türev B **nin** $Ax'y'z'$ **takımına göre** $\vec{v}_{B/A}$ **bağlı hızını** (veya kısaca, B **nin** A **ya göre** $\vec{v}_{B/A}$ **bağlı hızını**) tanımlar :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad (1.21)$$

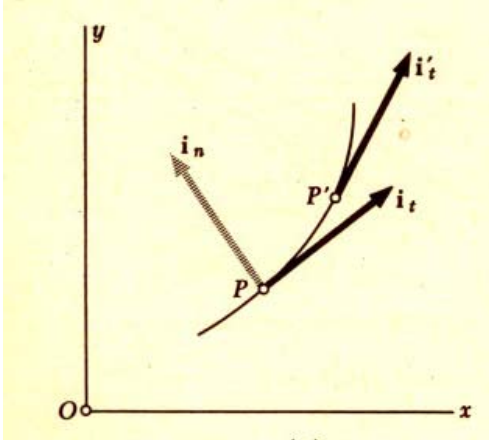
(1.21) in t ye göre türevini alarak B nin $Ax'y'z'$ **takımına göre** $\vec{a}_{B/A}$ **bağlı ivmesini** (veya kısaca, B **nin** A **ya göre** $\vec{a}_{B/A}$ **bağlı ivmesini**) tanımlamak için $d\vec{v}_{B/A}/dt$ türevini kullanarak şu sonuç elde edilir :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad (1.22)$$

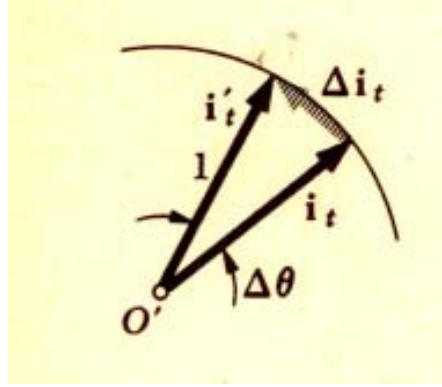
B nin, sabit $Oxyz$ takımına göre hareketine, B **nin salt hareketi** denir. Bu kısımda çıkardığımız denklemler şunu göstermektedir : B **nin salt hareketi**, A **nın hareketi ile** A **ya bağlanmış hareketli bir takıma göre** B **nin bağlı hızını bileştirerek elde edilebilir**. Örneğin, (1.21) denklemi, B noktasının $\vec{v}_B$ salt hızının, A nın hızı ile B nin $Ax'y'z'$ takımına göre hızını vektörel olarak toplamak suretiyle elde edilebileceğini ifade etmektedir. (1.22) denklemi, benzer özelliği ivmeler cinsinden vermektedir. Bununla birlikte, $Ax'y'z'$ **takımının ötelenme yaptığı**, yani A noktası hareket ettiği halde eksenlerin aynı doğrultuyu koruduğunu hatırdan çıkarmamak gereklidir. İleride görüleceği gibi dönme yapan karşılaştırma takımlarında, farklı bağıntılar kullanma zorunluluğu vardır.

1.5. Teğetsel ve normal bileşenler. Bir maddesel noktanın hızının, maddesel noktanın yörüngesine teğet bir vektör olduğunu, fakat ivmesinin genel olarak yörüngeye teğet olmadığını Kısım 1.1 de görmüştük. Bazı hallerde, ivmeyi yörüngenin teğeti ve normali doğrultusunda bileşenlere ayırmak daha yararlı olmaktadır.

Maddesel noktanın düzlemsel hareketi. Önce şekil düzleminde bulunan bir eğri üzerinde hareket eden, bir maddesel noktayı göz önüne alacağız. Verilmiş bir anda maddesel noktanın yeri P olsun. P ye, maddesel noktanın yörüngesine teğet olan ve hareket doğrultusu yönünde bir $\vec{i}_t$ birim vektörü bağlayalım (Şekil 1.8a). Noktanın biraz sonraki P' yerine karşı gelen birim vektör $\vec{i}_t'$ olsun. Her iki vektörü aynı O' başlangıç noktasına taşıyarak $\Delta\vec{i}_t = \vec{i}_t' - \vec{i}_t$ vektörünü (Şekil 1.8b) tanımlıyoruz. $\vec{i}_t$ ve $\vec{i}_t'$, birim boyda



(a)



(b)

Şekil 1.8

olduklarından uçları 1 yarıçaplı bir çember üzerinde bulunacaktır. $\vec{i}_t$ ve $\vec{i}'_t$ nün yaptıkları açıyı $\Delta\theta$ ile gösterirsek, $\Delta\vec{i}_t$ nin şiddetini $2\sin(\Delta\theta/2)$ olarak buluruz. Şimdi $\Delta\vec{i}_t / \Delta\theta$ vektörünü göz önüne alırsak, $\Delta\theta$ sıfıra yaklaştığı zaman bu vektör Şekil 1.8b deki birim çembere teğet olur ve şiddeti de

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{2\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1$$

e yaklaşır. Şu halde limitte, maddesel noktanın yörüngesine normal, $\vec{i}_t$ nin döndüğü yönde bir birim vektör elde edilmektedir. Bu vektörü $\vec{i}_n$ ile göstererek

$$\begin{aligned} \vec{i}_n &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{i}_t}{\Delta\theta} \\ \vec{i}_n &= \frac{d\vec{i}_t}{d\theta} \end{aligned} \quad (1.23)$$

yazabiliriz.

Maddesel noktanın $\vec{v}$ hızı yörüngeye teğet olduğundan bunu, v skaleri ile $\vec{i}_t$ vektörünün çarpımı olarak yazabiliriz :

$$\vec{v} = v\vec{i}_t \quad (1.24)$$

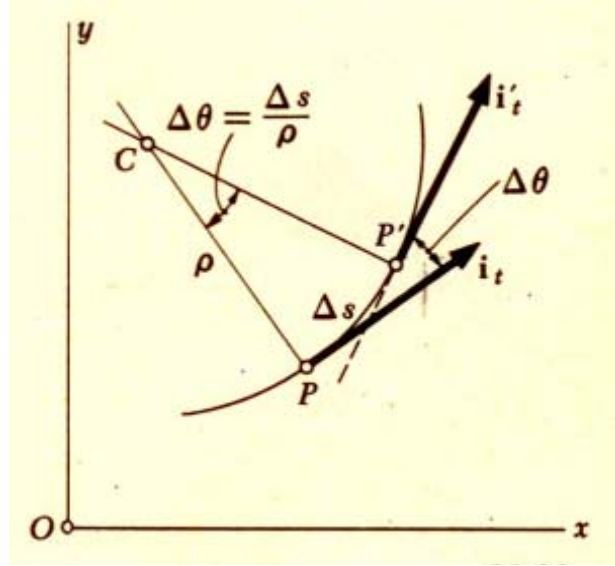
Maddesel noktanın ivmesini elde etmek için (1.24) ün t ye göre türevini almamız gerekir. Bir skalerle bir vektör fonksiyonunun çarpımının türevine ait kuralı uygulayarak (Kısım 1.2)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{i}_t + v \frac{d\vec{i}_t}{dt} \quad (1.25)$$

yazabiliriz. Oysa

$$\frac{d\vec{i}_t}{dt} = \frac{d\vec{i}_t}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt}$$

dir. (1.3) den $ds/dt=v$, (1.23) den $d\vec{i}_t/d\theta = \vec{i}_n$ ve elemanter hesaptan da, ρ yörüngenin eğrilik yarıçapı olmak üzere, $d\theta/ds$ nin, $1/\rho$ ya eşit olduğunu hatırlayarak (Şekil 1.9)



Şekil 1.9

$$\frac{d\vec{i}_t}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{i}_n \quad (1.26)$$

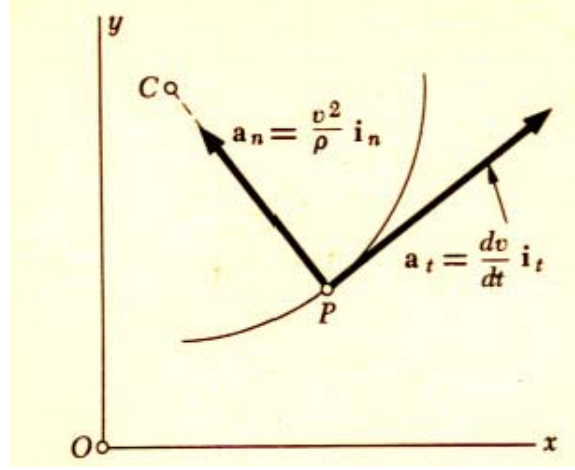
elde ederiz. Bunu (1.25) de yerine koyarak

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{i}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{i}_n \quad (1.27)$$

buluruz. Şu halde ivmenin skaler bileşenleri

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (1.28)$$

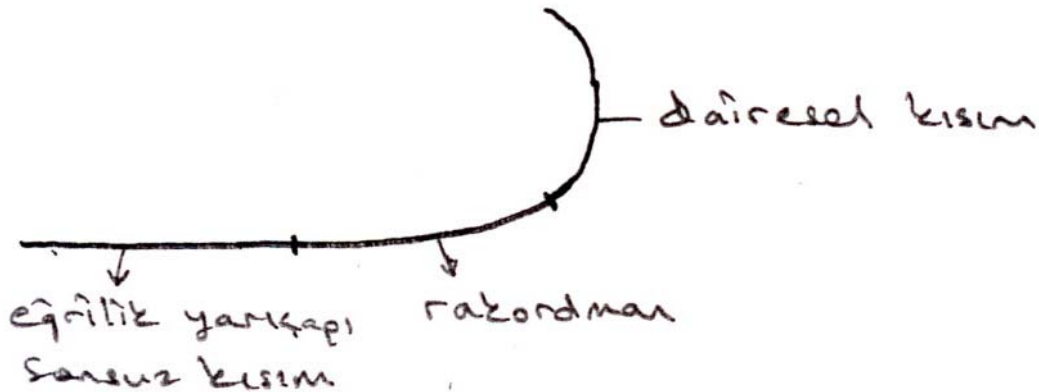
olur. Elde edilen bu bağıntılar, ivmenin **teğetsel bileşeninin maddesel noktanın hızının şiddetinin türevine, normal bileşeninin ise hızın karesinin ρ nin yörüngesinin eğrilik yarıçapına bölümüne** eşit olduğunu ifade etmektedir. Hızın artması ya da azalmasına bağlı olarak a_t pozitif veya negatif olur ve $\vec{a}_n$ vektör bileşeni daima yörüngenin C eğrilik merkezine doğru yönelmiştir (Şekil 1.10).



Şekil 1.10

Yukarıdan anlaşılmaktadır ki ivmenin teğetsel bileşeni, maddesel noktanın hızının şiddetinin değişimini yansıtmakta, normal bileşeni ise, noktanın hızının doğrultusundaki değişimi yansıtmaktadır. Bir maddesel noktanın ivmesinin sıfır olması için bu iki bileşenin de sıfır olması gereklidir. O halde bir eğri üzerinde sabit hızla hareket eden bir maddesel noktanın ivmesinin sıfır olması ancak noktanın, eğrinin bir büküm noktasından geçmesi (büküm noktasında eğrilik yarıçapı sonsuzdur) ile veya eğrinin bir doğru olması ile mümkündür.

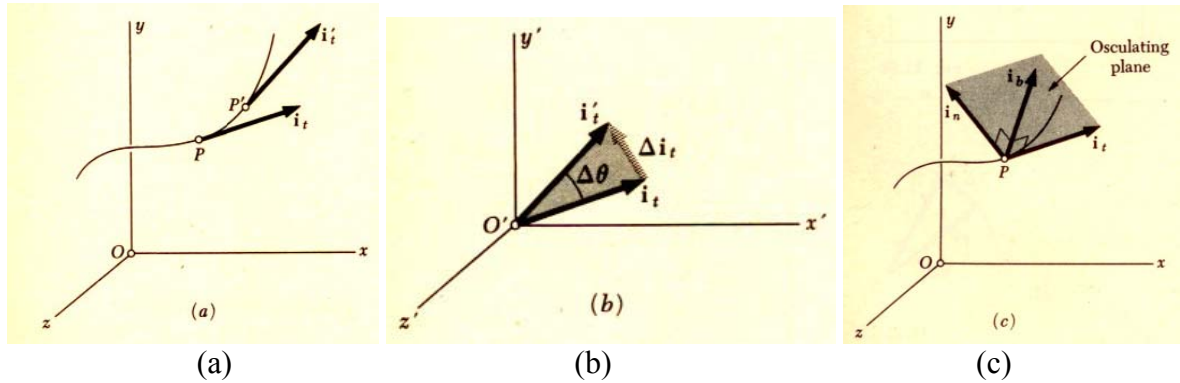
İvmenin normal bileşeninin, maddesel noktanın izlediği yörüngeye bağlı olduğu gerçeği, uçak kanatları, demiryolu rayları gibi birbirinden çok değişik sistem ve mekanizmaların yapımında dikkate alınır. Bir kanadın yanından geçen hava zerreciklerinin ivmesindeki ani değişimlere engel olmak için, kanat profilleri eğrilik yarıçapında ani değişimler olmayacak şekilde yapılır. Demiryolu kurbalarını inşa ederken de vagonların ivmelerindeki ani değişimlerin önüne geçmek için benzer dikkat gösterilir (çünkü bu değişimler teçhizata sert etki yapar ve yolcuları rahatsız eder). Örneğin, yolun doğrusal kısmının hemen arkasından dairesel bir kısım yapılmaz. Doğru bölgesindeki sonsuz eğrilik yarıçapından dairesel bölgedeki sonlu eğrilik yarıçapına düzgün olarak geçmeye yardımcı olmak için özel geçiş bölgeleri (rakordman) kullanılır.



Bir maddesel noktanın uzayda hareketi. Bir uzay eğrisi boyunca hareket eden maddesel nokta halinde (1.27) ve (1.28) bağıntıları yine geçerli kalır. Ancak, bir uzay eğrisinin

verilen bir P noktasındaki teğetine dik sonsuz sayıda doğru bulunduğu için $\vec{i}_n$ birim vektörünün doğrultusunun daha kesin bir tanımına ihtiyaç vardır.

Maddesel noktanın yörüngesi üzerinde birbirine komşu P ve P' gibi iki noktada yörüngeye teğet olan $\vec{i}_t$ ve $\vec{i}_t'$ birim vektörlerini (Şekil 1.11a) ve $\vec{i}_t$ ve $\vec{i}_t'$ arasındaki farkı gösteren $\Delta\vec{i}_t$ vektörünü (Şekil 1.11b) tekrar göz önüne alalım. P den geçen (Şekil 1.11a) ve $\vec{i}_t$, $\vec{i}_t'$ ve $\Delta\vec{i}_t$ vektörlerinin tanımladığı düzleme (Şekil 1.11b) paralel bir düzlem

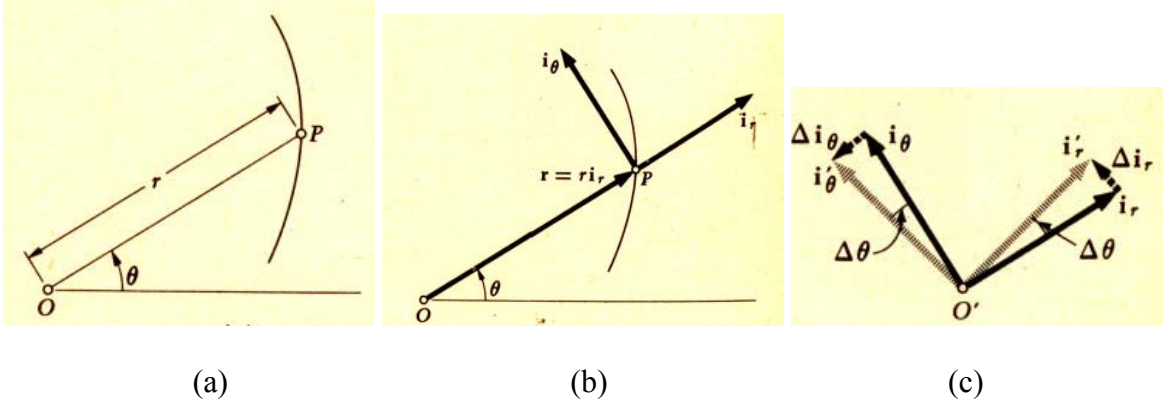


Şekil 1.11

düşünelim. Eğrinin P deki teğeti bu düzlem içindedir ve P' deki teğeti de bu düzleme paraleldir. P' yü P ye yaklaştırsak limitte P civarında eğriye en iyi uyan düzlemi elde ederiz. Bu düzleme P deki oskülatör (öpen) düzlem denir. Bu tanımdan anlaşılır ki oskülatör düzlem $\vec{i}_n$ birim vektörünü içinde bulundurur, çünkü bu vektör $\Delta\vec{i}_t / \Delta\theta$ vektörünün limitidir. O halde $\vec{i}_n$ ile tanımlanan normal, oskülatör düzlemedir; buna P deki **asal normal** denir. $\vec{i}_b = \vec{i}_t \times \vec{i}_n$ birim vektörü, $\vec{i}_t$, $\vec{i}_n$, $\vec{i}_b$ sağ takımını tamamlar (Şekil 1.11c) ve P deki **binormali** tanımlar. O halde binormal oskülatör düzleme diktir. (1.27) de ifade edildiği gibi, P maddesel noktasının ivmesinin, biri P nin teğeti doğrultusunda, öteki asal normali doğrultusunda iki bileşene ayrılabilceği sonucuna varmaktayız. İvmenin binormal doğrultusunda bileşeni yoktur.

1.6. Kutupsal Koordinatlarda Bileşenler

Düzlemsel hareketteki bazı problemlerde P maddesel noktasının yeri, r ve θ kutupsal koordinatları yardımıyla tanımlanır (Şekil 1.12a). O zaman maddesel noktanın hızını ve ivmesini, OP doğrusuna paralel ve dik bileşenlere ayırmak daha elverişli olur. Bu bileşenlere **radyal** ve **radyale dik (enine)** adı verilir.



Şekil 1.12

P ye $\vec{i}_r$ ve $\vec{i}_\theta$ olmak üzere iki birim vektör koyacağız (Şekil 1.12b). $\vec{i}_r$ vektörü OP doğrultusundadır, $\vec{i}_\theta$ vektörü ise $\vec{i}_r$ yi saat ibrelerinin aksi yönde 90° döndürmekle elde edilmiştir. $\vec{i}_r$ birim vektörü **radyal** doğrultuyu, yani θ sabit tutulup r arttırılınca P nin hareket edeceği doğrultuyu tanımlar; $\vec{i}_\theta$ ise **radyale dik** doğrultuyu, yani r sabit tutulup θ arttırılınca P nin hareket edeceği doğrultuyu tanımlar. Kısım 1.5 de $\vec{i}_t$ birim vektörünün türevini bulmakta kullandığımıza benzer bir şekilde şu bağıntılar çıkarılır:

$$\frac{d\vec{i}_r}{d\theta} = \vec{i}_\theta \quad \frac{d\vec{i}_\theta}{d\theta} = -\vec{i}_r \quad (1.29)$$

burada $-\vec{i}_r$, $\vec{i}_r$ ninkinin aksi yönde bir birim vektör göstermektedir (Şekil 1.12c).

P noktasının $\vec{r}$ yer vektörünü, r skaleri ile $\vec{i}_r$ birim vektörünün çarpımı olarak yazıp t ye göre türev alarak

$$\vec{r} = r\vec{i}_r \quad (1.30)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{i}_r + r\frac{d\vec{i}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{i}_r + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{i}_r}{d\theta}$$

elde ederiz. (1.29) bağıntılarından birincisini dikkate alarak ve zamana göre türevleri noktalarla göstererek

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{i}_r + r\dot{\theta}\vec{i}_\theta \quad (1.31)$$

bulunur. t ye göre bir kere daha türev alarak

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{i}_r + \dot{r}\frac{d\vec{i}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{i}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{i}_\theta}{dt}$$

veya $d\vec{i}_r/dt = \dot{\theta}\vec{i}_\theta$ ve $d\vec{i}_\theta/dt = -\dot{\theta}\vec{i}_r$ olduğundan

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{i}_\theta \quad (1.32)$$

elde edilir. Şu halde hız ve ivmenin radyal ve radyale dik doğrultudaki skaler bileşenleri şöyle olur:

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (1.33)$$

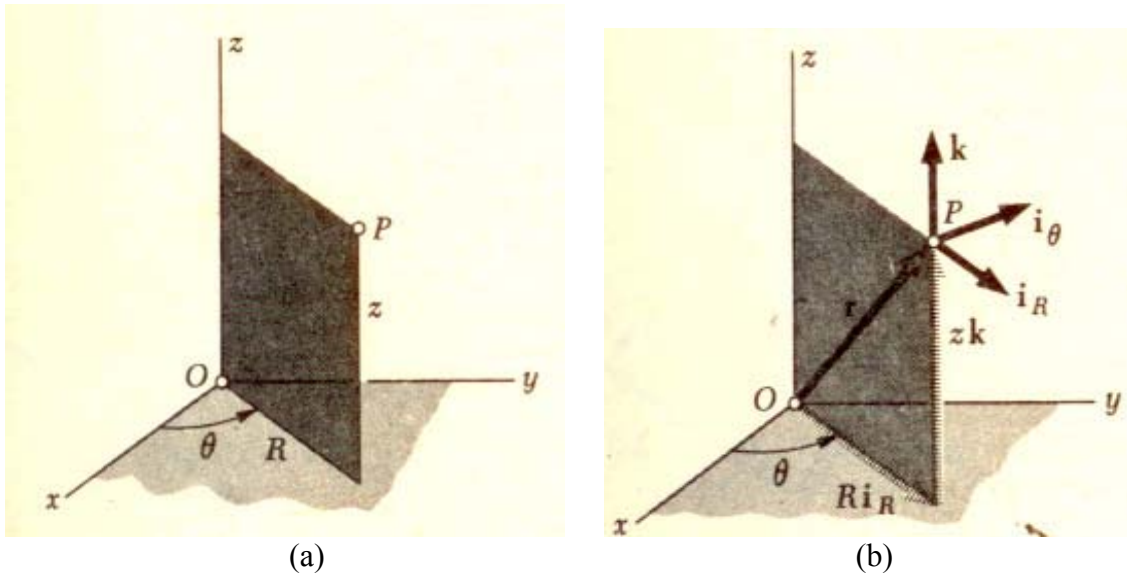
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (1.34)$$

O merkezli bir daire üzerinde hareket eden bir maddesel nokta halinde, $r = \text{sabit}$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ olur ve (1.32) denklemleri şu şekle indirgenir :

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{i}_\theta \quad \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{i}_r + r\ddot{\theta}\vec{i}_\theta \quad (1.35)$$

Maddesel noktanın uzay hareketine genişletme: Silindirik koordinatlar. Bir P maddesel noktasının uzaydaki yeri bazen R , θ ve z silindirik koordinatları yardımıyla tanımlanır (Şekil 1.13a). O zaman Şekil 1.13b de gösterilmiş olan $\vec{i}_R, \vec{i}_\theta$ ve $\vec{k}$ birim vektörlerini kullanmak uygun olur. P noktasının $\vec{r}$ yer vektörünü, vektörler doğrultusunda bileşenlere ayırarak

$$\vec{r} = R\vec{i}_R + z\vec{k} \quad (1.36)$$



Şekil 1.13

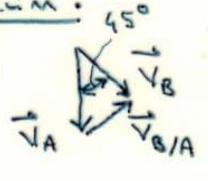
elde ederiz. $\vec{i}_R$ ve $\vec{i}_\theta$ nın, yatay xy düzleminde radyal ve radyale dik doğrultuları tanımlandığına ve **eksenel** doğrultuyu tanımlayan $\vec{k}$ vektörünün gerek doğrultu, gerek şiddetçe sabit olduğuna dikkat ederek şu bağıntıları kolayca çıkarabiliriz :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{R}\vec{i}_R + R\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{z}\vec{k} \quad (1.37)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\vec{i}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\vec{i}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \quad (1.38)$$

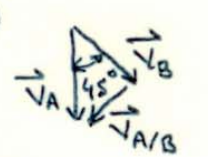
Problem: B gemisi güneydoğu doğrultusunda 27,78 km/saat hızla seyrederken A gemisi güneşe doğru 33,336 km/saat hızla ilerlemektedir. (a) B gemisinin A ya göre bağıl hızı, (b) A gemisinin B ye göre bağıl hızı hesaplayınız.

Çözüm:

(a)  $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \rightarrow \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

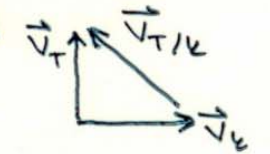
$\vec{V}_{B/A} = \underbrace{27,78 \cdot \sin 45^\circ \vec{i}}_{V_{Bx}} + \underbrace{(-27,78) \cdot \cos 45^\circ \vec{j}}_{V_{By}} - \underbrace{(-33,336) \vec{j}}_{V_{Ay}}$

$\vec{V}_{B/A} = 19,643 \vec{i} + 13,692 \vec{j} \text{ km/saat}$ $V_{B/A} = 23,944 \text{ km/saat}$ $\angle 34,678^\circ$

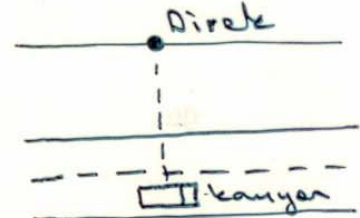
(b)  $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \rightarrow \vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$

$\vec{V}_{A/B} = -19,643 \vec{i} - 13,692 \vec{j} \text{ km/saat}$ $V_{A/B} = 23,944 \text{ km/saat}$ $\angle 34,678^\circ$

Problem: Harekette bulunan kanyondaki bir adam bir taşı, kanyona göre 25 m/sanlık yatay bir bağıl hızla önünden geçtiği bir direğe doğru fırlatıyor. Kanyonun hızının 50 km/saat olduğu bildirildiğine göre, (a) taşın fırlatılması gereken doğrultuyu, (b) taşın yere göre yatay hızı hesaplayınız.

Çözüm:  $V_k = \frac{50000}{3600} = 13,889 \text{ m/san}$

$V_{T/k} = 25 \text{ m/san}$



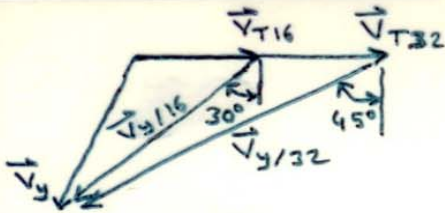
$\vec{V}_T = ?$ $\vec{V}_T = \vec{V}_k + \vec{V}_{T/k} = 13,889 \vec{i} - 25 \cdot \cos \alpha \vec{i} + 25 \cdot \sin \alpha \vec{j}$

$V_T \vec{j} = 13,889 \vec{i} - 25 \cdot \cos \alpha \vec{i} + 25 \cdot \sin \alpha \vec{j}$ $13,889 = 25 \cdot \cos \alpha \rightarrow \alpha = 56,25^\circ$

$\rightarrow V_T = 25 \cdot \sin \alpha = 20,787 \text{ m/san}$

Problem: Bir sağırlık sırasında 16 km/saat hızla giden bir trenin yan camından, yağmur damlalarının görüşünün düzeyle 30° lik bir açı yaptığı gözlenmektedir. Kısa bir süre sonra trenin hızı 32 km/saat olunca damla görüşünün düzeyle yaptığı açı 45° ye çıkmaktadır. Tren durduğunda damlalar hangi hız ve açı ile düşer gözlenir.

Çözüm: $\vec{V}_{T16} = \frac{16000}{3600} \vec{i} = 4,444 \vec{i} \text{ m/san}; \vec{V}_{T32} = \frac{32000}{3600} \vec{i} = 8,889 \vec{i} \text{ m/san}$



$$\vec{V}_y = \vec{V}_{T16} + \vec{V}_{y/16} \quad (1)$$

$$\vec{V}_y = \vec{V}_{T32} + \vec{V}_{y/32} \quad (2)$$

$$(1) \text{ den } \rightarrow \vec{V}_y = 4,444\vec{T} - V_{y/16} \cdot \sin 30^\circ \vec{T} - V_{y/16} \cdot \cos 30^\circ \vec{J} \quad (3)$$

$$(2) \text{ den } \rightarrow \vec{V}_y = 8,889\vec{T} - V_{y/32} \cdot \sin 45^\circ \vec{T} - V_{y/32} \cdot \cos 45^\circ \vec{J} \quad (4)$$

$$(3) \text{ den } \rightarrow \vec{V}_y = (4,444 - V_{y/16} \cdot \sin 30^\circ) \vec{T} - V_{y/16} \cdot \cos 30^\circ \vec{J} \quad (5)$$

$$(4) \text{ den } \rightarrow \vec{V}_y = (8,889 - V_{y/32} \cdot \sin 45^\circ) \vec{T} - V_{y/32} \cdot \cos 45^\circ \vec{J} \quad (6)$$

$$(5) \text{ ve } (6) \text{ dan } 4,444 - V_{y/16} \cdot \sin 30^\circ = 8,889 - V_{y/32} \cdot \sin 45^\circ \quad (7)$$

$$V_{y/16} \cdot \cos 30^\circ = V_{y/32} \cdot \cos 45^\circ \quad (8)$$

$$(7) \text{ ve } (8) \text{ den } \rightarrow V_{y/32} = 14,871 \text{ m/san} ; V_{y/16} = 12,142 \text{ m/san}$$

Bu sonuçlardan ilgili olan (5) veya (6) da yerine konursa

$$\vec{V}_y = (8,889 - 14,87 \cdot \sin 45^\circ) \vec{T} - 14,87 \cdot \cos 45^\circ \vec{J} = -1,626 \vec{T} - 10,51 \vec{J} \text{ m/san}$$

Problem: 100 km/saat hızı ile hareket eden bir tren, yarıçapı 1200 m olan bir kurbaya girdiği anda, toplam ivmesini $0,75 \text{ m/san}^2$ değere düşürmek için yeterince fren yapıyor. 10 saniye sonra toplam ivme tekrar $0,75 \text{ m/san}^2$ olacak şekilde, tren yeniden tan olarak frenleniyor. Bu ikinci frenlemeye devam edilirse tren tamamen durması için kaç saniye gerekir?

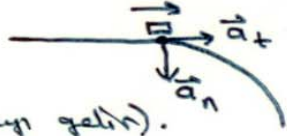
Gözüm: Birinci frenleme sırasında $V_0 = \frac{100000}{3600} = 27,78 \text{ m/san}$

$$t=0 \text{ da } a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{(27,78)^2}{1200} = 0,643 \text{ m/san}^2 \quad t=0 \rightarrow V_0 = 100 \text{ km/saat}$$

$$a_T^2 = a_t^2 + a_n^2 \rightarrow 0,75^2 = a_t^2 + 0,643^2 \rightarrow a_t^2 = 0,1491$$

$$a_t = -0,386 \text{ m/san}^2 \quad (- \text{İşareti yavaşlamadan dolayı gelir}).$$

$$t=10 \text{ san da } V_{10} = V_0 + a_t \cdot t = 27,78 + (-0,386)(10) = 23,92 \text{ m/san}$$



İkinci frenleme sırasında:

$$t=10 \text{ san da } a_n = \frac{V_{10}^2}{r} = \frac{23,92^2}{1200} = 0,477 ; a_T^2 = a_t^2 + a_n^2 \rightarrow 0,75^2 = a_t^2 + (0,477)^2$$

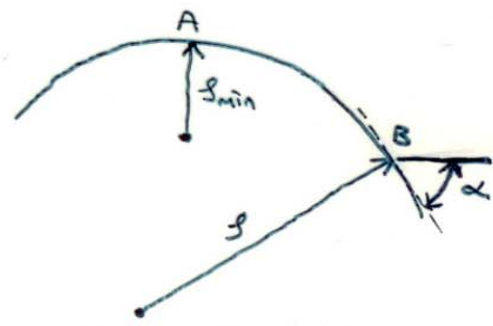
$$a_t = -0,579 \text{ m/san}^2 ; V_{10} = 23,92 \text{ m/san ve } a_t = -0,579 \text{ m/san}^2$$

$$V = V_{10} + a_t(t-10) \rightarrow 0 = 23,92 + (-0,579)(t-10) \rightarrow t-10 = 41,31 \text{ saniye ikinci frenleme süresidir. Toplam frenleme süresi ise } t=51,31 \text{ saniyedir.}$$

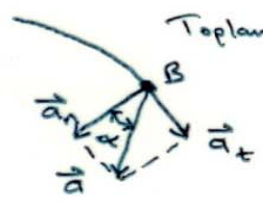
Problem : (a) Bir mermi yörüngesinin eğrilik yarıçapını, yörüngenin en yüksek A noktasında minimum değerine erittiğini gösteriniz. (b) Verilen bir B noktasında yörüngenin yatayla yaptığı açı α ile gösterilirse, bu yörünge noktasındaki eğrilik yarıçapını $f = f_{\min} / \cos^3 \alpha$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : Yatayda hız sabittir.

Hız :  $V = \frac{V_x}{\cos \alpha}$



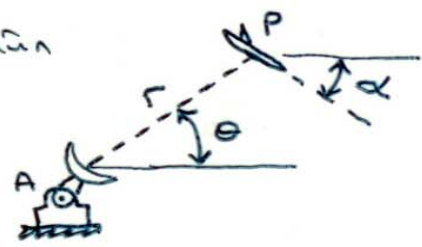
Time : Toplanıma sabit olup yerçekimi kuvveti g ye eşittir $a = g \rightarrow a_n = a \cdot \cos \alpha = g \cdot \cos \alpha$



$$a_n = \frac{v^2}{f} \Rightarrow f = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(V_x / \cos \alpha)^2}{g \cdot \cos \alpha} = \frac{V_x^2}{g \cdot \cos^3 \alpha}$$

$\alpha = 0$ tam (A noktasında) $f_{\min} = \frac{V_x^2}{g}$ olur. Sonuç olarak B noktasında $f = f_{\min} / \cos^3 \alpha$ olarak elde edilir.

Problem : A da bulunan bir radar izleme üssünün üzerinden geçen bir uçak, doğuya doğru ucmaya devam ediyor. Uçak P de iken r uzaklığı ve θ yükseklik açısı, sırasıyla $r = 3500$ m ve $\theta = 26,5^\circ$ dir. İki saniye sonra radar üssü uçağı $r = 3750$ m ve $\theta = 23,3^\circ$ değerleri ile izliyor. Bu iki saniyelik süre içerisinde, yaklaşık olarak, uçağın hızını ve α dalış açısını belirleyiniz.



Çözüm : $V_\theta = \frac{r d\theta}{dt}$ $\Delta t = 2$ saniye

$$\Delta r = 3750 - 3500 = 250 \text{ m}$$

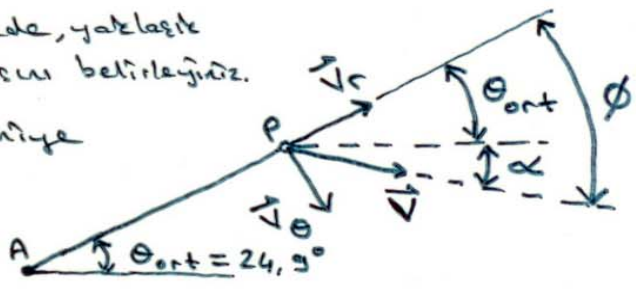
$$\Delta \theta = 23,3^\circ - 26,5^\circ = -3,2^\circ = -0,0558 \text{ rad}$$

$$V_{r \text{ ort}} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{250}{2} = 125 \text{ m/san}, V_{\theta \text{ ort}} = r_{\text{ort}} \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \left(\frac{3750 + 3500}{2} \right) \left(\frac{-0,0558}{2} \right)$$

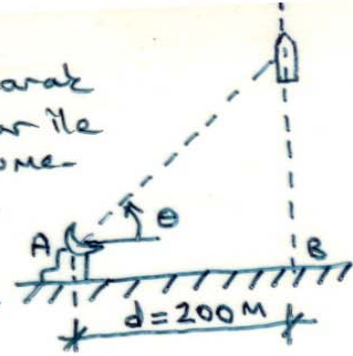
$$V_{\theta \text{ ort}} = 3625 \cdot (-0,0279) = -101,14 \text{ m/san}$$

$$V_{\text{ort}} = \sqrt{V_{r \text{ ort}}^2 + V_{\theta \text{ ort}}^2} = \sqrt{125^2 + 101,14^2} = 160,79 \text{ m/san}$$

$$\theta_{\text{ort}} = \frac{26,5^\circ + 23,3^\circ}{2} = 24,9^\circ; \tan \phi = \frac{V_\theta}{V_r} = \frac{101,14}{125} = 0,808 \rightarrow \phi = 38,9^\circ; \alpha = \phi - \theta_{\text{ort}} = 38,9^\circ - 24,9^\circ = 14^\circ$$



Problem: B de bulunan bir rampadan düzey olarak fırlatılan bir roketin hareketi A da bulunan bir radar ile izleniyor. 1. saniyede roketin; (a) hızının ve ivmesinin radyal ve eime doğrultularındaki bileşenlerini hesaplayıp bir şekil üzerinde gösteriniz. Hesaplanan bileşenleri kullanarak hız ve ivmenin şiddetini ve doğrultusunu bulunuz.



b) Roketin konumunu bulunuz.

$$\theta = t^3 - t^2 + \frac{\pi}{4} \text{ (radyan)}$$

Çözüm: $\vec{r} = r\vec{e}_r$; $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$; $r = \frac{d}{\cos\theta}$ m, (sezilden)

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r}\vec{e}_r + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{a_\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 3t^2 - 2t ; v_r = \frac{dr}{dt} = d \cdot \sec\theta \cdot \tan\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_\theta = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = d \cdot \sec\theta \cdot (3t^2 - 2t)$$

$$t = 1 \text{ sn için } \frac{d\theta}{dt} = 3 - 2 = 1 ; \theta = 1 - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$v_r = 200 \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} \cdot \tan\frac{\pi}{4} \cdot 1 = 200 \cdot 1,414 \cdot 1 = 282,8 \text{ m/san}$$

$$v_\theta = 200 \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} \cdot (3 - 2) = 200 \cdot 1,414 = 282,8 \text{ m/san}$$

$$\ddot{\theta} = 6t - 2 ; \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} ; \frac{dr}{dt} = d \underbrace{\sec\theta \cdot \tan\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}}_{(\sec\theta)'} ; (\tan\theta)' = \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = d \left[(\tan\theta \cdot \sec\theta \cdot \tan\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \sec\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}) \frac{d\theta}{dt} + \tan\theta \cdot \sec\theta \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \right]$$

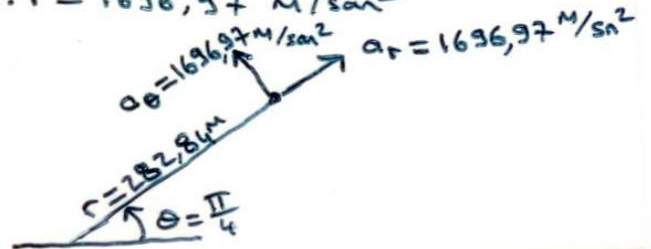
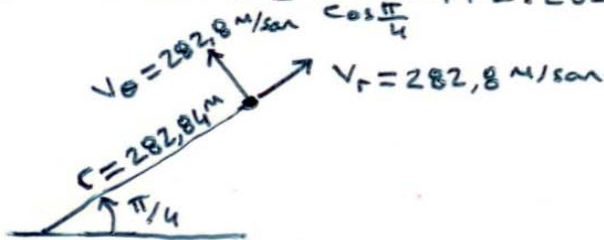
$$t = 1 \text{ sn için } \theta = 1 - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} ; \tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} = 1 ; \sec\theta = \sec\frac{\pi}{4} = 1,414$$

$$\sec^2\theta = \sec^2\frac{\pi}{4} = 2,0 ; \frac{d\theta}{dt} = 3t^2 - 2t = 1 ; \frac{d^2\theta}{dt^2} = 6t - 2 = 4$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 200 \left[(1 \cdot 1,414 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1,414 \cdot 1) \cdot 1 + 1 \cdot 1,414 \cdot 4 \right] = 1979,6$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 1979,6 - \frac{200}{\cos\frac{\pi}{4}} \cdot 1^2 = 1696,757 \text{ m/san}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{200}{\cos\frac{\pi}{4}} \cdot 4 + 2 \cdot 282,8 \cdot 1 = 1696,97 \text{ m/san}^2$$



2. MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ : KUVVET, KÜTLE VE İVME

2.1. Newton' un Üç Temel Kanunu ve Çekim Kanunu

Newton' un üç temel kanununu yeniden yazalım:

Birinci kanun : Bir maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvvet sıfırsa maddesel nokta (başlangıçta hareketsiz ise) hareketsiz kalır veya (başlangıçta harekette ise) bir doğru üzerinde sabit hızla hareketine devam eder.

İkinci kanun : Eğer bir maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvvet sıfır değilse, maddesel nokta bu bileşke kuvvetin şiddeti ile orantılı ve bileşke kuvvetin doğrultu ve yönünde bir ivme kazanır. Bu kanun

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\vec{F}$, m ve $\vec{a}$ sırasıyla maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvveti, maddesel noktanın kütlelerini ve maddesel noktanın ivmesini (birbirine uygun birimlerle ifade edilmek şartıyla) göstermektedir.

Üçüncü kanun : Birbirine değen cisimler arasındaki etki ve tepki kuvvetleri aynı şiddettedir, aynı tesir çizgisi üzerindedir ve zıt yöndedir.

Newton' un çekim kanunu : Bu kanun şunu ifade eder: Kütleleri M ve m olan iki maddesel nokta karşılıklı olarak eşit ve zıt yönlü $\vec{F}$ ve $-\vec{F}$ kuvvetleri ile birbirini çeker ; bu kuvvetlerin şiddeti şu formülle verilir :

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (2.2)$$

burada r iki maddesel nokta arasındaki uzaklıktır. G çekim sabiti denilen evrensel bir sabittir. Büyük önemi olan bir özel hal, dünyanın yeryüzündeki maddesel noktaları çekmesidir. Dünyanın uyguladığı bu $\vec{F}$ kuvveti maddesel noktanın $\vec{W}$ ağırlığı olarak tanımlanır. M yi dünyanın kütlelerine, m yi maddesel noktanın kütlelerine ve r yi dünyanın R yarıçapına eşit alarak ve

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (2.3)$$

sabitini hesaba sokarak, kütlesi m olan bir maddesel noktanın $\vec{W}$ ağırlığı

$$\vec{W} = m\vec{g} \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir. Bu formülde R nin değeri göz önüne alınan noktanın yüksekliğine ve aynı zamanda enlemine de bağlıdır, çünkü dünya tam küre şeklinde değildir. O halde g nin değeri göz önüne alınan noktanın yeri ile değişmektedir. Nokta yeryüzünde kaldığı sürece

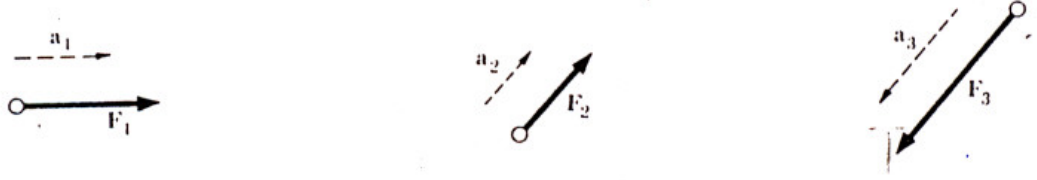
bir çok mühendislik hesaplarında g yi 9.81 m/sn^2 ye eşit kabul etmek yeteri kadar doğrudur.

Newton' un ikinci kanunu sadece $\vec{F}$ ve $\vec{a}$ nin şiddetlerinin orantılı olduğunu değil, (m pozitif bir skaler olduğu için) doğrultularının da aynı olduğunu ifade eder (Şekil 2.1). $\vec{F}$ kuvveti sabit olmayıp t ile değişirse $\vec{a}$ ivmesi de t ile değişecektir.

Maddesel nokta aynı anda birden fazla kuvvetin etkisinde bulunursa (2.1) denklemi yerine

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.5)$$

denklemini koymak gerekir; burada $\sum \vec{F}$ maddesel noktaya etkiyen bütün kuvvetlerin vektörel toplamını veya bileşkesini göstermektedir.



Şekil 2.1

$\vec{a}$ ivmesinin belirtilmesinde esas alınan eksen takımlarının seçiminin de serbest olmadığı hatırdan çıkarılmamalıdır. Bu eksenlerin yıldızlara göre doğrultusu sabit olmalı ve başlangıç noktası da güneş sisteminin kütle merkezine bağlanmalı veya kütle merkezine göre sabit hızla hareket etmelidir. Böyle bir eksen takımına **Newton karşılaştırma takımı** adı verilir. Yıldızlar da gerçekte sabit olmadıklarından, Newton karşılaştırma takımlarının daha doğru bir tanımı (2.5) **denkleminin geçerli kaldığı takımlardır** şeklinde yapılabilir. Dünyaya bağlı sistemler Newton karşılaştırma takımları değildir, çünkü dünya yıldızlara göre dönmektedir ve güneşin kütle merkezine göre de bir ivmesi vardır. Bununla birlikte mühendislik uygulamalarının pek çoğunda $\vec{a}$ ivmesi, dünyaya bağlı takımlara göre ve (2.1) ve (2.5) denklemleri kullanılarak belirtilirse büyük bir hata yapılmış olmaz. Öte yandan, eğer $\vec{a}$ ivmesi hareketli eksen takımlarına göre ölçülen bağıl bir ivmeyi gösteriyorsa ve bu hareketli takım da ivmeli bir otomobile veya dönmekte olan bir makine parçasına bağlanmış ise, yukarıdaki denklemler yürürlükte kalmaz.

2.2.Birimler

Mekanikte kullanılan temel kavramlar **uzay, zaman, kütle ve kuvvettir**. Bu kavramlar tam olarak tanımlanamaz; bunlar sezgi ve tecrübelerimize dayanarak kabul edilmeli ve mekaniği incelerken başvurulacak bir kaynak olarak kullanılmalıdır.

Uzay kavramı, bir P noktasının yeri kavramı ile yakından ilgilidir. P nin yeri, bir karşılaştırma noktası veya **başlangıçtan** itibaren verilen üç doğrultuda ölçülen üç uzunlukla tanımlanır. Bu uzunluklara P nin koordinatları adı verilir.

Bir olayı tanımlamak için uzaydaki yeri belirtmek yeterli değildir. Olayın **zamanı** da verilmelidir.

Kütle kavramı, cisimleri belirli temel mekanik deneyler yönünden karakterize etmek ve karşılaştırmakta kullanılır; örneğin, kütlesi aynı olan iki cisim dünya tarafından aynı tarzda çekim etkisindedir; aynı şekilde böyle iki cisim, ötelenme şeklindeki bir harekette, hareketin değişimine aynı direnci gösterir.

Kuvvet bir cismin diğeri üzerine etkisini gösterir. Ya gerçek dokunma sonucunda veya çekim kuvveti, manyetik kuvvetlerde olduğu gibi uzaktan uygulanabilir.

Newton mekaniğinde uzay, zaman ve kütle birbirinden bağımsız, mutlak kavramlardır. Öte yandan kuvvet kavramı diğeri üçünden bağımsız değildir. (2.5) eşitliği göstermektedir ki, bir cisme etkiyen bileşke kuvvet cismin kütlesi ve hızının zamanla değişmesi ile ilgilidir. Birimler (2.5) eşitliği sağlanacak şekilde seçildiklerinde kinetik açıdan uyusurlar.

Kinetik olarak uyuşan beş sistem Tablo 2.1 de gösterilmiştir.

Tablo 2.1. Birim sistemleri

Boyutlar	Metrik sistemler		İngiliz sistemleri
	Salt (MKS)	Salt (CGS)	Salt
Uzunluk Kütle Zaman Kuvvet, $F=ma$ dan	Metre (m) Kilogram (kg) Saniye (san) Newton (kg m/san ²)	Santimetre (cm) Gram (gr) Saniye (san) Din(gr cm/san ²)	Ayak (ft) Libre (lb) Saniye (san) Poundal (lb ft /san ²)
	<i>Çekimsel</i>		<i>Çekimsel</i>
Uzunluk Kuvvet Zaman Kütle, $F =ma$ dan	Metre (m) Kilogram (kg) Saniye (san) kg san ² /m		Ayak (ft) Libre (lb) Saniye (san) Slug (lb san ² / ft)

MKS sistemine salt (mutlak) birimler sistemi denir. Bunun anlamı şudur: Seçilen üç temel birim (metre, kilogram, saniye) ölçümlerin yapıldığı yerden bağımsızdır. Metre, kilogram ve saniye dünyanın her hangi bir yerinde, hatta başka bir gezegende bile kullanılabilir. Bunların anlamı her yerde aynı kalır.

Teknikte yakın zamanlara kadar çekimsel birimler kullanılmasına rağmen günümüzde salt birimlerin kullanımı gittikçe yaygınlaşmaktadır.

Salt birimler sisteminde (MKS) kuvvet birimi olan Newton, 1kg kütlesindeki bir cisme 1 m/san² lik ivme veren bir kuvvet olarak tanımlanmaktadır. Çekimsel birimler sisteminde kuvvet olarak alınan Kilogram ise, kütlesi 1 kg olan bir cisme, deniz düzeyinde ve 45°

enlemde yeryüzünün uyguladığı kuvvet olarak tanımlanmaktadır. Böyle bir yerde serbest düşen bir cismin ivmesi 9.81 m/san^2 olduğundan, 1kg kuvvetin, 1 kg lik kütleye 9.81 m/san^2 lik bir ivme verdiğini görürüz. Bu tanımlara göre $1 \text{ kg kuvvet} \approx 9.81 \text{ N}$ olduğu görülmektedir. Aşağıda salt sistemler için bazı birim çevirmeleri verilmiştir.

$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm} ; \quad 1 \text{ ft} = 12 \text{ in} = 30.48 \text{ cm} ; \quad 1 \text{ kg} = 2.2046 \text{ lb}$$

Kinetikte iş birimi olarak kullanılan Joule ise 1 Newton' luk kuvvetin 1 metre yol alması durumunda yaptığı iş olarak tanımlanmaktadır. Birim alana gelen kuvvet (gerilme) birimi $1 \text{ pa} = 1 \text{ N/m}^2$ dir.

Burada, salt birimler (MKS) kullanılacaktır.

2.3.Hareket Denklemleri. Dinamik Denge

Birden fazla kuvvetin etkisi altındaki m kütleli bir maddesel noktayı göz önüne alalım. Newton' un ikinci hareket kanununa göre bu kuvvetlerin bileşkesinin $m\vec{a}$ vektörüne eşit olması gerekmektedir(Şekil 2.1a). $\vec{F}$ kuvvetini ve $\vec{a}$ ivmesini dik bileşenlerine ayırarak

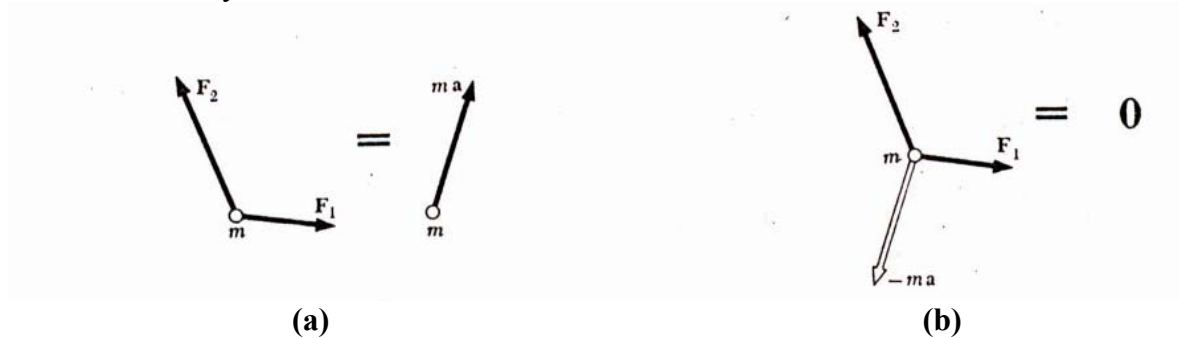
$$\sum (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = m(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \quad (2.6)$$

yazabiliriz.

(2.5) denkleminin sağ tarafını sola geçirerek

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = 0 \quad (2.7)$$

elde ederiz. Newton'un ikinci hareket kanunu bu şekilde yazılınca maddesel **nokta dinamik dengededir** denir ve göz önüne alınan problem daha önce statikte kullanılan yöntemler yardımı ile çözülebilir(Şekil 2.2b). $-m\vec{a}$ ifadesine **atalet vektörü** adı verilir. Atalet vektörü, maddesel noktayı hareket ettirmek veya hareket koşullarını değiştirmek istediğimiz zaman maddesel noktanın gösterdiği direnişin ölçüsüdür. Bu nedenle çoğu zaman **atalet kuvveti** adını alır. Bununla beraber atalet kuvveti statikte rastlanılan değme noktalarında oluşan kuvvetler veya çekim kuvvetleri gibi bir kuvvet değildir. Bu sebeple $-m\vec{a}$ vektörünü gerçek kuvvetlerden ayırt etmek için burada atalet kuvveti deyimi yerine atalet vektörü deyimi kullanılacaktır.

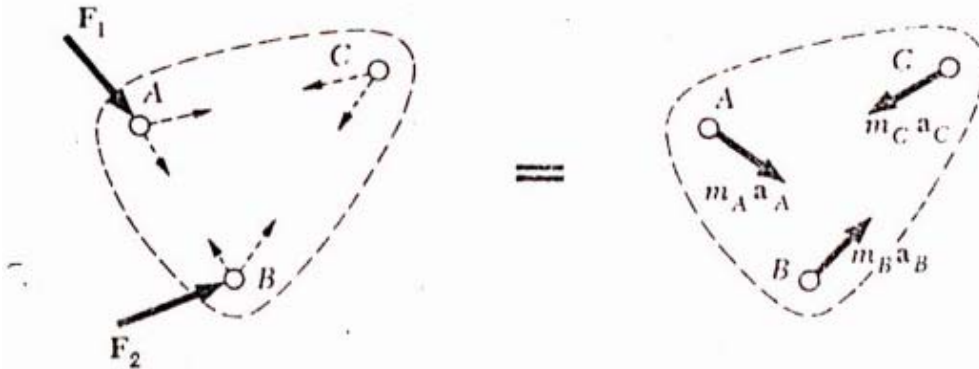


Şekil 2.2

2.4. Maddesel Noktalar Sistemi. D' Alembert İlkesi

Bir problemde birden fazla maddesel noktanın hareketi söz konusu oluyorsa, (2.1) ve (2.5) denklemleri göz önüne alınan her nokta için ayrı ayrı yazılabilir. Fakat, örneğin, rijit cisimde olduğu gibi çok sayıda maddesel noktadan oluşan bir sistem halinde, sistemi bir bütün olarak göz önüne almak genellikle daha kolay olur. Bu halde sistemdeki bir maddesel noktaya etkiyen kuvvetlerin şunlardan oluşacağı düşünülmelidir: (1) Sistemin dışında bulunan cisimlerden gelen **dış kuvvetler** (dünyanın maddesel noktaya uyguladığı ağırlık gibi); (2) sistemin öteki maddesel noktalarının uyguladığı **iç kuvvetler**. Newton' un ikinci kanunu gereğince, göz önüne alınan maddesel noktaya etkiyen dış ve iç kuvvetlerin bileşkesi, $m\vec{a}$ vektörüne eşit olacaktır. Bu vektöre genel olarak maddesel noktaya gelen **efektif kuvvet** adı verilir.

Şimdi, maddesel noktalar sisteminin bütün noktalarını aynı anda göz önüne alalım (Şekil 2.3). Yazdığımız bağıntı her bir maddesel nokta için geçerli olduğundan, sistemin noktalarına etkiyen bütün dış ve iç kuvvetlerin bileşkesi, bütün noktalara etkiyen efektif kuvvetlerin bileşkesine eşit olur. Oysa Newton' un üçüncü kanunu gereğince, iç kuvvetler birbirine eşit, aynı doğru üzerinde ters yönlü ikiye kuvvet şeklinde ortaya çıkarlar, böylece iç kuvvetler sistemi sıfıra indirgenmiş olur. Buradan şu sonuç elde edilir: **Bir maddesel noktalar sistemine etkiyen dış kuvvetler, sistemin çeşitli noktalarına etkiyen efektif kuvvetlere eşdeğerdir.**



Şekil 2.3

Bu önemli hüküm, Fransız matematikçisi Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) e izafeten, D' Alembert ilkesi diye tanınır. Bu ilkeden şu sonuç çıkar: Dış kuvvetlerin toplamı efektif kuvvetlerin toplamına eşittir ve dış kuvvetlerin her hangi bir O noktasına göre momentleri toplamı, efektif kuvvetlerin aynı o noktasına göre momentleri toplamına eşittir. Verilmiş bir maddesel noktanın yer vektörünü $\vec{r}$ ile gösterirsek

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{f}_{AC} + \vec{f}_{AB} &= m_A \vec{a}_A \\ \vec{F}_2 + \vec{f}_{BC} + (-\vec{f}_{AB}) &= m_B \vec{a}_B \\ (-\vec{f}_{AC} + (-\vec{f}_{BC})) &= m_C \vec{a}_C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B + m_C \vec{a}_C \\ \text{Dış kuvvetlerin toplamı} &= \text{Efektif kuvvetlerin toplamı} \end{aligned}$$

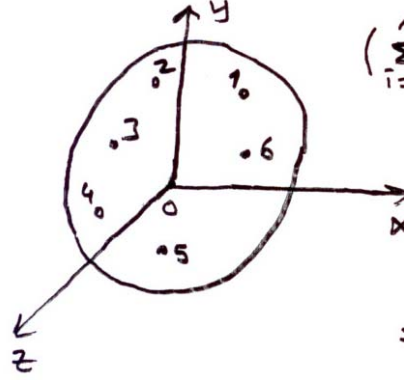
$$\sum \vec{F}_{dış} = \sum m \vec{a} \quad \sum (\vec{M}_O)_{dış} = \sum (\vec{r} \times m \vec{a}) \quad (2.8)$$

yazılır.

2.5. Bir Maddesel Noktalar sisteminin Kütle Merkezinin Hareketi

(2.8) denklemlerinden birincisi, maddesel noktalar sisteminin **kütle merkezi** göz önüne alınarak değişik bir şekilde yazılabilir. Sistemin kütle merkezi,

$$(\sum m) \vec{r} = \sum m \vec{r} \quad (2.9)$$



bağıntısını sağlayan $\vec{r}$ vektörünün belirlediği G noktası olarak tanımlanır. $\vec{r}$ ve $\vec{r}$ yer vektörlerini dik bileşenlerine ayırırsak, kütle merkezinin $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ koordinatlarını belirtmekte kullanılmak üzere aşağıdaki üç skaler denklemi elde ederiz:

$$(\sum m) \bar{x} = \sum m x \quad (\sum m) \bar{y} = \sum m y \quad (\sum m) \bar{z} = \sum m z \quad (2.10)$$

$W=mg$ olduğu için, G nin aynı zamanda sistemin ağırlık merkezi olduğuna dikkat etmelidir. Bununla birlikte karışıklığın önüne geçmek için, G yi maddesel noktaların **kütlesi** ile ilgili problemlerde maddesel noktalar sisteminin **kütle merkezi**, maddesel noktaların ağırlığı ile ilgili problemlerde sistemin **ağırlık merkezi** olarak adlandıracağız. Örneğin, dünyanın çekim alanı dışındaki maddesel noktaların kütlesi vardır, fakat ağırlığı yoktur. O zaman kütle merkezinden söz etmek doğru olduğu halde ağırlık merkezinden söz etmek anlamsızdır. Şu nokta da belirtilmelidir ki bir maddesel noktalar sisteminin kütle merkezi ile ağırlık merkezi tam olarak üst üste düşmez, çünkü noktaların ağırlıkları yerin merkezine yönelmiş olduğu için tam olarak paralel bir kuvvetler sistemi teşkil etmez.

(2.9) denkleminin t ye göre türevini alarak

$$(\sum m) \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum m \frac{d\vec{r}}{dt}$$

veya $d\vec{r}/dt$ nin, maddesel noktalar sisteminin G kütle merkezinin $\vec{v}$ hızını gösterdiğine dikkat ederek

$$(\sum m) \vec{v} = \sum m \vec{v} \quad (2.11)$$

yazılır. Bir kere daha türev alınıp, G kütle merkezinin ivmesini $\vec{a}$ ile göstermek suretiyle

$$(\sum m) \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.12)$$

$$(\sum m) \vec{a} = \sum m \vec{a}$$

buluruz. (2.12) ile (2.8) bağıntılarının ilkinden $\sum m \vec{a}$ yı yok edersek

$$\sum \vec{F}_{dış} = (\sum m) \vec{a} \quad (2.13)$$

denklemini elde ederiz; bu denklem, sistemin kütle merkezinin hareketini tanımlar. (2.13) denkleminin, kütlesi $\sum m$ olan ve bütün dış kuvvetlerin etkisi altında bulunan bir tek maddesel noktanın hareketi için elde edilecek denklemle aynı olduğu görülmektedir. O halde şunu söyleyebiliriz : **Bir maddesel noktalar sisteminin kütle merkezi, sistemin bütün kütlesi ve bütün dış kuvvetleri bu noktada toplanmış gibi hareket eder.** Bu ilke en iyi şekilde, patlayan bir merminin hareketi ile canlandırılabilir. Biliyoruz ki, hava direnci ihmal edilirse merminin, parabolik bir yörünge üzerinde hareket ettiği farzedilebilir. Mermi patladıktan sonra mermi parçalarının G kütle merkezi, aynı yörünge üzerinde harekete devam edecektir. Gerçekten, G noktası, parçaların kütle ve ağırlıkları G de toplanmış gibi hareket etmek zorundadır; şu halde bu nokta sanki mermi patlamamış gibi hareket edecektir.

Ortaya konan bu ilke göstermektedir ki, cismin, kütle merkezinin hareketi ile ilgileniyor ve kütle merkezi etrafındaki hareketi ile ilgilenmiyorsak, rijit cisim yerine kütlesi aynı olan bir maddesel nokta koyabiliriz. Bununla birlikte, (2.12) ve (2.13) denklemlerinin, etkiyen kuvvet ve vektörlerin momentleriyle ilgili olmadığını hatırdan çıkarmamalıdır. Örneğin (2.12) denklemi, sisteme ait maddesel noktalara etkiyen efektif kuvvetlerin, G kütle merkezine bağlanmış bir $(\sum m) \vec{a}$ vektörüne eşdeğer olduğunu ifade etmez. Daha sonra rijit cisimlerin kinetiği bahsinde görüleceği üzere, efektif kuvvetlerin bileşkesi ve dolayısıyla dış kuvvetlerin bileşkesi, genel olarak maddesel noktalar sisteminin kütle merkezinden geçmez.

2.6.Maddesel Noktanın Eğrisel Hareketi

Bir P maddesel noktası eğrisel bir yörünge üzerinde hareket ediyorsa ivmesinin dik bileşenlere, teğetsel ve normal bileşenlere veya radyal ve radyale dik bileşenlere ayrılabilirdiği görülmüştü. Şu halde Newton' un ikinci hareket kanununu ifade etmek için bu gösterim yöntemlerinden her hangi birini kullanabiliriz.

Dik Bileşenler: P maddesel noktasına etkiyen $\vec{F}$ kuvvetleri ile maddesel noktanın $\vec{a}$ ivmesi dik bileşenlere ayrılırsa, Newton' un ikinci hareket kanunu şu skaler denklemlerle ifade edilebilir:

$$\sum F_x = m a_x \quad \sum F_y = m a_y \quad \sum F_z = m a_z \quad (2.14)$$

İvmenin dik bileşenlerinin, P nin koordinatlarının ikinci türevlerine eşit olduğunu hatırlarsak

$$\Sigma F_x = m \ddot{x} \quad \Sigma F_y = m \ddot{y} \quad \Sigma F_z = m \ddot{z} \quad (2.15)$$

elde edilir.

Teğetsel ve Normal Bileşenler: Kuvvetleri ve maddesel noktanın ivmesini, $\vec{i}_t$ ve $\vec{i}_n$ birim vektörleri doğrultusunda bileşenlere ayırarak iki skaler denklem elde ederiz:

$$\Sigma F_t = m a_t \quad \Sigma F_n = m a_n \quad (2.15)$$

a_t ve a_n yerine (1.28) deki değerlerini koyarsak

$$\Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{\rho} \quad (2.16)$$

bulunur. Elde edilen bu denklemlerden iki bilinmeyen çözülür.

Kutupsal Koordinatlarda Bileşenler: Kutupsal koordinatları r ve θ olan ve düzlemde eğrisel bir yörünge üzerinde hareket eden bir P maddesel noktası göz önüne alalım. P ye etkiyen $\vec{F}$ kuvvetlerini ve maddesel noktanın $\vec{a}$ ivmesini $\vec{i}_r$ ve $\vec{i}_\theta$ birim vektörleri doğrultusunda bileşenlere ayırarak, Newton' un ikinci kanununun aşağıdaki iki skaler denklemle ifade edilebileceğini görürüz:

$$\Sigma F_r = m a_r \quad \Sigma F_\theta = m a_\theta \quad (2.17)$$

a_r ve a_t yerine (1.34) deki değerleri konulursa

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad \Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (2.18)$$

bulunur. Elde edilen bu iki denklemden iki bilinmeyen çözülebilir.

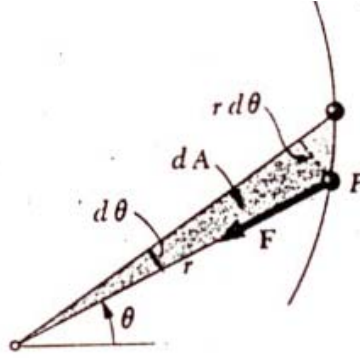
Merkezsiz Bir Kuvvet Etkisi Altında Hareket: Bir maddesel noktaya O koordinat başlangıcından geçen, O ya doğru veya O dan uzaklaşacak şekilde yönelmiş bir tek $\vec{F}$ kuvveti etkiyorsa, **maddesel nokta merkezsiz bir kuvvet etkisinde** hareket ediyor denir (Şekil 2.4). $\vec{F}$ nin radyale dik doğrultudaki bileşeni sıfır olduğundan ikinci denklem

$$r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

verir. Buradan r nin sonlu değerleri için, h bir sabit olmak üzere

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (2.19)$$

sonucu elde edilir. Şekil 2.4 incelenirse, OP yarıçap vektörünün, $d\theta$ açısı kadar dönmesi halinde $dA = r^2 d\theta / 2$ değerinde sonsuz küçük bir alan süpürdüğü görülür. Maddesel noktanın **alan hızı**, dA/dt oranı olarak tanımlanırsa, (2.19) denkleminin sol yanının, maddesel noktanın alan hızının iki katını gösterdiği anlaşılır. Buradan şu sonuç elde edilir: **Bir maddesel nokta, merkezsiz bir kuvvet etkisinde hareket ediyorsa alan hızı sabittir.**



Şekil 2.4

(2.19) denklemi, (2.18) denkleminin birincisinden t yi yok etmekte kullanılabilir. $d\theta/dt = h/r^2$ olduğu dikkate alınarak

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[-h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

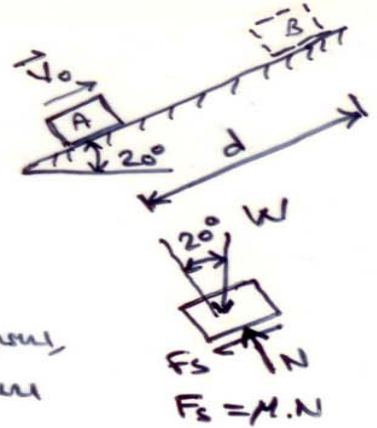
$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (2.20)$$

yazılır. $d\theta/dt$ ve $d^2 r/dt^2$ nin sırasıyla (2.19) ve (2.20) deki değerlerini (2.18) denklemlerinin birincisinde yerine koyar, $\sum F_r = -F$ alır ve $u = 1/r$ fonksiyonunu işe sokup, düzenledikten sonra

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2 u^2} \quad (2.21)$$

elde edilir. (2.21) denkleminin çıkarılmasında $\vec{F}$ kuvvetinin O ya doğru yönlendiği kabul edilmiştir. O halde $\vec{F}$ kuvveti O ya doğru yönelmişse (çekici kuvvet) F şiddeti pozitif; $\vec{F}$, O dan dışarı doğru yönelmişse (itici kuvvet) negatif alınmalıdır. Eğer F , r ve dolayısıyla u nun bilinen bir fonksiyonu ise (2.21) denklemi, u ve θ cinsinden bir diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklem $\vec{F}$ merkezzel kuvveti etkisinde maddesel noktanın izleyeceği yörüngeyi tanımlar.

Örnek Problem 1: Bir paket 20° eğimli bir rampa üzerinde 8 m/s ile ilk hızla yukarı doğru atılıyor. Paket rampa üzerinde B'ye kadar geldikten sonra tekrar A noktasına geriye doğru kayıyor. A ve B noktaları arasındaki d uzaklığı 7 m olduğuna göre;
a) rampa ile paket arasındaki sürtünme katsayısı,
b) geri dönüşte A'ya geldiği zaman paketin hızı hesaplayınız.



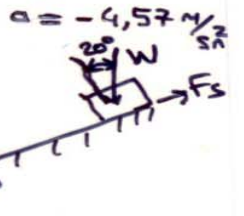
Çözüm: a) $\Sigma F = m \cdot a = -W \cdot \sin 20^\circ - \mu W \cdot \cos 20^\circ = \frac{W}{g} \cdot a$
 $-\sin 20^\circ - \mu \cdot \cos 20^\circ = \frac{a}{g}$

Zamansız hız formülünden $v^2 = v_0^2 + 2as \rightarrow 0 = 8^2 + 2 \cdot a \cdot 7$

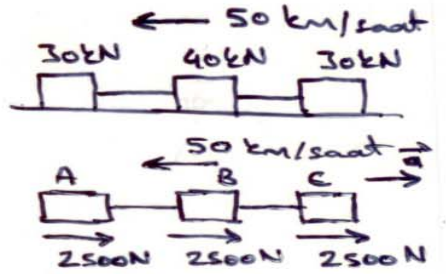
$-\sin 20^\circ - \mu \cdot \cos 20^\circ = -\frac{4,57}{9,81} \rightarrow \mu = 0,132$

b) $W \cdot \sin 20^\circ - W \cdot 0,132 \cdot \cos 20^\circ = \frac{W}{g} \cdot a \rightarrow a = 2,138 \text{ m/s}^2$

$v^2 = v_0^2 + 2as = 0^2 + 2 \cdot 2,138 \cdot 7 \rightarrow v = 5,48 \text{ m/s}$



Problem 2: Şekilde görülen yeraltı treni 50 km/saat hızla yol almaktadır. Fren yapıldığı anda vagonların birbirlerine bağlandığı her ek yerine gelen kuvveti hesaplayınız. Frenleme esnasında vagon başına gelen fren kuvveti 2500 N 'dir.



Çözüm: $\Sigma F = (\Sigma m) a \rightarrow -7500 = \frac{(30+40+30) \cdot 10^3}{g} \cdot a \rightarrow a = \frac{-7500g}{100000}$

$-2500 - F_{AB} = \frac{30000}{g} \cdot \frac{(-7500)g}{100000} \rightarrow F_{AB} = -250 \text{ N}$

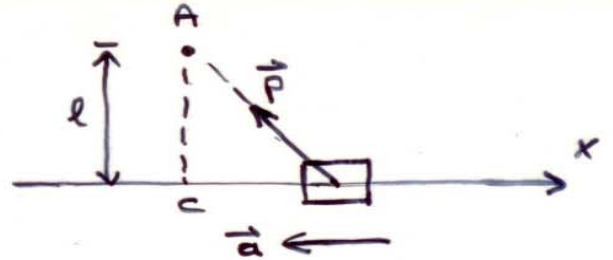
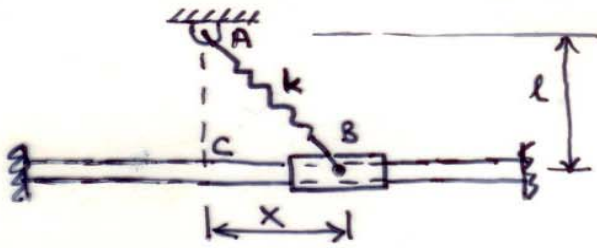
$\boxed{A} \xrightarrow{F_{AB}} = \boxed{A} \xrightarrow{m_A \cdot a}$

$F_{CB} - 2500 = m \cdot \frac{(-7500) \cdot g}{100000} \rightarrow F_{CB} = 250 \text{ N}$

$\boxed{A} \xleftarrow{250 \text{ N}} \boxed{B} \xrightarrow{250 \text{ N}} \boxed{C}$

$F_{CB} \xleftarrow{\boxed{C}} = \boxed{C} \xrightarrow{m_C \cdot a}$

Problem 3: Katsayısı k olan bir AB yayı A ucundan bir mafsala ve B ucundan ise W ağırlığında bir bileziğe bağlanmıştır. Kuvvet sıfır iken yayın boyu L dir. Bilezik ile yatay çubuk arasındaki sürtünme katsayısı sıfır olduğuna göre bileziğin yuvarlanma x uzaklığının bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.



$$\overline{AB} - \overline{AC} = S \text{ (uzama)} \rightarrow \sqrt{x^2 + l^2} - l = S$$

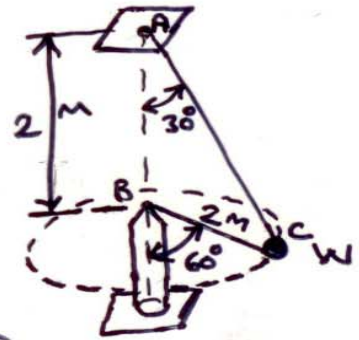
$$P = (\sqrt{x^2 + l^2} - l) \cdot k$$

$$P_x = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}}_{\cos \alpha} \cdot (\sqrt{x^2 + l^2} - l) \cdot k = kx \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}}\right)$$

$$\sum F_x = M a_x = M \cdot a \rightarrow kx \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}}\right) = M \cdot a$$

$$a = - \frac{kx}{m} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}}\right)$$

Problem 4: AC ve BC tipleri C noktasında bir W ağırlığına bağlanmıştır. Ağırlık yatay bir çember üzerinde sabit v hızı ile dönmektedir. Her iki tiple de gergin durabilmesi için v hızının alt ve üst limitleri ne olmalıdır?



Çözüm:
Alt limit durumu $\vec{T}_{CB} = 0$ $\vec{T}_{CA}$ $\vec{W}$ $= M \cdot \vec{a}_n$ hız sabit olduğundan $a_t = 0$ olur.

$$\text{Düsey yönde hareket yok} \rightarrow T_{CA} \cdot \sin 60^\circ - W = 0 \rightarrow T_{CA} = \frac{W}{\sin 60^\circ}$$

$$\text{Yatayda } F_n = T_{CA} \cdot \cos 60^\circ = \frac{W}{\sin 60^\circ} \cdot \cos 60^\circ = W \cdot \tan 30^\circ$$

$$W \cdot \tan 30^\circ = \frac{W}{g} \cdot a_n \rightarrow a_n = g \cdot \tan 30^\circ = \frac{v^2}{2 \cdot \sin 60^\circ} \rightarrow v = 3,13 \text{ m/san}$$

Üst limit durumu $\vec{T}_{CB}$ $\vec{T}_{CA} = 0$ $\vec{W}$ $= M \cdot \vec{a}_n$

$$T_{CB} \cdot \cos 60^\circ = W$$

$$T_{CB} = W / \cos 60^\circ$$

$$F_n = T_{CB} \cdot \sin 60^\circ = \frac{W}{\cos 60^\circ} \cdot \sin 60^\circ = W \cdot \tan 60^\circ = \frac{W}{g} \cdot a_n \rightarrow a_n = g \cdot \tan 60^\circ$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{2 \cdot \sin 60^\circ} = g \cdot \tan 60^\circ \rightarrow v = 5,42 \text{ m/san}$$

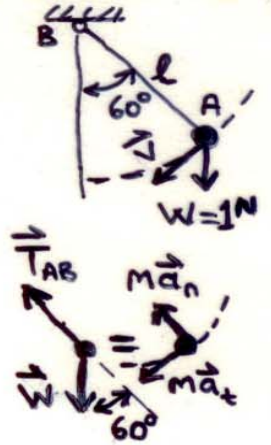
$$3,13 \leq v \leq 5,42 \text{ m/san}$$

Problem 5 : $l = 60 \text{ cm}$ boyunda bir ipe ucuna asılan 1 N ağırlığında bir top düz bir çember üzerinde salınım yapmaktadır. $\theta = 60^\circ$ olduğunda hız 2 m/san ise bu anda ipteki çekme kuvvetini hesaplayınız.

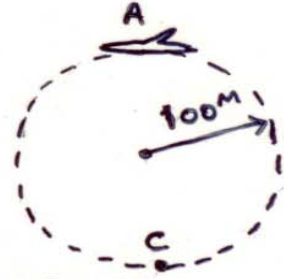
$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{2^2}{0,6} = 6,67 \text{ m/san}^2$$

$$\Sigma F_n = m \cdot a_n \rightarrow T_{AB} - W \cdot \cos 60^\circ = \frac{W}{g} \cdot 6,67$$

$$T_{AB} = 1 \cdot \cos 60^\circ + \frac{1}{9,81} \cdot 6,67 = 1,179 \text{ N}$$



Problem 6 : Ağırlığı 850 N olan bir pilot uçak ile düz bir düzlemde 100 m yarıçapında bir çember boyunca uçuş yapıyor. A noktasında pilotun koltuğa uyguladığı kuvvet sıfır olmakta ve C noktasında ise koltuğa uygulanan basma kuvvetinin 3000 N a ulaştığı belirtilmektedir.



Buna göre uçağın A ve C noktalarındaki hızlarını hesaplayınız.

$\uparrow 0 \rightarrow$ koltuktan gelen kuvvet

A

$$\begin{array}{c} \uparrow 0 \\ \bullet \sim \text{Pilot} \\ \downarrow 850 \text{ N} \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow m \cdot a_n \end{array} \quad 850 = \frac{850}{9,81} \cdot \frac{V_A^2}{100} \rightarrow V_A = 31,32 \text{ m/san}$$

$\uparrow 3000 \text{ N} \rightarrow$ koltuktan pilota gelen kuvvet

C

$$\begin{array}{c} \uparrow 3000 \text{ N} \\ \bullet \sim \text{Pilot} \\ \downarrow 850 \text{ Pilotun ağırlığı} \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow m \cdot a_n \end{array} \quad 3000 - 850 = \frac{850}{9,81} \cdot \frac{V_C^2}{100} \rightarrow V_C = 49,81 \text{ m/san}$$

3. MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ : İŞ VE ENERJİ

3.1. Giriş

Bundan önceki bölümde, maddesel noktaların hareketi ile ilgili problemler $\vec{F} = m\vec{a}$ hareket denklemi kullanılarak çözülmüştü. Bir $\vec{F}$ kuvveti etkisinde bulunan bir maddesel nokta verilmişken bu denklemden $\vec{a}$ ivmesini hesaplayabiliyorduk; ondan sonra kinematiğin ilkelerini uygulayarak $\vec{a}$ dan, maddesel noktanın her hangi bir andaki hızını ve yerini belirtmek mümkün olabiliyordu.

$\vec{F} = m\vec{a}$ denklemi ile kinematiğin ilkeleri birleştirilirse iki yeni çözümleme yöntemi daha elde edilebilir : *iş ve enerji yöntemi* ve *impuls ve momentum yöntemi*. Bu yöntemlerin üstünlüğü, ivmenin belirtilmesini gerekli kılmamalarıdır. Gerçekten, iş ve enerji yöntemi doğrudan doğruya kuvvet, kütle, hız ve yer değiştirme arasında ilişki kurar, impuls ve momentum yöntemi ise kuvvet, kütle ve zaman arasında ilişki kurar.

Bu bölümde iş ve enerji yöntemi ele alınmıştır. Bu yöntem üç önemli kavrama dayanır : *Bir kuvvetin işi* kavramı, *potansiyel enerji* kavramı ile maddesel noktanın *kinetik enerjisi* kavramı. Aşağıdaki kısımlarda bu kavramların tanımları verilmiştir.

3.2. Bir Kuvvetin İş

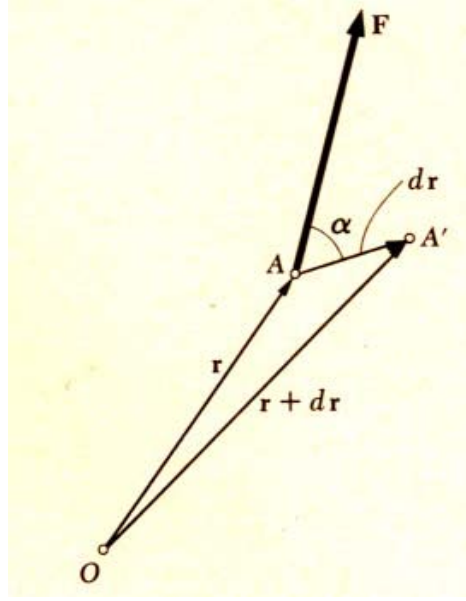
Önce mekanikte kullanıldığı şekilde *yer değiştirme* ve *iş* kavramlarını tanımlayacağız. Bir A noktasından yakınındaki A' noktasına hareket eden bir maddesel nokta göz önüne alalım (Şekil 3.1). A noktasına karşı gelen yer vektörü $\vec{r}$ ile gösterilirse, A ile A' yü birleştiren küçük vektör $d\vec{r}$ diferansiyeli ile gösterilir. $d\vec{r}$ vektörüne maddesel noktanın *yer değiştirmesi* adı verilir. $\vec{F}$ kuvvetinin $d\vec{r}$ yer değiştirmesindeki işi, $\vec{F}$ kuvveti ile $d\vec{r}$ yer değiştirmesinin skaler çarpımı olan

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.1)$$

büyüklüğü ile tanımlanır. F ve dr ile sırasıyla kuvvetin ve yer değiştirmenin şiddetlerini, α ile de $\vec{F}$ ve $d\vec{r}$ nin arasındaki açıyı gösterirsek, iki vektörün skaler çarpımının tanımını hatırlayarak

$$dW = F dr \cos \alpha \quad (3.2)$$

yazılabilir. (3.2) den, dW işi pozitif ise α açısının dar, negatif ise geniş açı olması gerektiği sonucu çıkar. Üç özel hal ilgi çekicidir: $\vec{F}$ kuvveti ile $d\vec{r}$ aynı yönde ise, dW işi Fdr haline gelir. $\vec{F}$ ile $d\vec{r}$ aksi yönde ise $dW = -Fdr$ olur. Son olarak, $\vec{F}$ ile $d\vec{r}$ birbirine dikse dW işi sıfır olur.

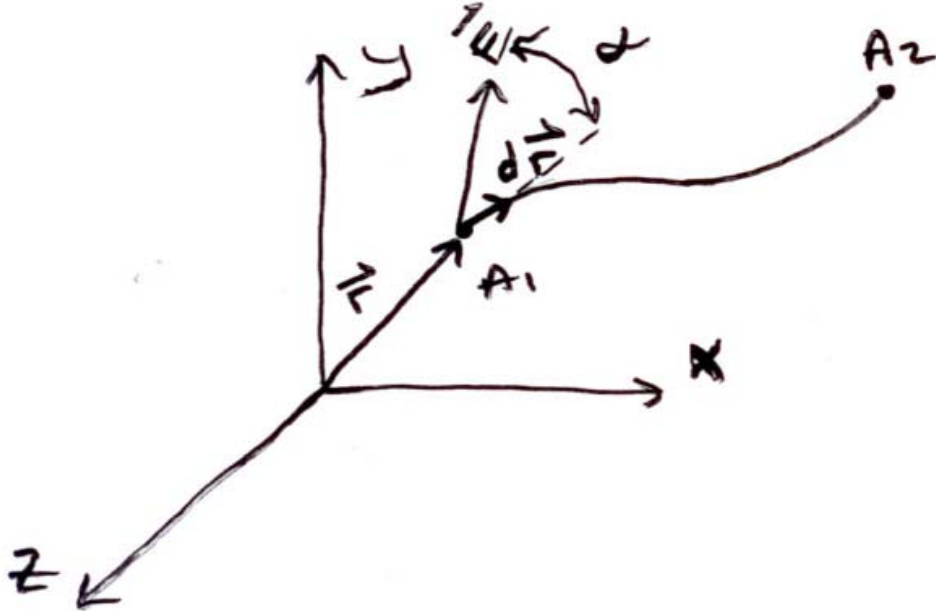


Şekil 3.1

Maddesel noktanın A_1 den A_2 ye kadar *sonlu* yer değiştirmesi (Şekil 3.2) sırasında $\vec{F}$ kuvvetinin işi, (3.1) denkleminin maddesel noktanın yörüngesi boyunca integrasyonu ile

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.3)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 3.2

3.3. Maddesel Noktanın Kinetik Enerjisi

Bir $\vec{F}$ kuvvetinin etkisinde bulunan ve doğrusal veya eğrisel bir yörünge üzerinde hareket eden m kütleli bir maddesel nokta göz önüne alalım (Şekil 3.3). (3.3) eşitliği

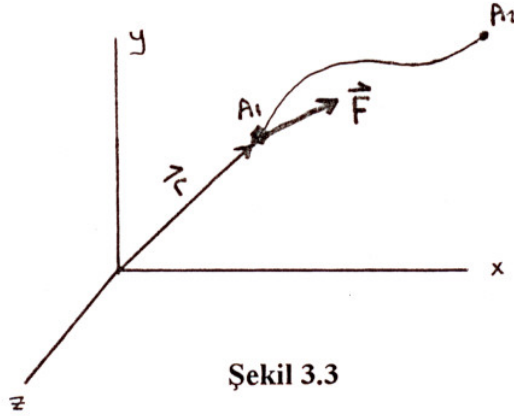
$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A_1}^{A_2} m \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{A_1}^{A_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} =$$

$$\int_{A_1}^{A_2} m \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) \quad (3.4)$$

şeklinde yazılırsa, buradaki $(1/2)mv^2$ ifadesi **maddesel noktanın kinetik enerjisi** olarak adlandırılıp E_k ile gösterilir ve skaler bir büyüklüktür. Bu durumda (3.4) eşitliği

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{k2} - E_{k1} \quad (3.5)$$

şekline dönüşür. Bir maddesel noktanın kinetik enerjisi, **maddesel noktanın hızının iş yapma kapasitesini** gösterir.



Şekil 3.3

Şekil 3.3

3.4. Potansiyel Enerji

Potansiyel enerji, **bir cismin konumu sebebiyle iş yapma kapasitesi** olarak tanımlanmaktadır. ϕ skaler bir fonksiyon olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun değeri konum koordinatlarına bağlıdır. Bir $\vec{F}$ kuvvetini böylesi bir fonksiyonun gradyeni olarak ifade edelim:

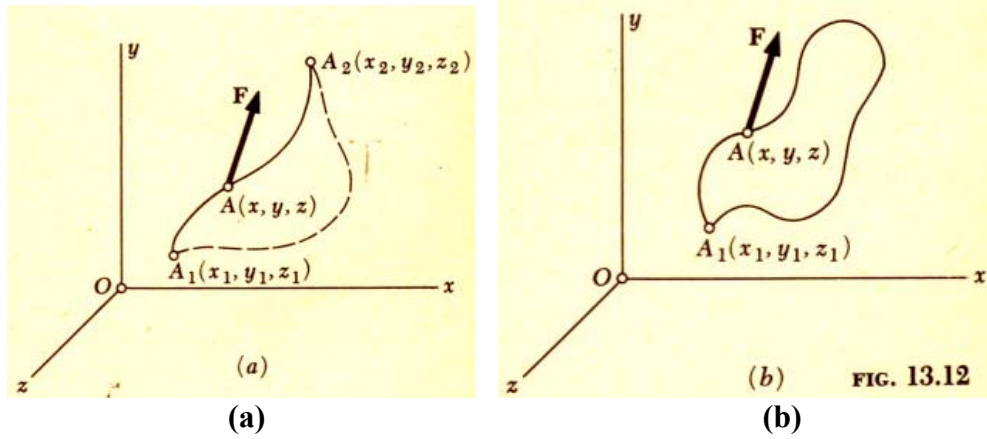
$$\vec{F} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \quad (3.6)$$

Bu kuvvetin yaptığı iş, işin tanımından

$$(W_{1 \rightarrow 2})_k = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \right) (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \quad (3.7)$$

$$\int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \phi_2 - \phi_1$$

olur. $(W_{1 \rightarrow 2})_k$ konservatif kuvvetin işi olarak adlandırılmaktadır. Burada ϕ ye iş fonksiyonu dersek, bunun değeri fonksiyonun ilk ve son değerlerine bağlıdır ve iki nokta arasında yapılan iş izlenen yoldan bağımsız kalmaktadır (Şekil 3.4a). Eğer kuvvet A_1 den A_2 ye gittiğinde kapalı bir yörünge çiziyorsa (A_1 ile A_2 üst üste düşer) işin sıfır ettiği görülür (Şekil 3.4b). Böylesi bir ϕ fonksiyonunun gradyeni olarak yazılabilen kuvvete de konservatif kuvvet denmektedir. Bu durumda $E_p = -\phi$ olarak tanımlanan ifadeye **potansiyel enerji fonksiyonu** adı verilir.



Şekil 3.4

3.5. İş ve Enerji İlkesi

Konservatif olan ve olmayan kuvvetlerin bir arada bulunması durumunda (3.5) ifadesi elde edilmişti. (3.5) ifadesinin sol tarafındaki iş terimi

$$W_{1 \rightarrow 2} = (W_{1 \rightarrow 2})_o + (W_{1 \rightarrow 2})_k \quad (3.8)$$

şeklinde iki kısma ayrılabilir. Burada $(W_{1 \rightarrow 2})_k$ konservatif kuvvetlerin işi olduğuna göre $(W_{1 \rightarrow 2})_o$ konservatif olmayan kuvvetlerin işi olur. Konservatif olmayan kuvvetlerin işi maddesel noktanın aldığı yola bağımlı kalmaktadır. Böylesi kuvvetlere örnek olarak sürtünme kuvveti verilebilir. (3.5) ifadesi, (3.8) kullanılarak

$$W_{1 \rightarrow 2} = (W_{1 \rightarrow 2})_o + (W_{1 \rightarrow 2})_k = E_{k2} - E_{k1}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $(W_{1 \rightarrow 2})_k$ yerine (3.8) ifadesinde görülen potansiyel enerji cinsinden eşiti yazılırsa

$$(W_{1 \rightarrow 2})_o + E_{p1} - E_{p2} = E_{k2} - E_{k1} \rightarrow (W_{1 \rightarrow 2})_o = E_{p2} - E_{p1} + E_{k2} - E_{k1} \quad (3.9)$$

olur. $\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$, $\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$ alınarak, (3.9) daki iş ifadesi

$$(W_{1 \rightarrow 2})_o = \Delta E_p + \Delta E_k \quad (3.10)$$

olarak son halini almış olur. Bu ifade, konservatif olmayan kuvvetlerin yaptığı işin, toplam potansiyel enerjideki değişim ile toplam kinetik enerjideki değişimin toplamına eşit olduğunu göstermektedir.

3.6. Bazı Kuvvetler İçin Potansiyel Enerji İfadeleri

Sabit kuvvet: Sabit bir kuvvet $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ olarak verildiğine göre E_p potansiyel enerji fonksiyonunu bulalım:

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = a \quad \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = b \quad \phi_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = c \quad (3.11)$$

olarak alınır. (3.11) eşitliklerinden birincisinin x e göre integrasyonundan

$$\phi = \int a \, dx = ax + c_1 \quad (3.12)$$

olur. (3.12) deki c_1 , içerisinde y ve z değişkenlerini kapsamaktadır. Bu sebeple, (3.12) nin y değişkenine göre türevi

$$\phi_y = c_{1y} = \frac{\partial c_1}{\partial y} \quad (3.13)$$

olmaktadır. (3.13) ifadesiyle (3.11) eşitliklerinden ikincisi karşılaştırılırsa

$$\phi_y = c_{1y} = b \quad (3.14)$$

olduğu görülür. (3.14) ifadesinin y değişkenine göre integrasyonundan bu kez

$$c_1 = by + c_2 \quad (3.15)$$

olur. (3.15) in z ye göre türevi (3.11) in üçüncü eşitliğiyle karşılaştırılırsa

$$\phi_z = c_{2z} = c \quad (3.16)$$

bulunur. (3.16) nın z değişkenine göre integrasyonu ile

$$c_2 = cz + c_3 \quad (3.17)$$

elde edilir ve (3.12), (3.15) ve (3.17) den

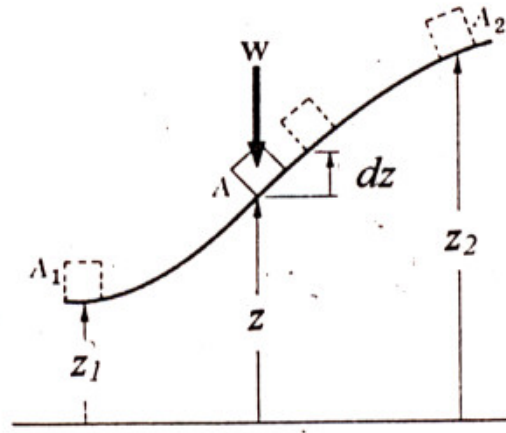
$$\phi = ax + by + cz + c_3 \quad (3.18)$$

şeklinde iş fonksiyonu bulunur. İşlemlerde $\Delta\phi$ kullanıldığından c_3 sabitinin her hangi bir değer alması sonuçları etkilemez. Bu sebeple $c_3 = 0$ alınır. Enerji fonksiyonu (3.18) ve $E_p = -\phi$ den

$$E_p = -ax - by - cz \quad (3.19)$$

olarak elde edilir.

Yerçekimi kuvveti: Şekil 3.5 de verilen eksen takımı için $\vec{F} = -mg\vec{k}$ olmaktadır. Böylesi bir kuvvetin potansiyel enerji fonksiyonu sabit kuvvet için izlenen işlem aşamaları tekrarlanarak elde edilir. Bu aşamalar aşağıda verilmiştir:



Şekil 3.5

$$\vec{F} = -mg\vec{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} \quad (3.20)$$

(3.20) de görüldüğü gibi

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{d\phi}{dz} = -mg \quad (3.21)$$

(3.21) in ikinci eşitliğinden

$$\phi = -mg \int dz = -mgz + c \quad (3.22)$$

olur ve (3.22) ve , $E_p = -\phi$ den

$$E_p = -\phi = mgz - c \quad c = 0 \rightarrow E_p = mgz \quad (3.23)$$

olarak yerçekimi kuvveti için potansiyel enerji fonksiyonu bulunur.

Yay kuvveti : Yay kuvveti durumunda, şekil 3.6 da seçilen eksen takımı için, yayın x ekseninin artı yönünde x kadar çekilmesi durumunda, yayın maddesel noktaya etki ettirdiği kuvvet $\vec{F} = -kx\vec{i}$ olmaktadır. Bu kuvvet, bir ϕ skaler fonksiyonunun gradyeni olarak

$$\vec{F} = -kx\vec{i} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

şeklinde ifade edilir. Daha önceki işlemler tekrarlanırsa

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad (3.24)$$

olur ve buradan

$$\phi = -\frac{1}{2}kx^2 + c \quad (3.25)$$

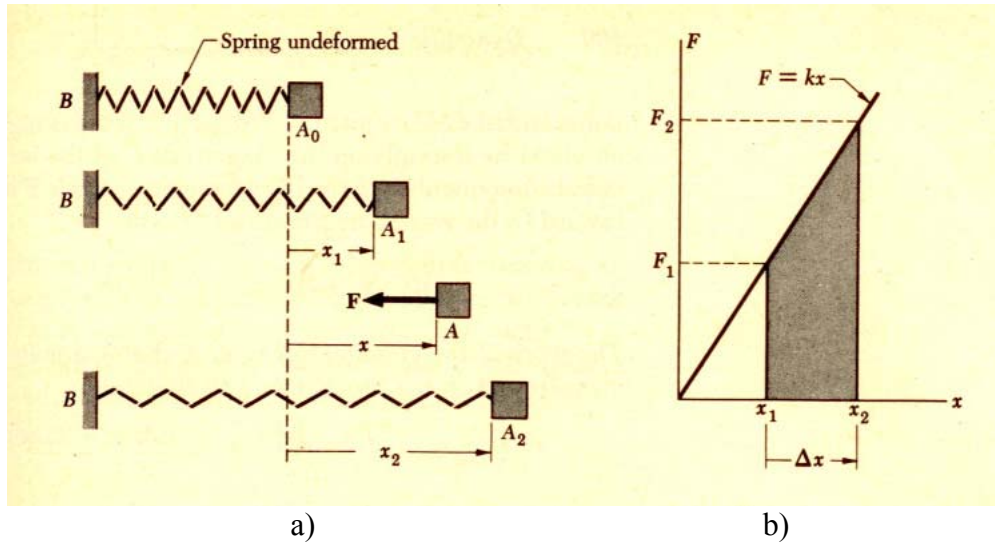
elde edilir. Potansiyel enerji fonksiyonu ise (3.25) ve $E_p = -\phi$ den

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - c, \quad c = 0 \rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.26)$$

şeklinde bulunur. Yay için elde edilen bu ifade, yayın uzaması boy değiştirmemiş konumdan ölçüldüğü sürece geçerlidir. Yani şekil 3.6 da x_1 den x_2 ye gidilmesi durumundaki potansiyel

$$E_p = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

olup, bu ifadede $(x_2^2 - x_1^2)$ yerine $(x_2 - x_1)^2$ kullanılamaz.



Şekil 3.6

3.7. Maddesel Noktalar Sistemi

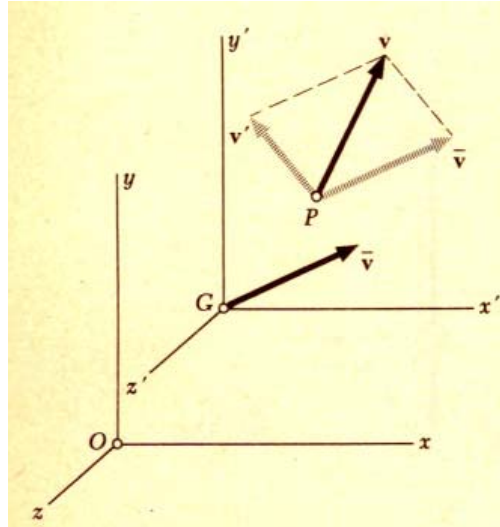
Bir problemde çok sayıda maddesel nokta varsa, her maddesel nokta ayrı ayrı göz önüne alınabilir ve iş ve enerji ilkesi her bir maddesel noktaya uygulanabilir. Bütün maddesel noktaların kinetik enerjilerini toplamak ve probleme giren bütün kuvvetlerin işlerini göz önüne almak suretiyle, iş ve enerji denklemini sistemin tümü için de yazabiliriz:

$$(W_{1 \rightarrow 2})_o = \Delta E_k + \Delta E_p \quad (3.27)$$

Burada ΔE_k sistemi meydana getiren maddesel noktaların, kinetik enerji değişimlerinin aritmetik toplamını, ΔE_p potansiyel enerji değişimlerinin aritmetik toplamını, $(W_{1 \rightarrow 2})_o$ ise tüm maddesel noktalara etkiyen konservatif olmayan kuvvetlerin 1 noktasından 2 noktasına gidene kadar yaptıkları işlerin aritmetik toplamını göstermektedir.

İş ve enerji yöntemi özellikle, **uzamayan ipler** veya **zincirlerle** birbirine bağlanmış cisimlerden oluşan sistemlerle ilgili problemlerin çözümünde elverişlidir. Böyle durumlarda, iç kuvvetler eşit ve ters yönde olmak üzere çift sayıda ortaya çıkar ve bu çift kuvvetlerin uygulama noktaları **eşit uzaklıklarda yol gider**. Bunun sonucu olarak iç kuvvetlerin işi sıfır olur ve $(W_{1 \rightarrow 2})_o$ yine sadece **konservatif olmayan dış kuvvetlerin toplam işi olarak kalır**.

Ağırlık merkezinden geçen bir karşılaştırma takımı kullanılması: Pek çok sayıda maddesel noktadan oluşan bir sistemin (bir rijit cisim halinde olduğu gibi) kinetik enerjisini hesaplarken çoğu zaman, sistemin G kütle merkezinin hareketi ile sistemin G ye bağlanmış hareketli bir karşılaştırma takımına göre bağlı hareketini ayrı ayrı incelemek daha uygun olur.



Şekil 3.7

Sistemin bir maddesel noktası P , bunu $Oxyz$ Newton karşılaştırma takımına göre bağıl hızı $\vec{v}$, $Oxyz$ ye göre ötelenme yapan $Gx'y'z'$ hareketli takımına göre bağıl hızı ise $\vec{v}'$ olsun (Şekil 3.7). G kütle merkezinin $Oxyz$ Newton takımına göre bağıl hızını $\vec{\bar{v}}$ ile gösterirsek, Kısım 1.12'ye göre

$$\vec{v} = \vec{\bar{v}} + \vec{v}' \quad (3.28)$$

yazılır. v^2 nin $\vec{v} \cdot \vec{v}$ skaler çarpımına eşit olduğunu dikkate alarak, sistemin $Oxyz$ Newton takımına göre E_k kinetik enerjisini şöyle ifade ederiz:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m v^2 = \frac{1}{2} \sum (m \vec{v} \cdot \vec{v}) \quad (3.29)$$

$\vec{v}$ yerine (3.28) deki değerini koyarak

$$E_k = \frac{1}{2} \sum [m(\vec{\bar{v}} + \vec{v}') \cdot (\vec{\bar{v}} + \vec{v}')] = \frac{1}{2} (\sum m) \vec{\bar{v}}^2 + \vec{\bar{v}} \cdot \sum m \vec{v}' + \frac{1}{2} \sum m v'^2 \quad (3.30)$$

Kısım 2.5 deki (2.11) bağıntısını göz önüne alırsak

$$\sum m \vec{v}' = (\sum m) \vec{\bar{v}}' = 0 \quad (3.31)$$

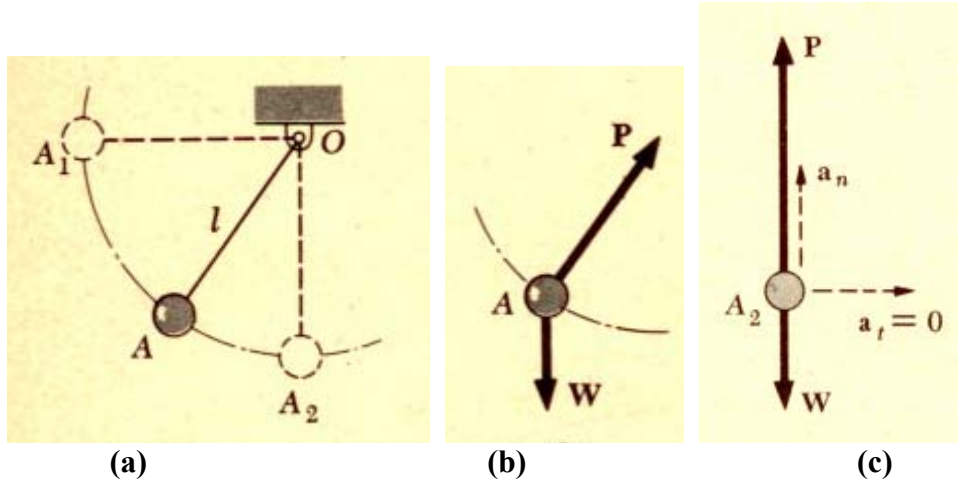
olduğunu görürüz, çünkü G nin $Gx'y'z'$ takımına göre bağıl hızını gösteren $\vec{\bar{v}}'$ nün sıfır olacağı açıktır. Şu halde

$$E_k = \frac{1}{2} (\sum m) \vec{\bar{v}}^2 + \frac{1}{2} \sum m v'^2 \quad (3.32)$$

Bu denklem şunu göstermektedir: Maddesel noktalar sisteminin E_k kinetik enerjisi, G **kütle merkezinin** (kütlenin tümü G de toplanmış gibi farzederek) **kinetik enerjisi ile, sistemin $Gx'y'z'$ takımına göre hareketindeki kinetik enerjisini toplayarak elde edilebilir.**

3.8. İş ve Enerji İlkesinin Uygulamaları

İş ve enerji ilkesinin uygulanması, kuvvetler, yer değiştirmeler ve hızlarla ilgili pek çok problemin çözümünü büyük ölçüde basitleştirir. Örneğin, W ağırlığında bir top ile l boyunda bir ipten oluşan bir sarkacı göz önüne alalım (Şekil 3.8a). Sarkaç ilk hızı sıfır olmak üzere, OA_1 yatay konumundan bırakılmış olsun ve düşey düzlemde salınım yapsın. Topun tam O nun altında bulunan A_2 noktasından geçtiği andaki hızını bulmak isteyelim.



Şekil 3.8

Önce topa etkiyen kuvvetlerin A_1 den A_2 ye kadar yer değiştirme sırasında yaptıkları işi bulalım. Topun serbest cisim diyagramını çizelim, topa gelen **gerçek** kuvvetlerin tümünü, yani $\vec{W}$ ağırlığını ve ipten gelen $\vec{P}$ kuvvetini gösterelim (Şekil 3.8b). Atalet vektörü gerçek kuvvet olmadığından serbest cisim diyagramında **gösterilmemelidir**. $\vec{P}$ kuvveti iş yapmaz, çünkü yörüngeye diktir; o halde $\vec{W}$ ağırlığının potansiyel enerjisindeki değişim, düşey yer değiştirme l olduğuna göre (3.23) den,

$$\Delta E_p = -Wl$$

olur. Maddesel noktanın kinetik enerjisindeki değişim ise (3.4) ve (3.5) den

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(v_2^2 - 0)$$

dır. Konservatif olmayan kuvvetler bulunmadığına göre,

$$(W_{1 \rightarrow 2})_o = \Delta E_k + \Delta E_p \rightarrow 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - Wl$$

Buradan $v_2 = \sqrt{2gl}$ olarak elde edilir. Bulunan hızın l yüksekliğinden serbest düşen bir cismin hızı ile aynı olduğuna dikkat ediniz.

Göz önüne alınan örnek, iş ve enerji ilkesinin aşağıdaki üstünlüklerini ortaya koymaktadır:

1. A_2 deki hızı bulmak için, arada bir A noktasındaki ivmeyi bulup elde edilen bu ifadeyi A_1 den A_2 ye kadar integre etmeye ihtiyaç yoktur.
2. Hesaba giren bütün büyüklükler skalerdir, x ve y bileşenlerini kullanmadan doğrudan doğruya toplanabilir.
3. İş yapmayan kuvvetler, problemin çözümünde hesaba katılmamaktadır.

Ancak, bir problemde üstün olan bir şey ötekinde sakınca olabilir. Örneğin iş ve enerji ilkesinin de, doğrudan doğruya ivmenin bulunmasında kullanılamayacağı açıktır. Ayrıca yörüngeye normal kuvvetler iş yapmadıklarından, bunların belirtilmesi için bu ilkeye ek olarak Newton' un ikinci kanununun doğrudan doğruya uygulanması gerektiğine dikkat edilmelidir. Örneğin şekil 3.8a daki sarkaçta, top A_2 den geçerken ipteki gerilmeyi bulmak istediğimizi farzedelim (Şekil 3.8c) ve Newton' un ikinci kanununu teğetsel ve normal bileşenler cinsinden yazalım. $\sum \vec{F}_t = m \vec{a}_t$ denklemi $a_t=0$ verir, $\sum \vec{F}_n = m \vec{a}_n$ den ise

$$P = W + \frac{W}{g} a_n = W + \frac{W}{g} \frac{v^2}{l}$$

elde edilir. Oysa A_2 deki hız daha önce iş ve enerji yöntemi yardımıyla bulunmuştu. $v^2 = 2gl$ koyarak sonucu elde ederiz:

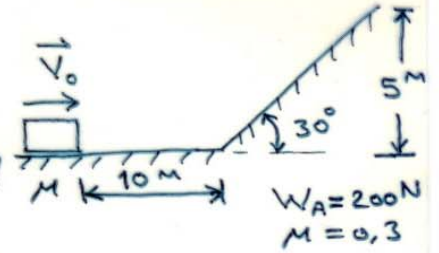
$$P = W + \frac{W}{g} \frac{2gl}{l} = 3W$$

Problem 1 : Bir A cisminin verilen konumda

ilk hızı V_0 dir. (a) Cismnin eğik düzlemlerde

şekilde görüldüğü gibi 5 m yukarı çıkabilmesi için V_0 hızı ne olmalıdır? (b) Cismnin 5 m

yukarı çıktığında toplam mekanik enerjisi kaybı nedir?



Gözüm: (a) $(W_{1-2})_0 = \Delta E_k + \Delta E_p$

$$-200 \cdot 0,3 \cdot 10 - 200 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,3 \cdot 5 / \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \frac{200}{9} \cdot V_0^2 + 200 \cdot 5 \Rightarrow V_0 = 14,55 \frac{m}{sn}$$

(b) Mekanik enerjisi kaybı $= -200 \cdot 0,3 \cdot 10 - 200 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,3 \cdot 5 / \sin 30^\circ = 1116 J$

$$\text{mek. en. kaybı} = (X_{1-2})_0 = 1116 J$$

Problem 2 : Yüksekliği 2 m olan şekildedeki

kesik koni 1,5 m yüksekliğe kadar özgül

ağırlığı $50 N/m^3$ olan bir sıvı ile doldu-

rulmuştur. Bu sıvıyı 6 m yüksekliğe

aktarabilmek için yapılması gereken iş

bulunur. Not: Sürtünme kuvveti sebebiyle enerjisi kaybı olma-

dığı varsayılacaktır. Ayrıca ikinci ve birinci durumlarda kinetik

sıfır olduğu varsayılacaktır.

Gözüm: $(W_{1-2})_0 = \Delta E_k + \Delta E_p$

$$r^2 = z^2 + 4$$

$$0 = \Delta E_p = \Delta E_{p\text{ sıvı}} + \Delta E_{p\text{ motor}}$$

$$0 = - \int_0^{1,5} \gamma \cdot \pi r^2 \cdot dz \cdot z + \int_0^{1,5} \gamma \cdot \pi r^2 \cdot dz \cdot 6 + \Delta E_{p\text{ motor}}$$

$$0 = 6 \gamma \pi \left(\frac{z^3}{3} + 4z \right) \Big|_0^{1,5} - \gamma \pi \left(\frac{z^4}{4} + \frac{4z^2}{2} \right) \Big|_0^{1,5} + \Delta E_{p\text{ motor}}$$

$$0 = 5809,492 + \Delta E_{p\text{ motor}} \rightarrow \Delta E_{p\text{ motor}} = -5809,492 \text{ Joule}$$

$$\Delta E_{p\text{ motor}} = -\Delta \phi_{\text{motor}} \rightarrow \Delta \phi_{\text{motor}} = 5809,492 \text{ Joule}$$

Problem 3 : a) Potansiyel enerjisi fonksiyonu $E_p = 5z \cos x - 2y^2 z$ Nm

olan konservatif kuvveti bulunur. b) Bu kuvvetin ve kendi ağırlığı-

nun etkisindeki kütlesi 2 kg olan bir maddesel noktanın

$\vec{r}_1 = 2\vec{j}$ m konumundan $\vec{r}_2 = 6\vec{j} + 2\vec{k}$ m konumuna gelmesi dolayısıyla

yapılan iş hesaplanır. c) Maddesel noktanın ilk konumun-

daki hızı 0 m/sn ise ikinci konumdaki hızın şiddetini bulunur.

(a) $\phi = -E_p = -5z \cos x + 2y^2 z$

$F_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 5z \sin x$; $F_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 4yz$; $F_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -5 \cos x + 2y^2$

(b) $(W_{1 \rightarrow 2})_k = (W_{1 \rightarrow 2})_F + (W_{1 \rightarrow 2})_W = -[(\Delta E_p)_F + (\Delta E_p)_W] = + \Delta E_k$

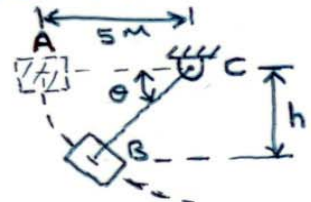
$\underbrace{(5 \cdot 2 \cdot \cos 0 - 2 \cdot 6^2 \cdot 2)}_{(\Delta E_p)_F} - 0 + \underbrace{2 \cdot 10^9 \cdot (2 - 0)}_{(\Delta E_p)_W} = -94 \text{ J}$

$(W_{1 \rightarrow 2})_k = -\Delta E_p = 94 \text{ J}$

(c) $(W_{1 \rightarrow 2})_0 = (\Delta E_p)_F + (\Delta E_p)_W + \Delta E_k$

$0 = -94 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (V_2^2 - V_1^2) \rightarrow V_2 = 9,695 \text{ m/san}$

Problem 4 : 5 m uzunluğunda bir ipeğin ucuna bağlanmış olan W ağırlığında bir paket A noktasında tutulurken harekete terk ediliyor.



İpteki çekme kuvveti paket ağırlığının 2 katı olduğu anda ip kopuyor. Paketin harekete başladığı A noktası ile ipin koptuğu B noktası arasındaki h yükseklik farkını hesaplayınız.

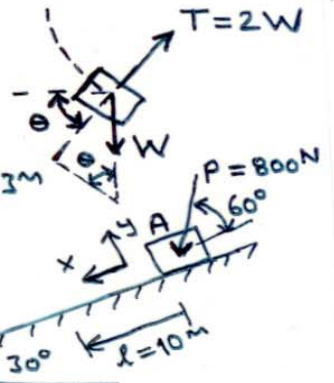
$(W_{1 \rightarrow 2})_0 = \Delta E_p + \Delta E_k \rightarrow 0 = \Delta E_p + \Delta E_k \rightarrow 0 = -mgh + \frac{1}{2} mV^2$

$h = \frac{V^2}{2g} \rightarrow V^2 = 2gh$

$\Sigma F_n = m \cdot a_n \rightarrow 2W - W \cdot \sin \theta = \frac{W}{g} \cdot a_n$

$2W - W \cdot \frac{h}{5} = \frac{W}{g} \cdot \frac{V^2}{5} \rightarrow 2 - \frac{h}{5} = \frac{1}{g} \cdot \frac{2gh}{5} \rightarrow h = 3,33 \text{ m}$

$V = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 3,33} = 8,16$



Problem 5 : $W=200 \text{ N}$ ağırlığındaki A cismin sürtünme katsayısı $\mu=0,3$ olan eğik bir

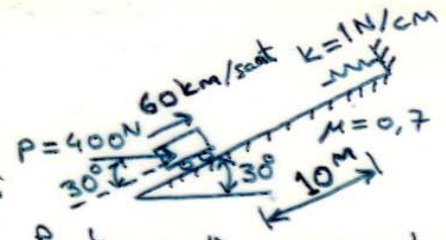
yüzey üzerinde kaymaktadır. Cisim $P=800 \text{ N}$ luk dış kuvvet şekildeki gibi etkilenebilir. Cisim $l=10 \text{ m}$ yol aldığı anda hızı ne olur? Cismin ilk hızı sıfırdır.



Çözüm: $-(W \cdot \cos 30^\circ + P \cdot \sin 60^\circ) \cdot \mu \cdot l = \underbrace{-mgl \cdot \sin 30^\circ}_{(\Delta E_p)_W} - \underbrace{P \cdot \cos 60^\circ \cdot l}_{(\Delta E_p)_P} + \underbrace{\frac{1}{2} mV^2}_{\Delta E_k}$

$V = 15,49 \text{ m/san}$

Problem 6: 2000 N ağırlığındaki bir araç 60 km/saat ile bir hızla ilerlerken fren yapmaktadır. Fren yapılan nokta ile yay arasındaki uzaklık 10 m olduğuna göre yaydaki maksimum kısalma miktarını hesaplayınız. P kuvveti araçta her an etkilimaktadır.



$$v = \frac{60000}{3600} = 16,67 \text{ m/san}$$

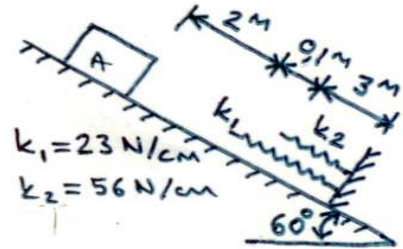
Gözüm: $(W_{1 \rightarrow 2})_0 = \Delta E_p + \Delta E_k$

$$-(P \cdot \sin 30^\circ + W \cdot \cos 30^\circ) \cdot 0,7 \cdot (10+x) = -P \cdot \cos 30^\circ (10+x) + 2000 \cdot (10+x) \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 100x^2 - \frac{2000 \cdot 16,67^2}{2 \cdot 10}$$

$$= 1352,436(10+x) = -346,41(10+x) + 1000(10+x) + 50x^2 - 27777,78$$

$$50x^2 + 2006,026x - 7717,52 = 0 \rightarrow x = 3,5356 \text{ m}$$

Problem 7: 3 kN ağırlığındaki bir maddesel nokta şeklindeki konumdan ilk hızla serbest bırakılmıştır. Maddesel nokta ile yüzey arasındaki sürtünme katsayısı 0,2 olarak verilmektedir. Yaylarda oluşan en büyük kısalma miktarlarını hesaplayınız.



Gözüm: $(W_{1 \rightarrow 2})_0 = \Delta E_p + \Delta E_k$

$$-3000 \cdot \cos 60^\circ \cdot 0,2(2+x) = -3000(2+x) \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2300x^2 + \frac{1}{2} \cdot 5600(x-0,1)^2$$

$$0 = -2298x - 4596 + 1150x^2 + 2800(x^2 - 0,2x + 0,01)$$

$$0 = 3950x^2 - 2858x - 4568 \rightarrow x_1 = 1,496 \text{ m} > 0,1 \text{ m} \quad (\text{cisim ikinci yayı ulaşarak sıkışma meydana getiriyor})$$

$$x_2 = -0,343 \text{ m}$$

İkinci yayın kısalması = 1,396 m

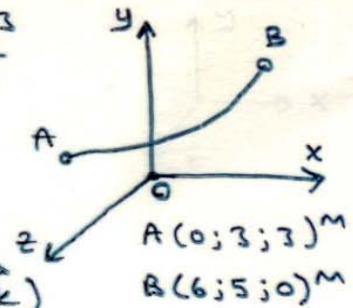
Problem 8: Ağırlığı 10 N olan bir blok, eğri bir yol boyunca A dan B ye doğru sürtünmesiz olarak hareket etmektedir. Hareket süresince bloğa $\vec{P} = 2x^2\vec{i} + 3y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ N kuvveti etkilir. a) Kuvvet konservatif olduğuna göre potansiyel enerji farkını bulunuz. b) Bloğun A noktasındaki hızı 30 m/san ise B ye geldiği anda hızı ne olur?

Gözüm: $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x^2$; $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3y^2$; $\frac{\partial \phi}{\partial z} = z^2$

$$\phi = \frac{2x^3}{3} + C_1(y, z) \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = C_{1y} = 3y^2 \rightarrow C_1 = \frac{3y^3}{3} + C_2(z)$$

$$\phi = \frac{2x^3}{3} + y^3 + C_2(z) \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = C_{2z} = z^2 \rightarrow C_2 = \frac{z^3}{3} + C_3$$

$$\phi = \frac{2x^3}{3} + y^3 + \frac{z^3}{3} + c_3 \rightarrow E_p = -\frac{2x^3}{3} - y^3 - \frac{z^3}{3}$$



b) 1. yol $(W_{1 \rightarrow 2})_p = -(\Delta E_p)_p$

$$(W_{1 \rightarrow 2})_p = \int_A^B (2x^2 \vec{i} + 3y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}) (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k})$$

$$(W_{1 \rightarrow 2})_p = \int_A^B (2x^2 dx + 3y^2 dy + z^2 dz) = \int_0^6 2x^2 dx + \int_3^5 3y^2 dy + \int_3^0 z^2 dz = 233 \text{ Nm}$$

$$(W_{1 \rightarrow 2})_o = (\Delta E_p)_p + (\Delta E_p)_w + \Delta E_k \quad (\Delta E_p)_p = -233 \text{ J}$$

$$0 = -233 + 10 \cdot (5-3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{10} \cdot (V_B^2 - 30^2) \rightarrow V_B = 36,41 \text{ m/san}$$

2. yol

$$0 = (E_{p2})_p - (E_{p1})_p + (\Delta E_p)_w + \Delta E_k$$

$$0 = \underbrace{\left(-\frac{2 \cdot 6^3}{3} - 5^3 - \frac{0^3}{3} \right)}_{(E_{p2})_p} - \underbrace{\left(-\frac{2 \cdot 0^3}{3} - 3^3 - \frac{3^3}{3} \right)}_{(E_{p1})_p} + 10(5-3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{10} (V_B^2 - 30^2)$$

$$-233 + 20 + \frac{V_B^2}{2} - 450$$

$$\underline{V_B = 36,41 \text{ m/san}}$$

4.MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ:İMPULS VE MOMENTUM

4.1. İmpuls ve Momentum İlkesi

Bu bölümde maddesel noktanın hareketi ile ilgili problemlerin çözümü için üçüncü bir ana yöntem göz önüne alınacaktır. Bu yöntem impuls ve momentum ilkesine dayanır ve kuvvet, kütle, hız ve zamanla ilgili problemler için özellikle elverişlidir.

Bir $\vec{F}$ kuvvetinin etkisinde bulunan bir m maddesel noktası göz önüne alalım. Newton' un ikinci kanunu olan $\vec{F} = m\vec{a}$ da $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ koyarsak

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

yazar, veya m kütlesi sabit olduğundan

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (4.1)$$

elde ederiz. $m\vec{v}$ vektörüne, maddesel noktanın **doğrusal momentumu** veya **momentumu** denir. Bu, maddesel noktanın hızı ile aynı doğrultudadır ve şiddeti Ns an ile ölçülür. (4.1) denklemi, **maddesel noktaya etkiyen $\vec{F}$ kuvvetinin, maddesel noktanın momentumundaki değişim hızına eşit olduğunu** ifade etmektedir. Bu şekil, ikinci kanunun Newton tarafından ilk ifade edildiği şekildir.

(4.1) denkleminin her iki tarafını dt ile çarpar ve t_1 zamanından t_2 zamanına kadar integre edersek

$$\vec{F} dt = d(m\vec{v}) \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

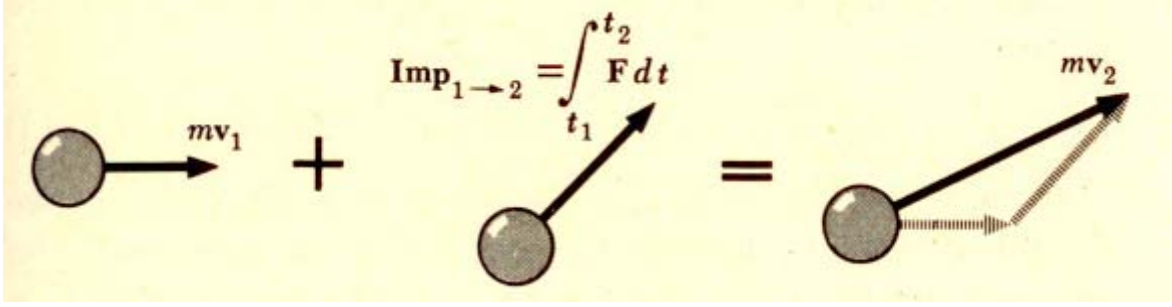
veya son terimi sola geçirerek

$$m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 \quad (4.2)$$

elde ederiz. (4.2) denklemindeki integrale, $\vec{F}$ kuvvetinin, göz önüne alınan zaman aralığındaki **doğrusal impulsu** veya sadece **impulsu** adı verilir. Bu denklem, Şekil 4.1 deki gösterimle de ifade edilebilir. $\vec{F}$ yi dik bileşenlere ayırarak

$$Imp_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{i} \int_{t_1}^{t_2} F_x dt + \vec{j} \int_{t_1}^{t_2} F_y dt + \vec{k} \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \quad (4.3)$$

yazılır. Kinetik enerji, potansiyel enerji ve iş skaler büyüklükler olduğu halde, momentum ve impulsun vektörel büyüklükler olduğuna dikkat edilmelidir. Şu halde analitik çözüm elde etmek için,



Şekil 4.1

(4.2) denklemi yerine eşdeğer bileşen denklemlerini koymak gerekeceği açıktır :

$$(mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = (mv_x)_2$$

$$(mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = (mv_y)_2 \quad (4.4)$$

$$(mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = (mv_z)_2$$

Maddesel noktaya birden fazla kuvvet etkiyorsa, her bir kuvvetin impulsu göz önüne alınmalıdır. O zaman

$$m\vec{v}_1 + \sum \dot{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\vec{v}_2 \quad (4.5)$$

olur. Bu denklem de yine, vektörel büyüklükler arasında bir bağıntı göstermektedir; problemin gerçek çözümünde ise, vektörel denklem yerine karşıt bileşen denklemlerini koymak gerekir.

4.2. Maddesel Noktalar Sistemi

Bir problemde birden fazla maddesel noktanın hareketi söz konusu oluyorsa, maddesel noktalar ayrı ayrı göz önüne alınmalı ve her bir maddesel nokta için (4.5) denklemi yazılmalıdır. Bütün maddesel noktaların momentumları ve ilgili kuvvetlerin impulslarını vektörel olarak toplamak da mümkündür. O zaman

$$\sum m\vec{v}_1 + \sum \dot{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \sum m\vec{v}_2 \quad (4.6)$$

yazılır. Oysa iç kuvvetler birbirine eşit ve zıt yönde, aynı tesir çizgisi üzerinde bulunan ikiye kuvvet olarak meydana geldiklerinden, bunların toplamı sıfır eder ve sadece dış kuvvetlerin impulslarını göz önüne almak yeterli olur. Şu halde

$$\sum m \vec{v}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{dış} dt = \sum m \vec{v}_2 \quad (4.7)$$

olur.

Maddesel noktalar sisteminin G kütle merkezi göz önüne alınırsa (4.7) denklemi değişik bir şekilde yazılabilir. G nin hızı $\vec{v}$ olmak üzere

$$\sum m \vec{v} = (\sum m) \vec{v} \quad (4.8)$$

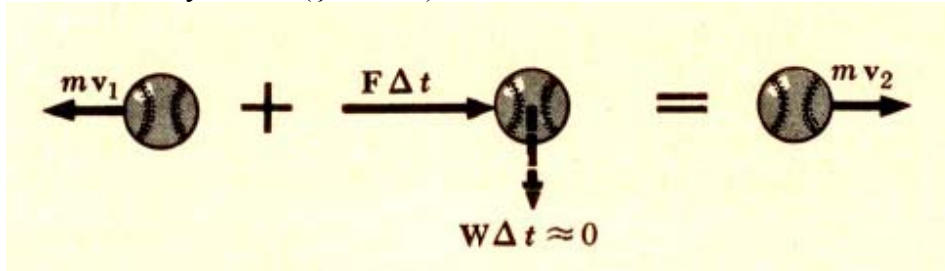
yazabiliriz. Bunu (4.7) de yerine koyarak

$$(\sum m) \vec{v}_1 + \sum Dış \dot{Imp}_{1-2} = (\sum m) \vec{v}_2 \quad (4.9)$$

elde ederiz. (4.9) denkleminin, bütün dış kuvvetlerin, kütlesi $\sum m$ olan bir tek maddesel noktaya etkimesi halinde elde edilecek denklemle özdeş olduğuna dikkat etmelidir. Böylece, bir maddesel noktalar sisteminin kütle merkezinin, sistemin bütün kütlesi ve dış kuvvetlerin hepsi bu noktaya etkiyormuş gibi hareket ettiğini sağlamış oluyoruz. Bununla birlikte (4.8) ve (4.9) denklemlerinin, göz önüne alınan impulsların ve momentumların momentleri arasında bir bağıntı ***göstermediğini*** hatırdan çıkarmamalıdır. Şu halde, (4.8) denklemi, maddesel noktalar sisteminin momentumlarının, G kütle merkezine uygulanmış bir $(\sum m) \vec{v}$ vektörüne eşdeğer olduğunu ***ifade etmez***. Gerçekten daha sonra göreceğimiz üzere, bir sistemin maddesel noktalarının momentumlarının bileşkesi, genellikle sistemin kütle merkezinden geçmez.

4.3. İmpulsif Kuvvetler

Bazı problemlerde maddesel noktaya çok kısa bir süre içinde çok büyük bir kuvvet etkiyebilir ve momentumda belirli bir değişme meydana getirir. Böyle bir kuvvete ***impulsif kuvvet*** adı verilir. Örneğin bir beyzbol topuna vurulunca sopa ile top arasındaki değme, çok kısa bir Δt süresince devam eder. Fakat sopanın topa uyguladığı ortalama $\vec{F}$ kuvveti çok büyüktür ve bunun sonucu, ortaya çıkan $\vec{F} \Delta t$ impulsu topun hareket yönünü değiştirecek kadar büyük olur (Şekil 4.2).



Şekil 4.2

Bir maddesel noktaya impulsif kuvvetler etkirse (4.6) denklemi

$$m \vec{v}_1 + \sum \vec{F} \Delta t = m \vec{v}_2 \quad (4.10)$$

haline gelir. İmpulsif olmayan her hangi bir kuvvet ihmal edilebilir, çünkü bu kuvvete ait $\vec{F} \Delta t$ impulsu çok küçüktür. **İmpulsif olmayan kuvvetler**, cismin ağırlığı, bir yayın hasıl ettiği kuvvet veya impulsif kuvvete göre çok küçük olduğu bilinen herhangi kuvvetlerdir. Bilinmeyen reaksiyon kuvvetleri impulsif olabilir veya olmayabilir; bunların ihmal edilebilir olduğu gösterilmedikçe (4.10) denkleminde katılmaları gerekir. Örneğin yukarıda göz önüne alınan beyzbol topunun ağırlığının impulsu ihmal edilebilir. Sopa'nın hareketi inceleniyorsa, sopa'nın ağırlığının impulsu da ihmal edilebilir. Topu çelenin eline gelen sopa reaksiyonunun impulsu ise işe katılmalıdır. Topa yanlış vurulursa bu impulslar ihmal edilemez.

4.4. Momentumun Korunumu

Kısım 4.2 de görüldü ki, bir maddesel noktalar sistemi çeşitli kuvvetler etkisi altında hareket ediyorsa, maddesel noktaların ilk momentumları, son momentumları ve dış kuvvetlerin impulsları arasında şu bağıntı sağlanmaktadır :

$$\sum m \vec{v}_1 + \sum Dış \vec{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \sum m \vec{v}_2 \quad (4.6)$$

Şimdi dış kuvvetlerin impulslarının sıfır olduğu hali göz önüne alalım. O zaman (4.9) denklemi kısalarak

$$\sum m \vec{v}_1 = \sum m \vec{v}_2 \quad (4.11)$$

haline gelir. Şu halde, ***bir maddesel noktalar sistemine etkiyen dış kuvvetlerin impulsları toplamı sıfır ise, sistemin toplam momentumu sabit kalır.***

Yine, sistemin G kütle merkezini işin içine sokar ve (4.8) bağıntısını kullanırsak (4.11) denklemi

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \quad (4.12)$$

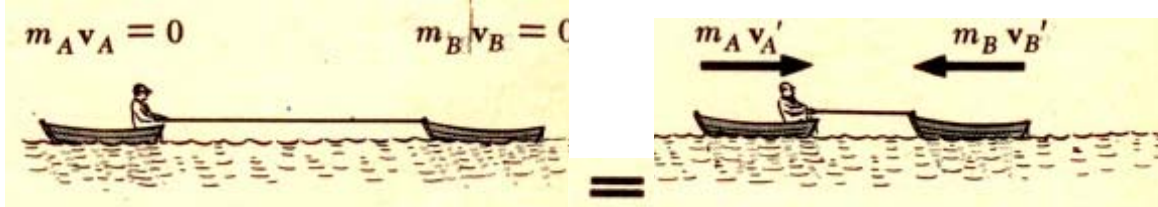
haline gelir. Şu halde, bir maddesel noktalar sistemine etkiyen dış kuvvetlerin impulsları toplamı sıfır ise ***sistemin kütle merkezi sabit hızla hareket eder.***

Momentumun korunumunda iki farklı hale sık sık rastlanır :

1. Sisteme etkiyen dış kuvvetler göz önüne alınan süre içerisinde birbirini dengelemektedir. Zaman aralığı ne kadar uzun olursa olsun $\sum Dış \vec{Imp}_{1 \rightarrow 2} = 0$ olur ve (4.11) formülü uygulanır. Örneğin, kütleleri m_A ve m_B olan, başlangıçta hareketsiz duran iki kayık birbirine doğru çekilmekte olsun (Şekil 4.3). Suyun direnci ihmal edilirse, kayıklara etkiyen dış kuvvetler sadece kendi ağırlıkları ve suyun kaldırma kuvvetleridir. Bu kuvvetler birbirlerini dengelediklerinden

$$\begin{aligned} \sum m \vec{v}_1 &= \sum m \vec{v}_2 \\ 0 &= m_A v'_A + m_B v'_B \end{aligned}$$

olur; burada v'_A ve v'_B , kayıkların sonlu bir zaman aralığı sonundaki hızlarını göstermektedir. Elde edilen denklem, kayıkların zıt yönlerde (birbirlerine doğru) kütleleriyle ters orantılı hızlarda hareket ettiklerini göstermektedir. Ayrıca başlangıçta hareketsiz olan iki kayığın kütle merkezinin aynı yerde kaldığına işaret edelim.



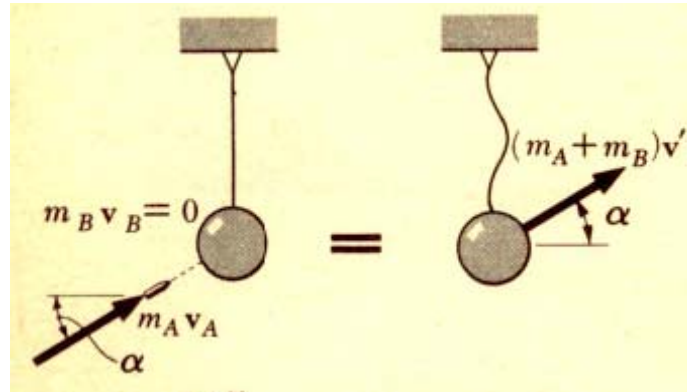
Şekil 4.3

2. Göz önüne alınan zaman aralığı çok kısadır ve bütün dış kuvvetler impulsif olmayan tiptedir. Yine, $\sum Dış \dot{Imp}_{1 \rightarrow 2} = 0$ olur ve (4.11) denklemi uygulanır. Örneğin, kütlesi m_A olan bir mermi $\vec{v}_A$ ilk hızı ile, kütlesi m_B olan ve uzamayan bir ipin ucuna asılmış hareketsiz bir tahta küreye atılmış olsun (Şekil 4.4). Mermi küreye girer ve ona bir $\vec{v}'$ hızı verir; bu hızı bulmak isteyelim. Küreye vurulunca ipteki kuvvet sıfır olur ve küre ile merminin beraber ağırlığı dengelenmemiş kalır. Fakat zaman çok kısa olduğundan, ağırlığın impulsu ihmal edilebilir. Böylece

$$\sum m \vec{v}_1 = \sum m \vec{v}_2$$

$$m_A v_A + 0 = (m_A + m_B) \vec{v}'$$

yazılır. Elde edilen denklemden $\vec{v}'$ çözülebilir; $\vec{v}'$ hızının $\vec{v}_A$ ile aynı doğrultuda olduğunu görmekteyiz.



Şekil 4.4

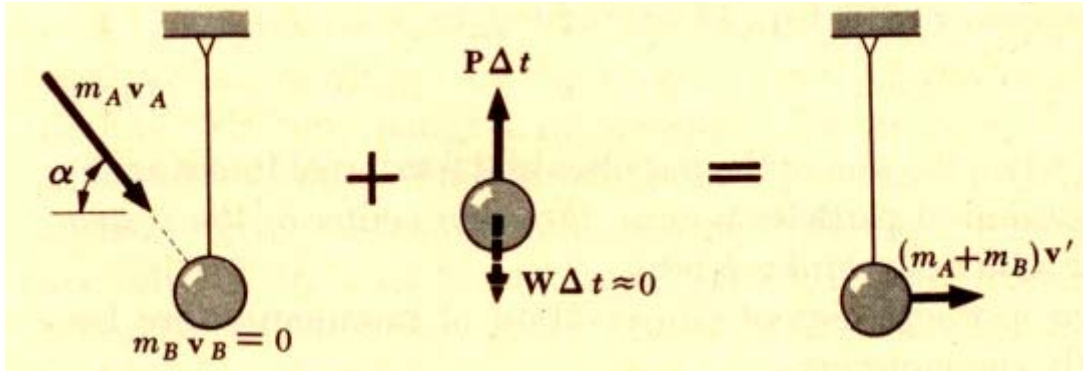
Şimdi mermi ile küreye aşağı doğru ateş edildiği hali göz önüne alalım (Şekil 4.5). İp uzamayacağı için, kürenin aşağı doğru her hangi bir hareketine engel olacak ve ona bir $\vec{P}$ reaksiyonu gösterecektir. Bu reaksiyon belirsizdir ve bu sebepten aksi kanıtlanmadıkça impulsif kabul edilmek zorundadır. (4.9) genel denklemini yatay ve düşey bileşenleri cinsinden yazıp, yine ağırlığın impulsunun ihmal edilebileceğine dikkat edersek

$$\sum m \vec{v}_1 + \sum Dış \dot{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \sum m \vec{v}_2$$

$$m_A v_A \cos \alpha + 0 = (m_A + m_B) v'$$

$$-m_A v_A \sin \alpha + P \Delta t = 0$$

elde ederiz. İlk denklem, momentumun x bileşeninin korunduğunu ifade eder; bu, v' nün hesabında kullanılabilir. İkinci denklem, doğrusal momentumun y bileşeninin korunmadığını gösterir; bu denklem, ipin uyguladığı kuvvetin impulsunun $P \Delta t$ şiddetini belirtmekte kullanılabilir. Şu halde göz önüne alınan sistemde momentum korunmaz ve (4.11) denklemi sadece x doğrultusu için sağlanır.

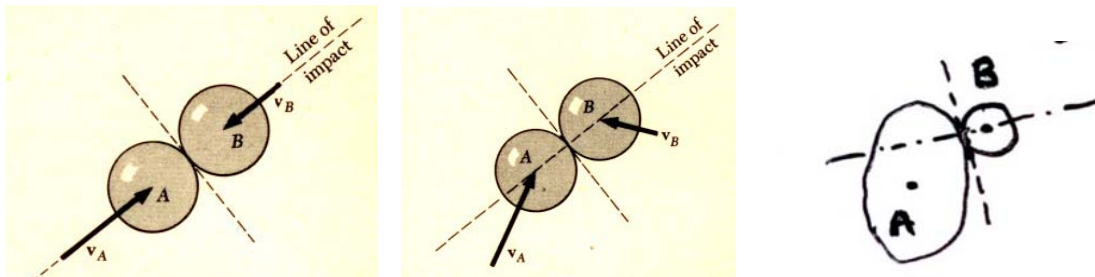


Şekil 4.5

4.5. Çarpışma

İki maddesel noktanın çok kısa bir süre içinde birbirine dokunup, bu anda karşılıklı olarak birbirlerine oldukça büyük kuvvetler uygulamalarına **çarpışma** denir. Çarpışma süresindeki dokunma yüzeylerinin ortak normaline **çarpışma doğrusu** adı verilir. Çarpışan cisimlerin kütle merkezleri bu normal üzerinde ise, çarpışmaya **merkezselsel çarpışma** denir. Aksi halde çarpışma, **merkezselsel olmayan çarpışma** adını alır. Şimdiki incelememizi iki cismin merkezselsel çarpışmasına ayıracak ve iki rijit cismin, merkezselsel olmayan çarpışmasının çözümlemesini sonraya bırakacağız.

İki cismin hızı, çarpışma doğrusu üzerinde ise çarpışmaya **doğru çarpışma** denir. (Şekil 4.6a). Öte yandan cisimlerden biri veya her ikisi çarpışma doğrusundan farklı bir doğru üzerinde hareket ediyorsa, çarpışmaya **eğik çarpışma** denir. (Şekil 4.6b).



(a) Doğru merkezselsel çarpışma (b) Eğik merkezselsel çarpışma (c) Merkezselsel olmayan çarpışma

Şekil 4.6

4.6. Doğru Merkezsel Çarpışma

Kütleleri m_A ve m_B olan A ve B cisimlerini göz önüne alalım; bunlar aynı doğru üzerinde ve sağa doğru bilinen $\vec{v}_A$ ve $\vec{v}_B$ hızları ile hareket etmekte olsunlar (Şekil 4.7a). $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ den büyükse A cismi B ye çarpacaktır. Çarpışma sonucu iki cisim **şekil değiştirecekler** ve şekil değiştirme süresi sonunda aynı $\vec{u}$ hızını kazanacaklardır (Şekil 4.7b). Sonra bir **geri dönüş** süresi ortaya çıkacak, bu sürenin sonunda, çarpışma kuvvetleri ve malzemenin cinsine göre, iki cisim ya ilk şekillerini yeniden kazanacaklar veya artık şekillerini değiştirmiş olarak kalacaklardır. Bizim şimdiki amacımız, geri dönüş süresi sonunda cisimlerin $\vec{v}'_A$ ve $\vec{v}'_B$ hızlarını belirtmektir (Şekil 4.7c).



Şekil 4.7

Önce iki cisimden oluşan bu sistemi bir bütün olarak göz önüne alırsak çarpışma sırasındaki impulsif kuvvetlerin, sadece iç kuvvetler olduğunu görürüz. Şu halde sistemin momentumu korunmaktadır ve

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v}'_A + m_B \vec{v}'_B$$

yazılabilir. Bütün hızlar aynı eksen doğrultusunda olduğundan, elde edilen bu denklem yerine sadece skaler bileşenleri içine alan şu denklemi koyabiliriz :

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (4.13)$$

Skaler büyüklükler olan v_A, v_B, v'_A ve v'_B nün pozitif olması, ilgili vektörün sağa doğru yönelmiş olduğu anlamına gelecektir; negatif değer ise ilgili vektörün sola doğru yönelmiş olduğunu gösterecektir.

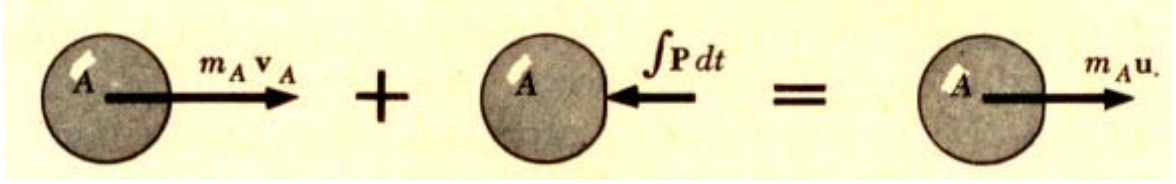
$\vec{v}'_A$ ve $\vec{v}'_B$ hızlarını elde etmek için v'_A ve v'_B skalerleri arasında bir bağıntı daha bulmak gereklidir. Bu amaçla şimdi, A cisminin şekil değiştirme süresindeki hareketini göz önüne alıp impuls ve momentum ilkesini uygulayacağız. Bu süre içinde A ya etkiyen impulsif kuvvet sadece B den gelen $\vec{P}$ kuvveti olduğu için (Şekil 4.8a), yine skaler bileşenleri kullanarak

$$m_A v_A - \int P dt = m_A u \quad (4.14)$$

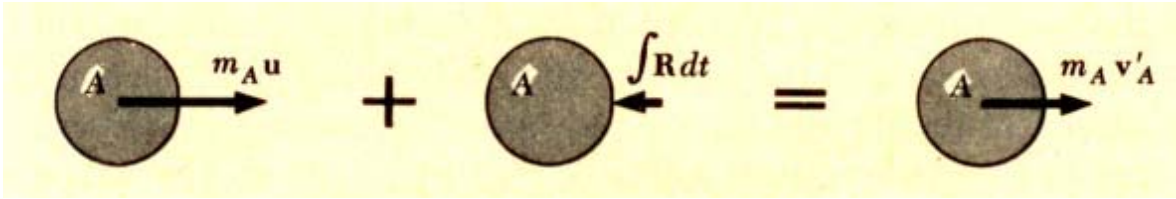
elde ederiz; buradaki integral şekil değiştirme süresi içinde alınacaktır. Şimdi A nın geri dönüş süresindeki hareketini göz önüne alıp bu sürede B nin A ya uyguladığı kuvveti $\vec{R}$ ile gösterirsek (Şekil 4.8b)

$$m_A u - \int R dt = m_A v'_A \quad (4.15)$$

yazabiliriz; bu defaki integral geri dönüş süresince alınacaktır.



(a) Şekil değiştirme süresi



(b) Geri dönüş süresi

Şekil 4.8

Genel olarak geri dönüş süresinde etkiyen $\vec{R}$ kuvveti, şekil değiştirme süresinde etkiyen $\vec{P}$ kuvvetinden farklıdır ve $\int \vec{R} dt$ impulsunun şiddeti $\vec{P}$ nin impulsu olan $\int \vec{P} dt$ nin şiddetinden küçüktür. Geri dönüş ve şekil değiştirme sürelerine ait impulsların oranına **çarpışma katsayısı** denir ve e ile gösterilir :

$$e = \frac{\int \vec{R} dt}{\int \vec{P} dt} \quad (4.16)$$

e katsayısının değeri daima 0 ile 1 arasındadır ve daha çok, çarpışan cisimlerin yapıldığı malzemeye bağlıdır. Bununla birlikte, bu katsayı, çarpışma hızı ve çarpışan cisimlerin şekil ve boyutları ile de büyük ölçüde değişir.

(4.14) ve (4.15) denklemlerinden impulsları çözüp (4.16) da yerine koyarsak

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u} \quad (4.17)$$

elde edilir. B için de benzer bir hesap sonucunda

$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B} \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.17) ve (4.18) deki oranlar birbirine eşit olduğundan bunlar, pay ve paydalarının toplamı ile elde edilen orana da eşit olurlar. O halde

$$e = \frac{(u - v'_A) + (v'_B - u)}{(v_A - u) + (u - v_B)} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

ve

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \quad (4.19)$$

elde edilir. $v'_B - v'_A$ iki cismin çarpıştıktan sonraki, $(v_A - v_B)$ ise çarpışmadan önceki bağıl hızlarını gösterdiğine göre (4.19) formülü, **iki cismin çarpıştıktan sonraki bağıl hızlarının, çarpışmadan önceki bağıl hızları ile çarpışma katsayısının çarpılmasından elde edildiğini** ifade etmektedir. Bu özellik, verilen iki malzemenin çarpışma katsayılarının deneysel olarak belirtilmesinde kullanılır.

İki cismin çarpıştıktan sonraki hızları artık (4.13) ve (4.19) denklemlerinden v'_A ve v'_B nün çözülmesiyle, yani momentumun korunum ilkesi ve çarpışma katsayısı kavramı yardımı ile elde edilir. Şunu hatırlatalım ki, (4.13) ve (4.19) denklemlerinin çıkartılmasında, B cisminin A nın sağında olduğu ve ilk anda her ikisinin de sağa doğru hareket ettiği farzedilmişti. Eğer başlangıçta B cismi sola doğru hareket ediyorsa, v_B skaleri negatif olarak alınmalıdır. Aynı işaret kabulü, çarpıştıktan sonraki hızlar için de yürürlüktedir: v'_A nün pozitif olması, A nın çarpıştıktan sonra sağa doğru hareket ettiğini, negatif olması ise sola doğru hareket ettiğini gösterir.

İki özel hal, üzerinde durulacak kadar ilgi çekicidir:

1. $e = 0$, tam plastik çarpışma. $e = 0$ olursa, (4.19) denkleminde $v'_B = v'_A$ olur. Geri dönüş süresi ortadan kalkar ve iki cisim çarpıştıktan sonra birbirine bitişik kalır. Sistemin momentumunun korunduğunu ifade eden (4.13) denkleminde $v'_B = v'_A = v'$ koyarak

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v' \quad (4.20)$$

elde ederiz. Buradan çarpıştıktan sonraki v' ortak hızı çözülebilir.

2. $e = 1$, tam elastik çarpışma. $e = 1$ olursa (4.19) denklemi

$$v'_B - v'_A = v_A - v_B \quad (4.21)$$

haline gelir; bu, çarpışmadan önce ve sonraki bağıl hızların eşit olduğunu ifade etmektedir. Her iki cismin şekil değiştirme ve geri dönüş sürelerinde kazandıkları impulslar birbirine eşittir. Cisimler çarpışmadan önce hangi bağıl hızla birbirlerine yaklaşıyorsa, çarpıştıktan sonra da aynı bağıl hızla birbirlerinden uzaklaşırlar. v'_A ve v'_B hızları, (4.13) ve (4.21) denklemlerini çözerek elde edilebilir.

Tam elastik çarpışma halinde sistemin momentumundan başka enerjisinin de korunduğuna dikkati çekmek yerinde olur. (4.13) ve (4.21) denklemleri şöyle yazılabilir:

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B)$$

$$v_A + v'_A = v_B + v'_B$$

bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa

$$m_A(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B(v'_B - v_B)(v_B + v'_B)$$

$$m_A v_A^2 - m_A (v'_A)^2 = m_B (v'_B)^2 - m_B v_B^2$$

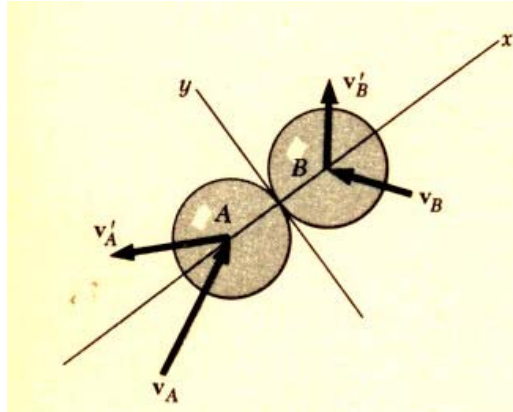
bulunur. Elde edilen denklemdeki terimleri düzenleyip $\frac{1}{2}$ ile çarparak

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A (v'_A)^2 + \frac{1}{2} m_B (v'_B)^2$$

elde edilir ki bu, sistemin kinetik enerjisinin korunduğunu ifade eder. Ancak unutulmamalıdır ki, **çarpışmanın genel halinde**, yani e nin 1 e eşit olmadığı halde, **sistemin mekanik enerjisi korunmaz**. Bu, her hangi verilen halde, çarpışmadan önce ve sonraki kinetik enerjileri karşılaştırarak gösterilebilir. Kaybolan kinetik enerji kısmen ısıya dönüşür, kısmen de çarpışan cisimlerde elastik dalgalar doğurmaya harcanır.

4.7. Eğik Merkezsel Çarpışma

Şimdi çarpışan cisimlerin hızlarının, çarpışma doğrultusunun üzerinde bulunmadığı hali göz önüne alalım (Şekil 4.9). Kısım 4.5 de işaret edildiği gibi bu halde çarpışmaya **eğik** denir. Cisimlerin çarpışmadan sonraki v'_A ve v'_B hızları gerek şiddet, gerek doğrultu bakımından bilinmediği için, bunların belirtilmesi dört bağımsız denklem kullanılmasını gerektirecektir.



Şekil 4.9

x eksenini çarpışma doğrultusunda, y eksenini ise değme yüzeylerinin ortak teğeti üzerinde seçelim. Cisimlerin tam **cilalı ve sürtünmesiz** olduğunu kabul edersek çarpışma sırasında cisimlere etkiyen impulsif kuvvetlerin, sadece x eksenini doğrultusundaki iç kuvvetler olduğunu görürüz. O halde şunları ifade edebiliriz:

1. A cisminin momentumunun y bileşeni korunur.

2. B cisminin momentumunun y bileşeni korunur.
3. Sistemin toplam momentumunun x bileşeni korunur.
4. İki cismin çarpıştıktan sonraki bağıl hızlarının x bileşeni, çarpışmadan önceki bağıl hızlarının x bileşenlerini, çarpışma katsayısı ile çarparak elde edilir.

Böylece dört bağımsız denklem elde edebiliriz; bunlardan A ve B nin çarpıştıktan sonraki hızları çözülür.

4.8.Enerji ve Momentumla İlgili Problemler

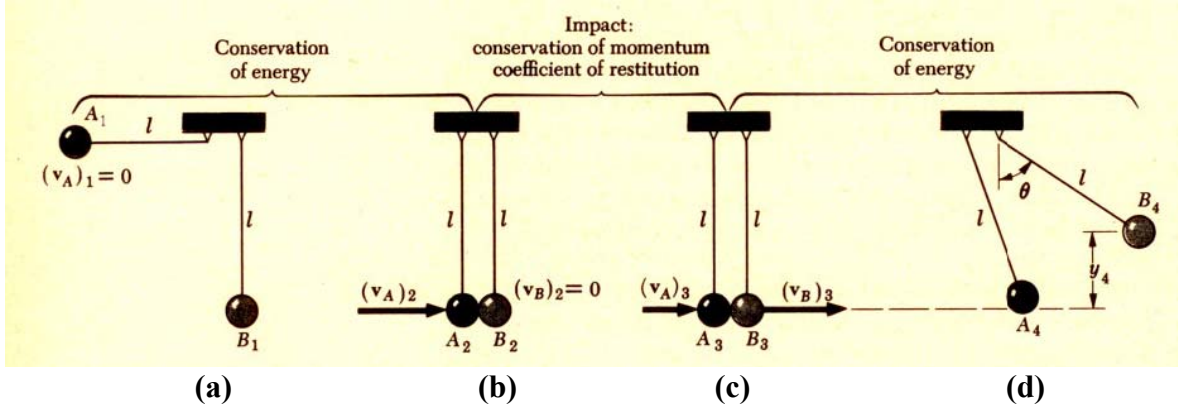
Kinetik problemlerin çözümü için artık elimizde üç farklı yöntem bulunmaktadır: $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ temel denklemini uygulamak, iş ve enerji yöntemi, impuls ve momentum yöntemi. Bu üç yöntemden maksimum yarar sağlayabilmek için, verilen problemin çözümüne en iyi uyan yöntemi seçmeyi bilmeliyiz. Ayrıca, bir problemin çeşitli kısımları, değişik yöntemleri kullanmayı gerekli kılıyorsa bu yolu izlemeye de hazırlıklı olmalıyız.

İş ve enerji yönteminin, bir çok durumlarda $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ denkleminin doğrudan doğruya uygulanmasından daha çabuk sonuca götürdüğünü daha önce söylemiştik. Ancak kısım 3.8 de işaret edildiği üzere, iş ve enerji yönteminin eksiklikleri vardı ve bu yöntemin bazen, $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ denklemini kullanarak tamamlanması gerekli oluyordu. Örneğin, ivmeyi veya normal reaksiyonları hesaplamak isteyince bu durum ortaya çıkıyordu.

İmpulsif kuvvetlerin bulunmadığı problemlerde, impuls ve momentum yöntemini kullanmak genellikle büyük bir üstünlük sağlamaz. Normal olarak $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ denklemi, aynı çabuklukla çözümü verir ve hele iş ve enerji yöntemi uygulanabiliyorsa çözüm, daha çabuk ve kolay olur. Bununla birlikte impuls ve momentum yöntemi, çarpışma problemlerinde izlenmesi mümkün tek yoldur. $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ nın doğrudan doğruya uygulanmasına dayanan bir çözüm çok uzun olur, iş ve enerji yöntemi ise kullanılamaz, çünkü çarpışmada (tam elastik olmadıkça) mekanik enerjide kayıp vardır.

Bir çok problemlerde, kısa bir çarpışma süresinde etkiyen impulsif kuvvetler dışında yalnız konservatif kuvvetler bulunur. Böyle problemlerin çözümü birkaç kısma ayrılabilir. Çarpışma süresi ile ilgili kısım impuls ve momentum yönteminin uygulanmasını ve çarpışma katsayısının kullanılmasını gerektirdiği halde, öteki kısımları iş ve enerji yöntemi yardımıyla çözülebilir. Bununla birlikte, eğer problemde bir normal kuvvetin hesabı isteniyorsa, $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ denkleminin kullanılması gerekli olacaktır.

Örnek olarak, ağırlığı $\vec{W}_A$ ve boyu l olan bir A sarkacı göz önüne alalım (Şekil 4.10a); top A konumundan harekete bırakılmış olsun. Sarkaç, düşey düzlemde serbestçe salınım yapıyor ve ağırlığı $\vec{W}_B$ olan aynı l boyunda hareketsiz bir B sarkacına vuruyor. Çarpışma sonucu (çarpışma katsayısı e), B sarkacının salınım yaparak yükseldiği θ açısının hesaplanması isteniyor.



Şekil 4.10

Problemin çözümü üç kısma bölünebilir:

1. A sarkacı A_1 den A_2 ye gidiyor. Sarkacın A_2 deki $(\vec{v}_A)_2$ hızını bulmakta enerjinin korunumu ilkesi uygulanabilir (Şekil 4.10b).
2. A sarkacı B sarkacına çarpıyor. Momentumun korunumu ilkesini ve e çarpışma katsayısını kullanarak, iki sarkacın çarpıştıktan sonraki $(\vec{v}_A)_3$ ve $(\vec{v}_B)_3$ hızlarını buluruz (Şekil 4.10c).
3. B sarkacı B_3 den B_4 e gidiyor. Enerjinin korunumu ilkesini uygulayarak B sarkacının ulaştığı maksimum y_4 yüksekliğini hesaplarız (Şekil 4.10d). Ondan sonra θ açısı, trigonometri yardımıyla bulunabilir.

Sarkaçların iplerindeki kuvvetlerin hesabı yapılacaksa şimdi anlatılan yöntemi, $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ yı kullanarak tamamlamanın gerekli olduğuna dikkati çekeriz.

4.9. Bir Maddesel Noktanın Açısal Momentumu

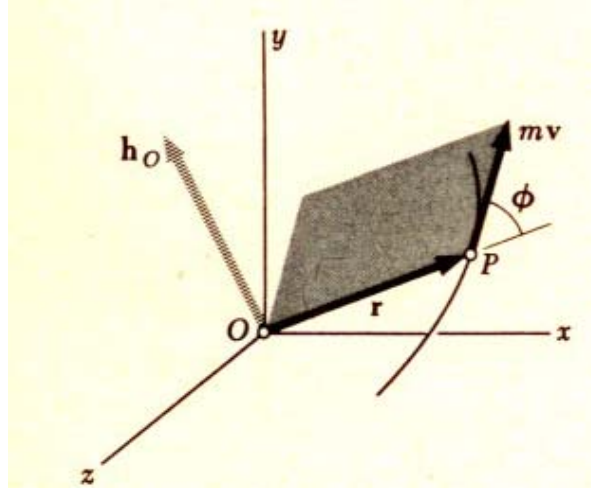
Bir $Oxyz$ Newton karşılaştırma takımına göre harekette bulunan m kütleli bir P maddesel noktası göz önüne alalım. Kısım 4.1 de gördüğümüz üzere, maddesel noktanın herhangi bir andaki momentumu, noktanın $\vec{v}$ hızı ile m kütlelerinin çarpımından elde edilen $m\vec{v}$ vektörü olarak tanımlanmaktadır. $m\vec{v}$ vektörünün O ya göre momentine maddesel noktanın, o anda O ya göre, **momentumunun momenti** veya **açısal momentumu** adı verilir ve $\vec{h}_o$ ile gösterilir. Bir vektörün momentinin tanımını hatırlayarak ve $\vec{P}$ nin yer vektörünü $\vec{r}$ ile göstererek

$$\vec{h}_o = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (4.22)$$

yazarız ve $\vec{h}_o$ vektörünün, $\vec{r}$ ile $m\vec{v}$ nin bulunduğu düzleme dik olduğunu görürüz; şiddeti ise, $\vec{r}$ ile $m\vec{v}$ arasındaki açı ϕ olmak üzere (Şekil 4.11)

$$h_o = mv \sin \phi r \quad (4.23)$$

olur. $\vec{h}_o$ nın yönü, $m\vec{v}$ nin yönünden sağ el kuralını uygulayarak bulunabilir.



Şekil 4.11

$\vec{r}$ ve $m\vec{v}$ vektörlerinin bileşenlerine ayrıldıktan sonra vektörel çarpımı

$$\vec{h}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \quad (4.24)$$

(4.24) determinantına eşittir. (4.24) determinantı açılarak $\vec{h}_o$ nın bileşenleri elde edilebilir; bu bileşenler aynı zamanda $m\vec{v}$ doğrusal momentumunun, koordinat eksenlerine göre momentlerini gösterir:

$$\begin{aligned} h_x &= m(yv_z - zv_y) \\ h_y &= m(zv_x - xv_z) \\ h_z &= m(xv_y - yv_x) \end{aligned} \quad (4.25)$$

xy düzleminde hareket eden bir maddesel nokta için $z = v_z = 0$ olur ve h_x, h_y bileşenleri sıfır eder. Şu halde açısal momentum xy düzlemine dik olur; o zaman bunun değeri

$$h_o = h_z = m(xv_y - yv_x) \quad (4.26)$$

şeklinde bir skalerle tam olarak tanımlanmış olur; işareti de maddesel noktanın hareketinin O dan görünüşüne göre pozitif veya negatif olur.

Şimdi uzayda hareket eden bir maddesel noktanın $\vec{h}_o$ açısal momentumunun, t ye göre türevini hesaplayacağız. (4.22) nin iki tarafının türevini alarak ve vektörel çarpımın türevini almaya ait kuralı (kıs 1.2) hatırlayarak

$$\frac{d\vec{h}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}$$

yazarız. $\vec{v}$ ve $m\vec{v}$ vektörleri aynı doğru üzerinde bulunduklarından elde edilen ifadenin ilk terimi sıfırdır; Newton' un ikinci kanunu gereğince de $m\vec{a}$, maddesel noktaya etkiyen $\vec{F}$ kuvvetine eşittir. Böylece, sağ taraf $\vec{F}$ nin O ya göre $\vec{M}_o$ momenti haline gelir:

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{h}_o}{dt} \quad (4.27)$$

(4.27) denklemini şunu ifade eder: **Bir maddesel noktaya etkiyen $\vec{F}$ kuvvetinin O ya göre momenti, maddesel noktanın O ya göre açısal momentumunun (momentumunun momentinin) değişim hızına eşittir.**

4.10. Bir Maddesel Noktalar Sisteminin Açısal Momentumu

Bir maddesel noktalar sisteminin O ya göre $\vec{h}_o$ açısal momentumu, sistemin çeşitli maddesel noktalarının momentumlarının O ya göre momentlerinin toplamı olarak tanımlanır; o halde:

$$\vec{h}_o = \sum (\vec{r} \times m\vec{v}) \quad (4.28)$$

(4.28) in her iki tarafının türevini alarak ve $\vec{v}$ ile $m\vec{v}$ nin aynı doğru üzerinde olduğunu düşünerek

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{h}_o}{dt} &= \sum \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right) + \sum \left(\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \\ &= \sum (\vec{v} \times m\vec{v}) + \sum (\vec{r} \times m\vec{a}) = \sum (\vec{r} \times m\vec{a}) \end{aligned}$$

bulunur. Oysa Newton' un ikinci kanununa göre $\vec{F} = m\vec{a}$ dır; o halde elde edilen ifade, sistemin çeşitli maddesel noktalarına etkiyen kuvvetlerin O ya göre momentlerinin toplamını göstermektedir. İç kuvvetler, aynı tesir çizgisi üzerinde, eşit ve ters yönde ikişer kuvvet olarak ortaya çıktığından, bunların momentlerinin toplamı sıfır olur ve sadece dış kuvvetlerin momentlerinin toplamını göz önüne almamız yeterlidir. Şu halde:

$$\sum (M_o)_{dış} = \frac{d\vec{h}_o}{dt} \quad (4.29)$$

O başlangıç noktası keyfi olarak seçilebileceği halde $Oxyz$ takımının, bir Newton karşılaştırma takımı olduğuna dikkat edilmelidir.

Kütle Merkezine Göre Açısal Momentum. Bazı uygulamalarda (örneğin, bir rijit cismin hareketinin çözümlenmesinde) sistemdeki bir maddesel noktanın hareketini, kütle

merkezinden geçen ve $Oxyz$ Newton karşılaştırma takımına göre ötelenme yapan $Gx'y'z'$ takımında (Şekil 4.12) göz önüne almak daha kolay olur. Böyle bir karşılaştırma takımı, genellikle bir Newton takımı olmadığı halde, $Oxyz$ takımı yerine $Gx'y'z'$ takımını koyunca (4.29) bağıntısının yine sağlandığını göreceğiz.

Hareketli $Gx'y'z'$ karşılaştırma takımına göre $\vec{P}$ maddesel noktasının yer vektörünü $\vec{r}'$ ile, hızını $\vec{v}'$ ile gösterelim; maddesel noktalar sisteminin, **G kütle merkezine göre $\vec{h}'_G$ açısal momentumunu** şöyle tanımlarız:

$$\vec{h}'_G = \sum (\vec{r}' \times m \vec{v}') \quad (4.30)$$

Şimdi (4.30) un iki tarafının türevini alalım; bu işlem (4.28) de yapılabildiğinden hemen

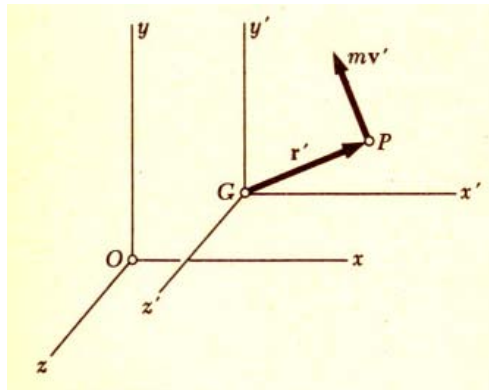
$$\frac{d\vec{h}'_G}{dt} = \sum (\vec{r}' \times m \vec{a}') \quad (4.31)$$

yazabiliriz; burada P maddesel noktasının hareketli karşılaştırma takımına göre ivmesi $\vec{a}'$ ile gösterilmektedir. $Oxyz$ takımına göre P ve G nin bağıl ivmelerini sırasıyla $\vec{a}$ ve $\vec{\bar{a}}$ ile göstererek (4.31) de $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\bar{a}}$ koyarsak

$$\frac{d\vec{h}'_G}{dt} = \sum (\vec{r}' \times m \vec{a}) - (\sum m \vec{r}') \times \vec{\bar{a}}$$

yazılır. Oysa (2.9) gereğince $\sum m \vec{r}'$ toplamı $(\sum m) \vec{\bar{r}}'$ ye ve dolayısıyla sıfıra eşittir, çünkü G nin $Gx'y'z'$ takımına göre $\vec{\bar{r}}'$ yer vektörünün sıfır olduğu açıktır. Öte yandan, P nin bir Newton takımına göre ivmesi $\vec{a}$ ile gösterildiğinden $m \vec{a}$ yerine $\vec{F}$ koyabiliriz; o halde elde edilen ifade, sistemin çeşitli maddesel noktalarına etkiyen kuvvetlerin G ye göre momentlerinin toplamına eşittir. İç kuvvetlerin birbirini götürdüğünü hatırlayarak

$$\sum (M_G)_{dış} = \frac{d\vec{h}'_G}{dt} \quad (4.32)$$



Şekil 4.12

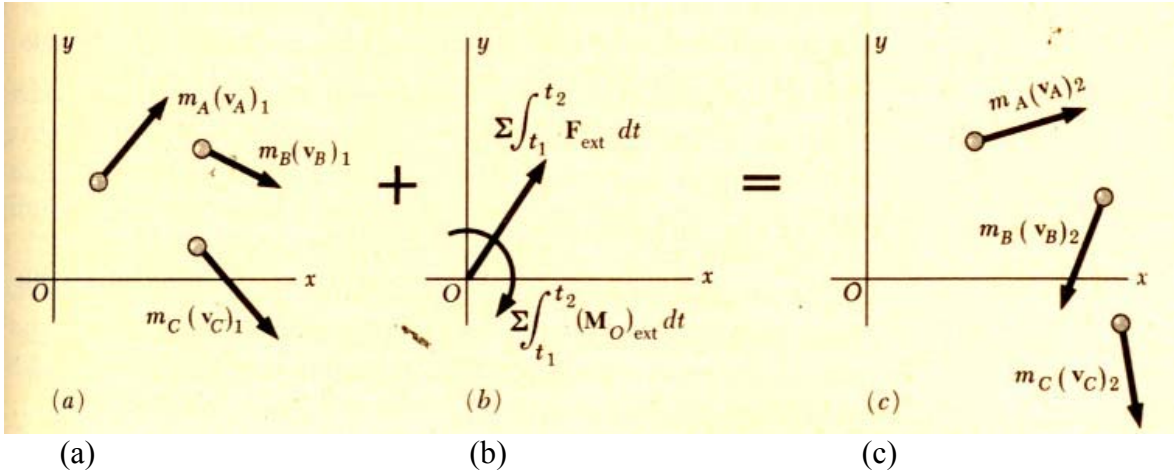
4.10. Genelleştirilmiş İmpuls ve Momentum İlkesi

$\vec{F}$ kuvvetinin belirli bir zaman aralığındaki doğrusal impulsunu Kısım 4.1 de tanımlamıştık. Şimdi bir $\vec{F}$ kuvvetinin, t_1 den t_2 ye kadar olan bir zaman aralığında, O ya göre **açısıl impulsunu**, $\vec{F}$ kuvvetinin O ya göre momentumunun t_1 , t_2 aralığındaki integrali olarak tanımlayacağız:

$$Aç \ Imp_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{r} \times \vec{F}) dt \quad (4.33)$$

Biraz sonra göreceğimiz üzere bu yeni kavram bize, bir maddesel noktalar sistemi için daha genel bir impuls ve momentum ilkesi ifade etmek olanağını sağlayacaktır.

Bir maddesel noktalar sistemi ve çeşitli maddesel noktalara etkiyen **dış kuvvetleri** göz önüne alalım. Üç ayrı şekil çizeceğiz (Şekil 4.13). Birinci ve üçüncü şekiller, sırasıyla maddesel noktaların t_1 ve t_2 zamanlarındaki momentumlarını gösterecektir. İkinci şekil, dış kuvvetlerin doğrusal impulslarının toplamını gösteren O ya bağlı bir vektör ile momenti, dış kuvvetlerin O ya göre açısıl impulslarının toplamına eşit olan bir kuvvet çiftini gösterecektir. Kolaylığı sağlamak için Şekil 4.13 deki maddesel noktalar şekil düzleminde hareket ediyor farzedilmiş ise de yapacağımız inceleme, noktaların uzayda hareket etmesi halinde de geçerli olur. Kısım 4.2 deki (4.7) denklemini hatırlayarak



Şekil 4.13

$$\sum m \vec{v}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{dış} dt = \sum m \vec{v}_2 \quad (4.7)$$

yazarız. Şimdi Kısım 4.10 da çıkarılmış olan (4.29) denklemine dönelim ve her iki tarafını t_1 den t_2 ye kadar olan zaman aralığı üzerinde integre edelim:

$$(\vec{h}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} (\vec{M}_O)_{dış} dt = (\vec{h}_O)_2 \quad (4.34)$$

(4.7) denklemi, Şekil 4.13 ün c kısmında gösterilen vektörlerin, *a* ve *b* kısmında gösterilen vektörlerin toplamına eşit olduğunu gösterir. (4.34) denklemi ise, benzer şekilde, Şekil 4.13 ün *a* ve *b* kısmındaki vektörlerin *O* ya göre momentlerinin toplamının, *c* kısmındaki vektörlerin momentlerinin toplamına eşit olduğunu gösterir. O halde, (4.7) ve (4.34) denklemlerinin ikisi birlikte, şeklin *a* ile *b* kısımlarındaki vektörlerin *c* kısmındaki vektörlerle, eşdeğer bir vektör sistemi teşkil ettiklerini ifade eder:

$$\text{Momentum Sist}_1 + \text{Dış Imp Sist}_{1 \rightarrow 2} = \text{Momentum Sist}_2 \quad (4.35)$$

Bir maddesel noktalar sistemi için daha genel olan bu ilke, özellikle rijit cisimlerin düzlemsel hareketinin incelenmesinde çok yararlı olacaktır. Genel olarak, bu ilkenin ifade edilebilmesi için altı skaler denklem (üç izdüşüm denklemi ile üç moment denklemi) gerekli olduğuna dikkat edilmelidir. Bununla birlikte, maddesel noktalar sisteminin düzlemsel hareketi halinde, sadece üç denklem gerekli olur. Bunların ilk ikisi, Şekil 4.13 de gösterilen vektörlerin *x* ve *y* bileşenlerini göz önüne alarak, üçüncüsü ise vektörlerin *O* ya göre momentlerini toplayarak elde edilir.

4.12. Açısal Momentumun Korunumu

Kısım 4.9 da gördük ki, bir maddesel noktanın bir *O* noktasına göre açısal momentumunun değişim hızı, maddesel noktaya etkiyen $\vec{F}$ kuvvetinin *O* ya göre momenti $\vec{M}_O$ a eşittir. *t* nin her değeri için $\vec{M}_O$ sıfır ise (4.27) denklemi her *t* için

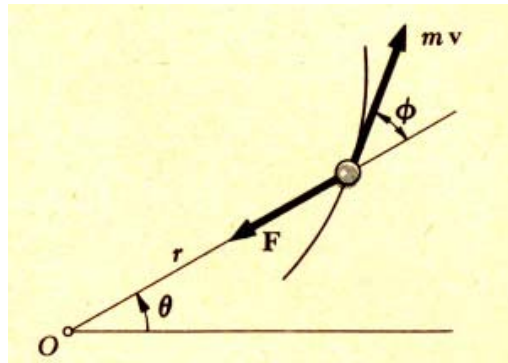
$$\frac{d\vec{h}_O}{dt} = 0$$

verir ve *t* ye göre integre edilerek

$$\vec{h}_O = \text{sabit} \quad (4.36)$$

elde edilir. O halde, bir maddesel noktaya etkiyen $\vec{F}$ kuvvetinin *O* ya göre momenti, *t* nin her değeri için sıfır ise, **maddesel noktanın *O* ya göre açısal momentumu korunur.**

Bir maddesel noktaya etkiyen kuvvetlerin bileşkesi sıfır olursa, o maddesel noktanın, sabit bir *O* noktasına göre açısal momentumunun korunduğu açıktır. Fakat dengede olmayan bir $\vec{F}$ kuvvetinin etkisi altında bulunan bir maddesel noktanın açısal momentumu, $\vec{F}$ kuvvetinin, **tesir çizgisi sabit bir *O* noktasından geçen bir merkezsel kuvvet olması halinde** de korunur (Şekil 4.14).



Şekil 4.14

$\vec{h}_o$ açısal momentumunun (4.22) deki tanımını hatırlayarak, merkezselsel bir kuvvetin etkisinde hareket eden bir maddesel nokta için şunu yazabiliriz:

$$\vec{h}_o = \vec{r} \times m \vec{v} = \text{sabit}$$

Bu bağıntıdan şu sonuç çıkar: Maddesel noktanın $\vec{r}$ yer vektörü, sabit $\vec{h}_o$ vektörüne dik olmak zorundadır. O halde merkezselsel bir kuvvet etkisinde olan bir maddesel nokta $\vec{h}_o$ a dik olan sabit bir düzlemde hareket eder. $\vec{h}_o$ vektörü ile bu sabit düzlem, maddesel noktanın başlangıçtaki $\vec{r}_o$ yer vektörü ve başlangıçtaki $\vec{v}_o$ hızı yardımıyla tanımlanır. Kolaylığı sağlamak için, aşağıdaki çözümlemede şekil düzleminin sabit hareket düzlemi ile çakıştığını farz edeceğiz(Şekil 4.14).

Yarıçap vektörü ile maddesel noktanın yörüngesinin teğeti arasındaki açıyı ϕ ile göstererek, $\vec{h}_o$ açısal momentumunun şiddetinin sabit olduğunu yazalım:

$$h_o = r(mv \sin \phi) = \text{sabit} \quad (4.37)$$

$v \sin \phi$ nin, hızın radyale dik v_θ bileşenini gösterdiğine ve onun da $r d\theta/dt$ ye eşit olduğuna (Kısım 1.6) dikkat ederek

$$h_o = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{sabit} \quad (4.38)$$

yazabiliriz. (4.38) ve (2.19) denklemlerini karşılaştırarak

$$h_o = mh = 2m \frac{dA}{dt}$$

olduğunu görürüz; buradaki h, kısım 2.6 da tanımlanan sabittir. dA/dt ise maddesel noktanın alan hızıdır. O halde, bir maddesel noktanın düzlemde sabit alan hızı ile hareket ettiğini söylemek, maddesel noktanın açısal momentumunun korunduğunu söylemekle eşdeğerdir.

IMPULS - MOMENTUM

Problem 1: Kütle 2 kg olan bir cisim $\vec{F} = 8t\vec{i} + (6t + 3\sqrt{t})\vec{j} - (16 + 3t^2)\vec{k}$ N luk bir kuvvetin ve kendi ağırlığının etkisindedir. Cisim ilk hızı $\vec{V}_1 = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 10\vec{k}$ m/s'ye olduğuna göre 5. saniyedeki hızın büyüklüğü ne olur?

Çözüm: $m\vec{V}_1 + \sum \text{imp}_{1 \rightarrow 2} = m\vec{V}_2$

$$2(6\vec{i} + 3\vec{j} - 10\vec{k}) + \sum \text{imp}_{1 \rightarrow 2} = m\vec{V}_2$$

$$\sum \text{imp}_{1 \rightarrow 2} = \int_0^5 [8t\vec{i} + (6t + 3\sqrt{t})\vec{j} - (16 + 3t^2)\vec{k}] dt - 2 \cdot 9,81\vec{j} dt$$

$$\sum \text{imp}_{1 \rightarrow 2} = \left[4t^2\vec{i} + (3t^2 + 2t^{3/2})\vec{j} - (16t + t^3)\vec{k} - 2 \cdot 9,81t\vec{j} \right] \Big|_0^5$$

$$\sum \text{imp}_{1 \rightarrow 2} = 100\vec{i} - 0,739\vec{j} - 205\vec{k}$$

$$\underbrace{(12\vec{i} + 6\vec{j} - 20\vec{k})}_{m\vec{V}_1} + \underbrace{(100\vec{i} - 0,739\vec{j} - 205\vec{k})}_{\sum \text{imp}_{1 \rightarrow 2}} = 2 \cdot \vec{V}_2$$

$$\vec{V}_2 = 56\vec{i} + 2,631\vec{j} - 112,5\vec{k} \text{ m/s}$$

Problem 2: A cisminin kütlesi 5 kg olup hızı $\vec{V}_0 = 5\vec{i} + 6\vec{j}$ m/s'dir. A cismi bu hızla yol alırken kütlesi 2 kg olan bir B cismine çarpmaktadır. Çarpımdan sonra A cisminin hızı $\vec{V} = 8\vec{i} - 1,5\vec{j} + 2\vec{k}$ m/s'dir.

(a) Çarpılma zamanı 10 milisaniye olduğuna göre kütlesi 5 kg olan cisme çarpılma sırasında etkileyen ortalama kuvvet ne olur?

(b) Kütlesi 2 kg olan cismin momentumundaki değişim nedir?

Çözüm: $\vec{I}_A = 5(8\vec{i} - 1,5\vec{j} + 2\vec{k}) - 5(5\vec{i} + 6\vec{j}) = 15\vec{i} - 37,5\vec{j} + 10\vec{k} \text{ kg m/s}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt \cong (\vec{F}_{\text{ort}})_A \Delta t = \vec{I}_A, \Delta t = 10 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 10^{-2} \text{ s}$$

$$(\vec{F}_{\text{ort}})_A = \vec{I}_A / \Delta t \cong 1500\vec{i} - 3750\vec{j} + 1000\vec{k} \text{ kg m/s}^2 (\text{N})$$

$$\Delta m\vec{V}_B = \vec{I}_B = -\vec{I}_A$$

Problem 3: Kütle 5 kg olan bir A cismine etkileyen toplam kuvvet $\vec{F} = 4\vec{j} + 2t\vec{k}$ N olup, cisim bu kuvvet etkisi altında 10 sn'lik bir süre zarfında kalacaktır. Cisim ilk hızı $\vec{V}_0 = 4\vec{i} - 8\vec{j} - 20\vec{k}$ m/s'dir.

(a) A cisminin 6. saniyedeki hızını bulunuz.

(b) 10. sn'den sonra cisme sadece 49,05 N büyüklüğünde bir kuvvet etki etmektedir. A cisim 25. saniyede kütlesi 2 kg olan bir B cismini

ne çarpıyor. B cisminin çarpımdan önceki hızı $\vec{V}_B = -5\vec{i}$ m/s,

B cisminin çarpımdan sonraki hızı $\vec{V}_B' = 3\vec{i}$ m/s'ye olmaktadır.

A cisminin çarpımdan sonraki hızını bulunuz.

(c) Doku m düzlemi y eksenine paralel olduğuna göre çarpılma katsayısını hesaplayınız.

(d) Çarpılma nedeniyle kinetik enerji kaybını bulunuz.

Çözüm : (a) $\int_0^6 (4\vec{j} + 2t\vec{k}) dt = 5 [\vec{V}_6 - 4\vec{i} + 8\vec{j} + 20\vec{k}]$

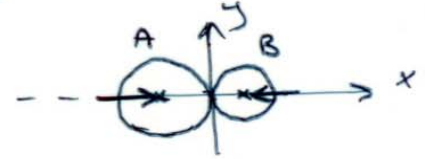
$4t \Big|_0^6 \vec{j} + t^2 \Big|_0^6 \vec{k} = 5\vec{V}_6 - 20\vec{i} + 40\vec{j} + 100\vec{k} \rightarrow \vec{V}_6 = 4\vec{i} - 3,2\vec{j} - 12,8\vec{k} \text{ m/san}$

(b) $4t \Big|_0^{10} \vec{j} + t^2 \Big|_0^{10} \vec{k} = 5\vec{V}_{10} - 20\vec{i} + 40\vec{j} + 100\vec{k} \rightarrow 5\vec{V}_{10} = 20\vec{i} \rightarrow \vec{V}_{10} = 4\vec{i} \text{ m/san}$

$\vec{V}_{10} = \vec{V}_{25} = \vec{V}_A = 4\vec{i} \text{ m/san}$

$5(4\vec{i}) + 2(-5\vec{i}) = 5\vec{V}_A' + 2(3\vec{i}) \rightarrow \vec{V}_A' = 0,8\vec{i} \text{ m/san}$

(c) $e = \frac{V_A' - V_B'}{V_B - V_A} = \frac{0,8 - 3}{-5 - 4} = 0,244$



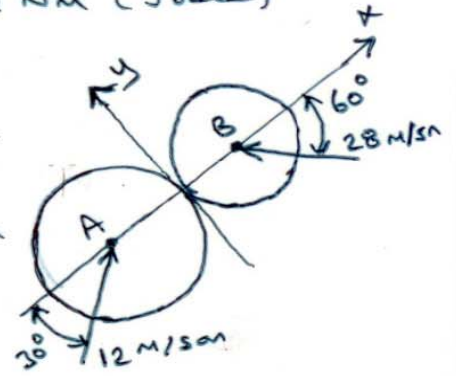
(d) Kinetik enerji kaybı =

$= \frac{1}{2} M_A V_A^2 + \frac{1}{2} M_B V_B^2 - \frac{1}{2} M_A V_A'^2 - \frac{1}{2} M_B V_B'^2 =$

$= \frac{1}{2} 5 \cdot 4^2 + \frac{1}{2} 2 \cdot 5^2 - \left[\frac{1}{2} 5 \cdot 0,8^2 + \frac{1}{2} 2 \cdot 3^2 \right] = 54,4 \text{ Nm (Joule)}$

Problem 4 : Kütleleri sırasıyla 4 kg ve 2 kg olan A ve B bilyaları şekilde gösterilen hızlarla çarpışmıştır. Esneklik katsayısı $e = 0,8$ olarak verildiğine göre bilyaların çarpışmadan sonraki hızlarını bulunuz. Çarpışma sebebiyle kinetik enerji kaybı ne olur?

Not : y doğrultusunda sürtünme yoktur.



Çözüm : $\vec{V}_A = 12 \cdot \cos 30^\circ \vec{i} + 12 \cdot \sin 30^\circ \vec{j} = 10,392\vec{i} + 6\vec{j} \text{ m/san}$

$\vec{V}_B = -28 \cdot \cos 60^\circ \vec{i} + 28 \cdot \sin 60^\circ \vec{j} = -14\vec{i} + 24,249\vec{j} \text{ m/san}$

Sürtünme olmadığından çarpışmadan sonra y doğrultusundaki hızlar değişmez. Yani y doğrultusunda her bir cisim için momentumlar korunur. X doğrultusunda ise sistemden man. korunur.

$e = 0,8 = \frac{V_{Ax}' - V_{Bx}'}{V_{Bx} - V_{Ax}} = \frac{V_{Ax}' - V_{Bx}'}{-14 - 10,392}$

$M_A V_{Ax} + M_B V_{Bx} = M_A V_{Ax}' + M_B V_{Bx}'$

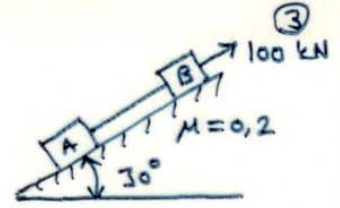
$4 \cdot 10,392 + 2(-14) = 4 \cdot V_{Ax}' + 2 \cdot V_{Bx}'$

$\vec{V}_A' = -4,243\vec{i} + 6\vec{j} \text{ m/san} ; \vec{V}_B' = 15,271\vec{i} + 24,249\vec{j} \text{ m/san}$

Kinetik enerji kaybı $= \frac{1}{2} 4 (10,392)^2 + \frac{1}{2} 2 \cdot (14)^2 -$

$- \left[\frac{1}{2} 4 (4,243)^2 + \frac{1}{2} 2 (15,271)^2 \right] = 142,778 \text{ Nm (Joule)}$

Problem 5 : Ağırlıkları 8 kN ve 14 kN olan A ve B cisimleri 100 kN luk bir kuvvetle çekilmektedir. İlk hızsız harekete başladığına göre 15. saniyede cisimlerin hızlarını, tanelerinin ve kabloda oluşan kuvveti hesaplayınız.



Gözlem : $\int_0^{15} \Sigma F \cdot dt = M_A \Delta V_A + M_B \Delta V_B$

Kablo uzamassız olduğundan A ve B cisimlerinin hızları ve tanelerinin birbiriyle eşittir.

$$(100 \cdot 10^3 - 22 \cdot 10^3 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,2 - 22 \cdot 10^3 \cdot \sin 30^\circ) \cdot 15 = \frac{(8+14) \cdot 10^3}{9,81} (V_2 - 0)$$

$$V_2 = 569,8 \text{ m/san}$$

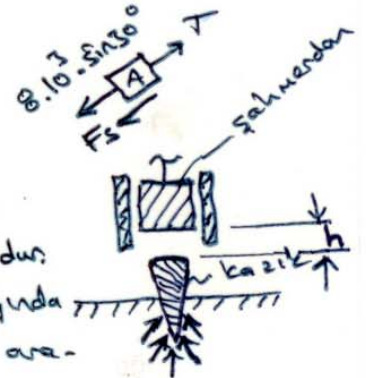
$$\Sigma F = \Sigma m \cdot a \rightarrow 85189,33 = \frac{(8+14) \cdot 10^3}{9,81} \cdot a = \frac{22 \cdot 10^3}{9,81} \cdot a \rightarrow a = 37,98 \text{ m/san}^2$$

$$T - F_s - W_A \cdot \sin 30^\circ = M_A \cdot a$$

$$T = 8 \cdot 10^3 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,2 + 8 \cdot 10^3 \cdot \sin 30^\circ + \frac{8 \cdot 10^3}{9,81} \cdot 37,98$$

$$T = 36358,118 \text{ N}$$

Problem 6 : Ağırlığı 3 kN olan bir kazıya yere çekilmesi sırasında zeminin ortalama direnci 9 kN'dur. 9 kN luk şahmerdan 60 cm yükseklikten bırakıldığında kazık 25 cm çekilmektedir. Şahmerdan ile kazık arasındaki çarpışma katsayısını (e) bulunuz.



Gözlem : I. $\hat{T}_2$ - enerji : $(W_{1 \rightarrow 2})_0 = \Delta E_k + \Delta E_p$

$$0 = \frac{1}{2} \frac{9 \cdot 10^3}{10} \cdot V_s^2 - 9 \cdot 10^3 \cdot 0,6 \rightarrow V_s = 3,464 \text{ m/san}$$

II. $\hat{T}_2$ - enerji : $(W_{1 \rightarrow 2})_0 = \Delta E_k + \Delta E_p$

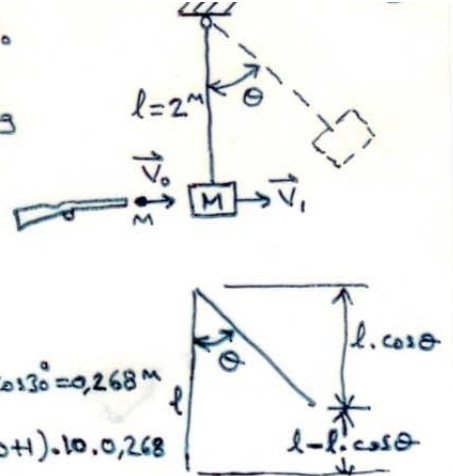
$$-3000 \cdot 0,25 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^3}{10} \cdot V_k'^2 - 3000 \cdot (0,25) \rightarrow V_k' = 3,162 \text{ m/san}$$

III. $\hat{T}_{mp}$ - momentum : $M_s \cdot V_s + M_k \cdot V_k = M_s \cdot V_s' + M_k \cdot V_k'$

$$900 \cdot 3,464 + 300 \cdot 0 = 900 \cdot V_s' + 300 \cdot 3,162 \rightarrow V_s' = 2,41 \text{ m/san}$$

$$e = \frac{V_s' - V_k'}{V_k - V_s} = \frac{2,41 - 3,162}{0 - 3,464} = 0,217$$

Problem 7: Kütlesi 1 kg olan mermi bir $\vec{V}_0$ hızıyla fırlatılmaktadır. Uzunluğu $l=2\text{ m}$ olan bir sarkacın ucuna bağlanmış kütlesi $M=10\text{ kg}$ olan bir ahşap çarpma ve beraberinde $\vec{V}_1$ ilk hızıyla şekilde gösterilen $\theta=30^\circ$ ile konuma ulaşmıştır. (Bu durumda hız sıfırdır). $\vec{V}_0$ ve $\vec{V}_1$ hızlarını bulunuz. Çarpma tam elastik olduğundan $e=0$ dir.



Cözüm: I. aşama: İE-er. $l-l\cos\theta=2-2\cos30^\circ=0,268\text{ m}$

$$(W_{1\rightarrow2})_0 = \Delta E_k + \Delta E_p \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} \cdot (10+1) V_1^2 + (10+1) \cdot 10 \cdot 0,268$$

$$V_1 = 2,315 \text{ m/san}$$

II. aşama: İmp-mom: $I_{mp1\rightarrow2} = M(V_1 - V_0) + M(V_1 - 0)$

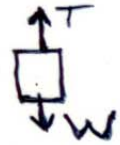
$$0 = -M V_0 + (M+M) V_1 \rightarrow M V_0 = (M+M) V_1 \rightarrow 1 \cdot V_0 = 11 \cdot 2,315 \Rightarrow V_0 =$$

$$V_0 = 25,464 \text{ m/san.}$$

III. aşama: Eğer çarpımdan hemen sonra ipteki kuvveti hesaplamak istersek $\Sigma F_n = \Sigma m \cdot a_n$ bağıntısı kullanılır:

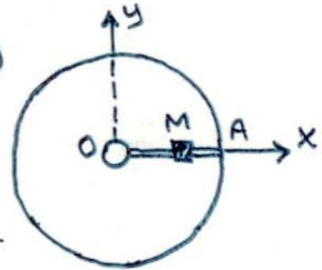
$$\Sigma F_n = T - W = \Sigma m \cdot a_n$$

$$T - (10+1) \cdot 10 = 11 \cdot \frac{2,315^2}{2} \rightarrow T = 139,48 \text{ N}$$

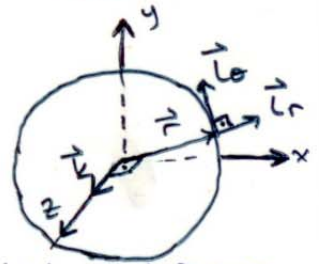


Problem 8: Şekilde gösterilen bir M kütlesi ($M=3\text{ kg}$)

O noktası etrafında $0,6 \text{ rad/san}$ ile bir açısal hızla serbestçe (sürtünme olmaksızın) dönmektedir. M kütlesi bir OA kolu üzerinde, serbestçe O noktasına yaklaşabilir veya uzaklaşabilir durumdadır. Başlangıçta M kütlesi



O noktasından $2,5 \text{ m}$ uzaklıktadır. Hareket bu şekilde devam ederken, M kütlesine radial bir kuvvet (O noktasına doğru) etkililmekte ve M kütlesi O noktasına doğru 2 m/san ile sabit bir hızla yaklaştırılmaktadır. M kütlesinin açısal hızı $2,4 \text{ rad/san}$ olduğunda O noktasından ne kadar uzaklıkta olduğunu bulunuz. 2 m/san hızla O ya yaklaşıncaya kadar açısal dönüşü hesaplayınız.



Cözüm: (a) $\vec{M}_O = \vec{h}_O \rightarrow 0 = \vec{r} \times (-F \vec{e}_r) = \vec{h}_O \rightarrow \vec{h}_O = \text{sabit}$

$$\vec{r}_1 \times M \vec{V}_1 = \vec{r}_2 \times M \vec{V}_2 \rightarrow \text{açısal momentumun korunumu.}$$

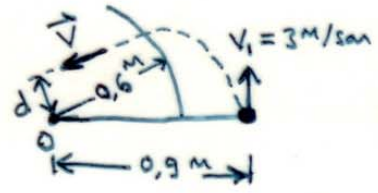
$$2,5 \vec{e}_r \times 3 (2,5) (0,6) \vec{e}_t = r_2 \vec{e}_r \times 3 (r_2) (2,4) \vec{e}_t \rightarrow 11,25 \vec{e} = 7,2 r_2^2 \vec{e} \rightarrow r_2 = 1,25 \text{ m}$$

(b) $\vec{h}_O = \frac{d}{dt} [\vec{r} \vec{e}_r \times 3 r \omega \vec{e}_t] = \frac{d}{dt} [3 r^2 \omega \vec{e}] = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (3 r^2 \omega) = 0 = 6 r \dot{r} \omega + 3 r^2 \dot{\omega}$

$$\dot{\omega} = -\frac{6 r \dot{r} \omega}{3 r^2} = -\frac{2 \dot{r} \omega}{r} ; r = r_2 \text{ için } \dot{\omega} = -\frac{2 (-2) (2,4)}{1,25} = 7,68 \text{ rad/san}^2 \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = -2 \text{ m/san}$$

(5)

Problem 9: 0,3 N ağırlığında bir top yay kat-sayısı $k = 20 \text{ N/m}$ ve uzanmış boyu 60 cm olan elastik bir ip yardımıyla sabit bir O noktasına bağlanmıştır. Top sürtünmesiz yatay bir düzleminde kaymaktadır. Şekilde gösterilen konumda ipin



boyu 90 cm dir ve topun hızı şekilde gösterilen yönde 3 m/s dir.

a) İp gevşek hale geldikten sonra topun hızını bulunuz.

b) Topun O'ya en yakın olduğu andaki d uzaklığını hesaplayınız.

Gözüm: a) $(W_{1 \rightarrow 2})_0 = \Delta E_k + \Delta E_p$

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,3}{10} (V_2^2 - 3^2) - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (0,3)^2 \rightarrow V_2 = 8,31 \text{ m/s}$$

b) Açısal momentum korunumundan

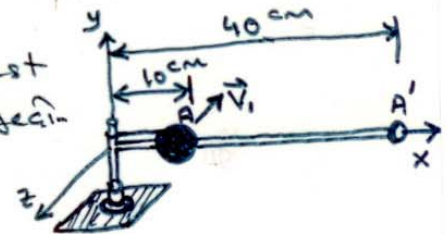
$$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \vec{M}_0 \quad \text{O'ya göre ip kuvvetinin momenti sıfırdır.}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_0 \cdot dt = \Delta \vec{h}_0 \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_0$$

$$d \cdot \frac{0,3}{10} \cdot 8,31 - 0,9 \cdot \frac{0,3}{10} \cdot 3 = 0 \rightarrow d = 0,324 \text{ m}$$

$$r_2 \cdot m \cdot V_2 - r_1 \cdot m \cdot V_1 = 0$$

Problem 10: Düşey bir eksen etrafında serbest olarak döner yatay bir cubuğa ağır bir top geçirilmiştir. Şekilde gösterilen konumda topun hızı 2 m/s dir ve top eksene bağlı bir



ip yardımıyla tutulmaktadır. İp aniden kesilirse ve cubuk dönerken top A' konumuna gelir. Cubuğun kütlesini ihmal ederek

a) A' konumunda topun hızını,

b) sistemin kinetik enerjisindeki değişimi bulunuz.

Gözüm:

a) Açısal momentum korunmaktadır $mV_2 \cdot 0,4 - m \cdot 2 \cdot 0,1 = 0 \rightarrow V_2 = 0,5 \text{ m/s}$

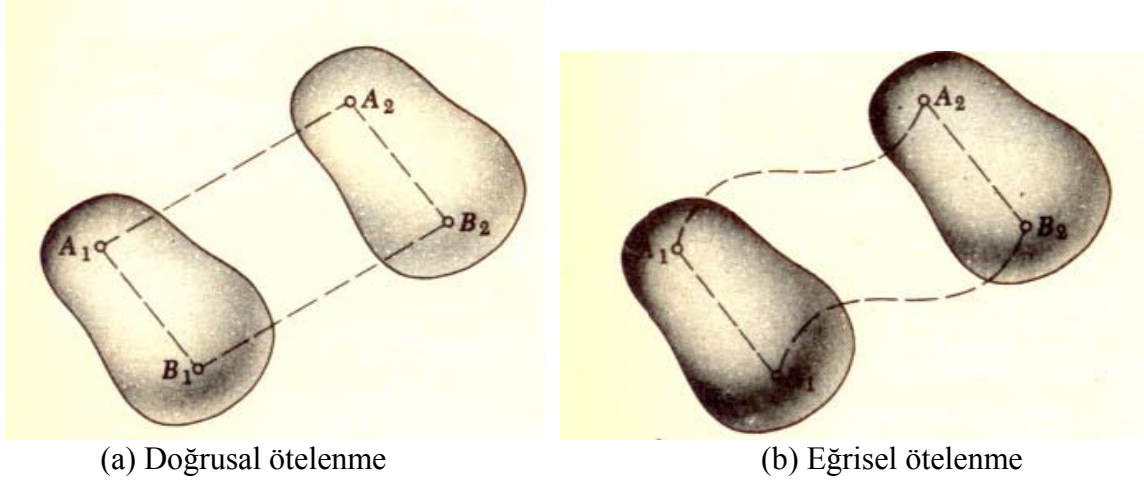
b) Mekanik enerji kaybı $= \frac{1}{2} m \cdot 0,5^2 - \frac{1}{2} m \cdot 2^2 = -1,875 \text{ m Nm (Joule)}$

5.RİJİT CİSİMLERİN KİNEMATİĞİ

Çok sayıda maddesel noktadan oluşan ve maddesel noktaların birbirlerine göre yerleri değişmeyen cisme **rijit cisim** denmektedir. Böylesi bir cisimde zaman yer, hız ve ivme arasındaki bağınlar araştırılacaktır. Aşağıda rijit cisimlerin hareketleri belli başlıklar altında incelenecektir. Bu incelemede, sabit bir eksen etrafında dönme hariç, tamamen rijit cisimlerin düzlemsel hareketleri incelenecektir.

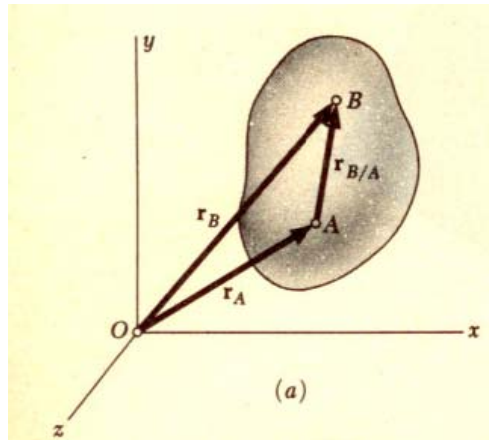
5.1.Ötelenme

Cismin içinde bulunan herhangi bir doğru parçası hareket sırasında doğrultusunu koruyorsa cismin bu hareketine **ötelenme** denir. Bir ötelenmede cismi oluşturan bütün maddesel noktaların çizdiği yörüngeler birbirine paralel olup, bu yörüngeler doğru ise doğrusal ötelenme, aksi halde eğrisel ötelenmeden bahsedilir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1

Bir rijit cisim ötelenme hareketi yapıyorsa herhangi bir anda cismin bütün noktalarının hızları ve ivmeleri, cismin noktaları arasındaki göreceli yer değiştirmenin zamanla değişimi sıfır olduğundan, yani Şekil 5.2 de görülen $\vec{r}_{B/A}$ yer vektörü sabit kaldığından, aynı olur. Bu durumda cismin B noktası için konum, hız ve ivme



Şekil 5.2

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad (5.1)$$

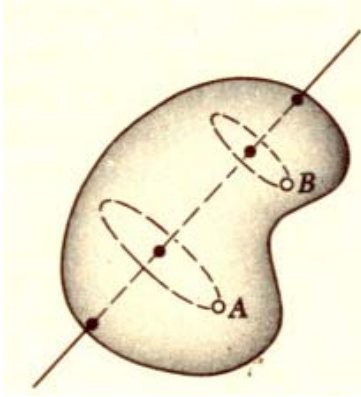
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{0} \quad (5.2)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{0} \quad (5.3)$$

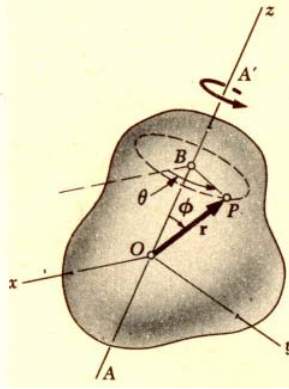
denklemleriyle belirlidir.

5.2.Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

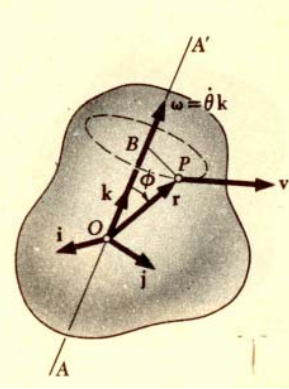
Bu harekette rijit cismi oluşturan maddesel noktalar aynı bir sabit eksen merkez olmak üzere paralel düzlemlerde bulunan çemberler üzerinde hareket ederler (Şekil 5.3).



Şekil 5.3



a)



b)

Şekil 5.4

Dönme eksenini rijit cismi kesiyorsa, bu eksen üzerindeki noktalarda hız ve ivmeler sıfır olur. Böylesi bir harekette

$$\Delta s = r \Delta \theta \sin \phi = \overline{BP} \Delta \theta \quad (5.4)$$

olmaktadır (Şekil 5.4). İzleyen bağıntıdan

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{r \sin \phi d\theta}{dt} = r \dot{\theta} \sin \phi \quad (5.5)$$

olduğu ve hızın Şekil 5.4 de gösterilen dönme için yönü ve yörüngeye teğet olduğu dikkate alınır, eşitliğin en sonundaki ifadenin

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.6)$$

vektörünün şiddeti olduğu görülür. $\vec{\omega}$ açısal hız olup şiddeti $\dot{\theta}$ ne eşittir. Bu vektörel çarpım hem şiddet, hem de yön açısından çizgisel hızı verir ki burada $\vec{\omega} \times \vec{r}$ vektörel

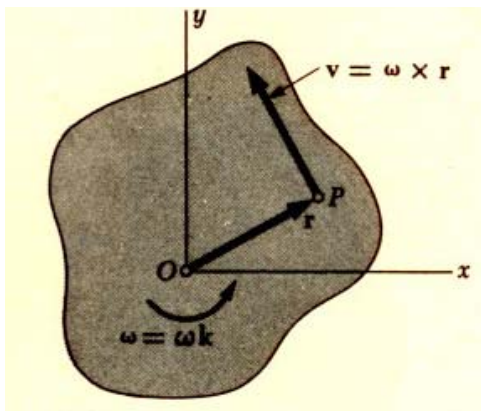
arpımı sonucunda, $\vec{\omega}$ ve $\vec{r}$ nin oluşturduğu düzleme dik yönde bir vektör elde edilmektedir. İvme için, (5.6) bağıntısının zamana göre türevinden

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (5.7)$$

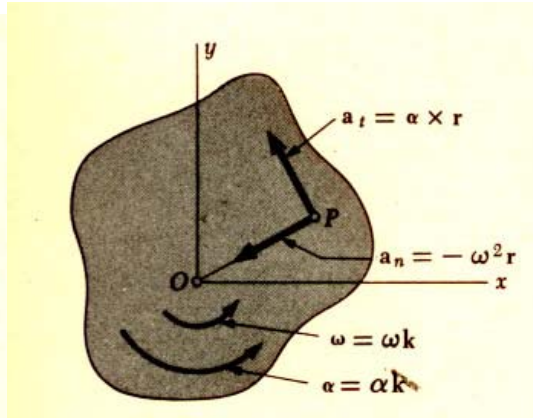
ifadesi elde edilir. $d\vec{\omega}/dt$ açısal ivme olup $\vec{\alpha}$ şeklinde gösterilir ve (5.6) bağıntısı da kullanılırsa

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (5.8)$$

şeklinde ivme ifadesi elde edilir.



Şekil 5.5



Şekil 5.6

şimdi xy karşılaştırma düzlemine göre simetrik ve düzgün kalınlıklı bir cisim alalım (Şekil 5.5). Böylesi bir cisim **ana levha** olarak adlandırılmaktadır. xy düzlemi içinde olan bir O noktasından geçen ve xy düzlemine dik bir eksen etrafında dönme olması durumunda, (5.6) denklemi ile verilen hız vektörünün şiddeti

$$v = r \omega \quad (5.9)$$

olur. İvme vektörü olan (5.8) ise

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \quad (5.10)$$

şeklini alır. İvme teğetsel ve normal bileşenlere ayrılırsa (Şekil 5.6),

$$\begin{aligned} a_t &= \alpha \times r & a_t &= r \alpha \\ a_n &= -\omega^2 r & a_n &= r \omega^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

ifadeleri elde edilir. Böylesi harekette $\vec{\omega}$ açısal hız ve $\vec{\alpha}$ açısal ivme vektörleri şekil düzlemine dik doğrultudadır.

5.3. Bir Rijit Cismin Sabit Bir Eksen Etrafında Dönmesini Tanımlayan Denklemler

Sabit bir AA' eksenini etrafında dönen bir cisimde dönmenin iki özel hali ile sıkça karşılaşılır:

1. Düzgün dönme: Bu durumda $\alpha = 0$ olup açısal yol

$$\theta = \theta_o + \omega t \quad (5.12)$$

bağıntısıyla bulunur.

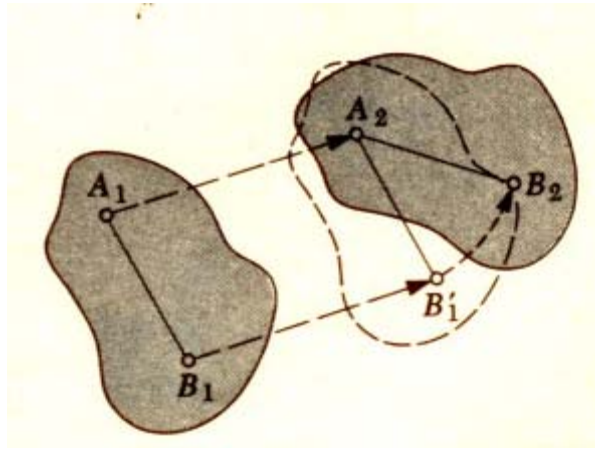
2. Düzgün değişen dönme: Açısal ivme olan α sabittir. Bu durum için kinematik bağıntılar

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_o + \alpha t \\ \theta &= \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_o^2 + 2 \alpha (\theta - \theta_o) \end{aligned} \quad (5.13)$$

olarak elde edilir.

5.4. Genel Düzlemsel Hareket

Genel düzlemsel hareket denildiğinde ötelenme ve dönme dışında bir hareket anlaşılmaktadır. Bununla birlikte şimdi görüleceği üzere bir **genel düzlemsel** hareket, daima bir **ötelenme** ile bir **dönmenin** toplamı olarak göz önüne alınabilir. Genel olarak ana levhanın A ve B gibi iki noktasını A_1 ve B_1 den sırasıyla A_2 ve B_2 ye getiren küçük bir yer değişimini göz önüne alacağız (Şekil 5.7). Bu yer değiştirme iki kısma ayrılabilir: Biri, AB doğrusu doğrultusunu korumak şartıyla noktaların A_2 ve B'_1 ye gelmesi, diğeri A sabit kalmak üzere B nin B_2 ye gelmesi. Hareketin ilk kısmının bir ötelenme, ikinci kısmının da bir dönme olduğu açıktır. Şekilden de görüleceği üzere B nin A ya göre bağlı hareketi bir dönmedir.



Şekil 5.7

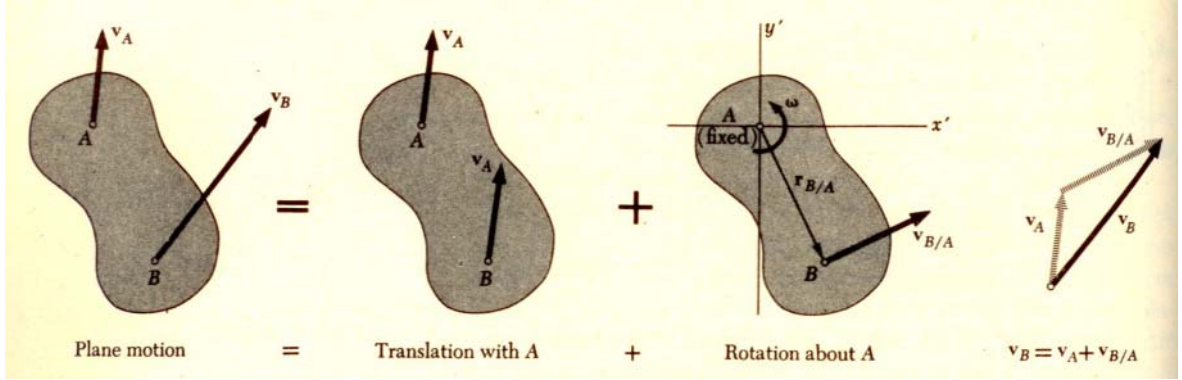
Düzlemsel harekette salt ve bağıl hız: Şimdi genel düzlemsel harekette

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad (5.14)$$

olduğu açıktır. B nin A ya göre yer vektörünü $\vec{r}_{B/A}$ ile ve levhanın sabit doğrultulu eksen takımlarına göre açısal hızı $\vec{\omega}$ ile gösterilirse (Şekil 5.8), (5.6) dan,

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} \quad v_{B/A} = r \omega \quad (5.15)$$

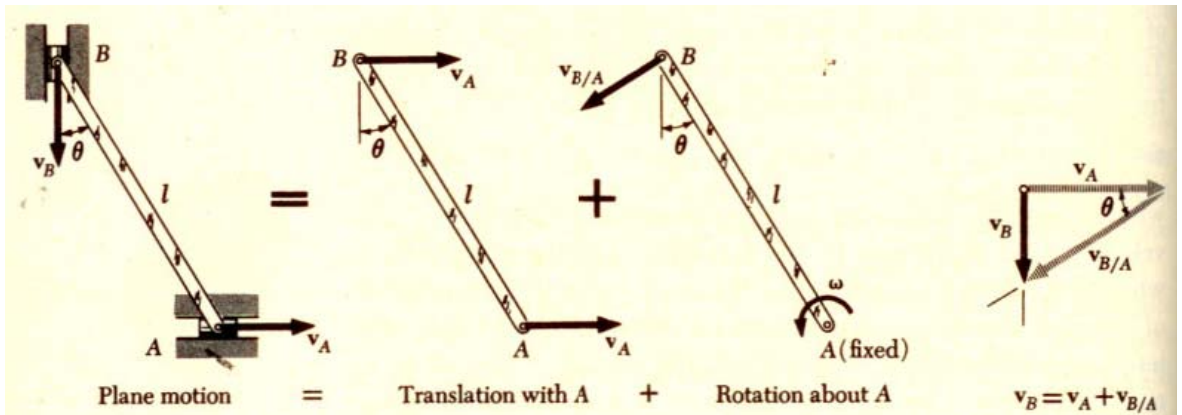
elde edilir.



Şekil 5.8

Bir örnek olarak şekil 5.9 da görülen, bir ucu dikey, diğer ucu da yatay yarıklarda kayan AB çubuğu göz önüne alınsın. A ucunun $\vec{v}_A$ hızının bilindiği kabul edilirse, B ucunun $\vec{v}_B$ hızı, ve çubuğun $\vec{\omega}$ açısal hızı, $\vec{v}_A$ hızı, l boyu ve θ cinsinden bulunmak istensin. Bu hareketin yerine, A yı karşılaştırma noktası olarak almak suretiyle, yatay doğrultuda bir ötelenme ile A etrafında bir dönme koymak mümkündür. Bu duruma göre B nin salt hızı şu vektörel toplama eşit olacaktır :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad (5.16)$$



Şekil 5.9

$\vec{v}_{B/A}$ nin doğrultusu bilinmesine karşın $l\omega$ şiddetinin bilinmediğine dikkat edilmelidir. Ancak bunun yerine $\vec{v}_B$ nin doğrultusu bilinmektedir. Şu halde Şekil 5.9 daki diyagramı tamamlamak mümkündür. Buradan v_B ve ω nin şiddetleri çözülürse

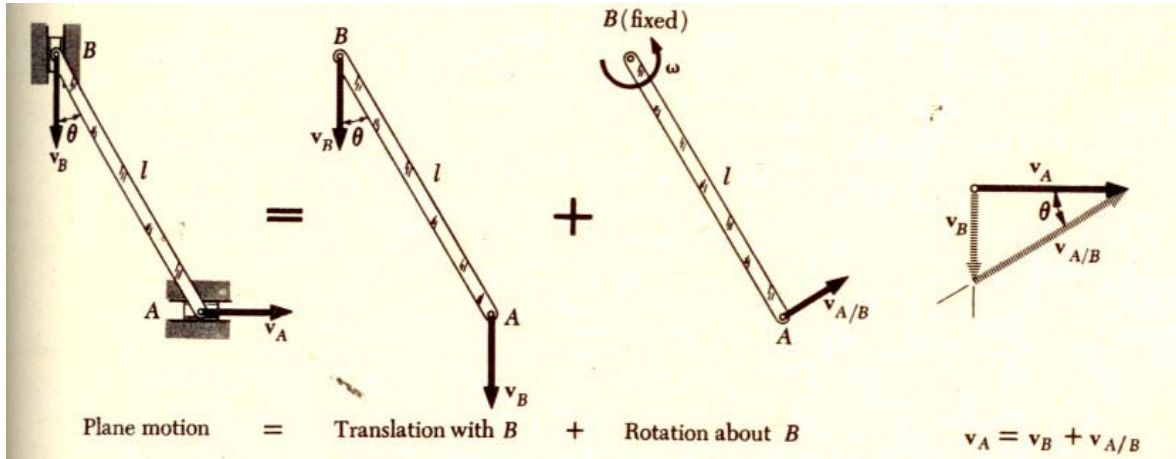
$$v_B = v_A \tan \theta \quad \omega = \frac{v_{B/A}}{l} = \frac{v_A}{l \cos \theta} \quad (5.17)$$

bulunur.

Aynı sonuç B noktası karşılaştırma noktası alınarak da elde edilebilir. Verilen hareket, B nin ötelenmesi ve B etrafında dönme (Şekil 5.10) bileşenlerine ayrılırsa

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \quad (5.18)$$

yazılabilir. $\vec{v}_{A/B}$ ile $\vec{v}_{B/A}$ aynı $l\omega$ şiddetinde olup, yönlerinin ters olduğu görülmektedir. O halde bağıl hızın yönü seçilen karşılaştırma noktasına bağlı olmaktadır ve çizilecek bir diyagram yardımı ile elde edilebilir (Şekil 5.9 ve 5.10).



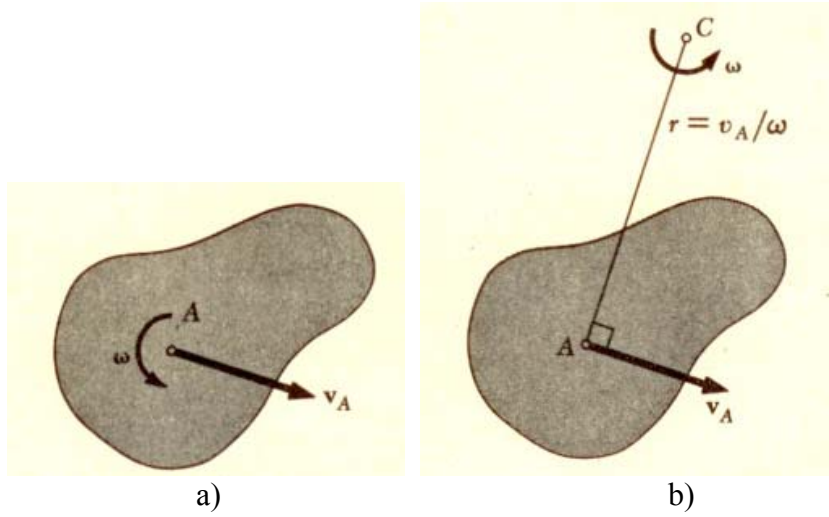
Şekil 5.10

Son olarak, görülüyor ki çubuğun B etrafındaki dönmesine ait $\vec{\omega}$ açısal hızı, A etrafındaki dönme hızı ile aynıdır. Her iki halde de θ açısının değişmesi ile ölçülmektedir. Bu sonuç geneldir, bu sebeple ***bir rijit cismin düzlemsel hareketindeki $\vec{\omega}$ açısal hızının karşılaştırma noktasından bağımsız olduğu*** hatırla tutulmalıdır.

Mekanizmaların pek çoğu birden fazla hareketli parçadan oluşur. Bir mekanizmada çeşitli parçalar birbirine mafsallı iseler bunların incelenmesi, her bir parçayı bir rijit cisim olarak göz önüne alıp, mafsal noktalarındaki salt hızların aynı olduğu düşünülerek yapılabilir.

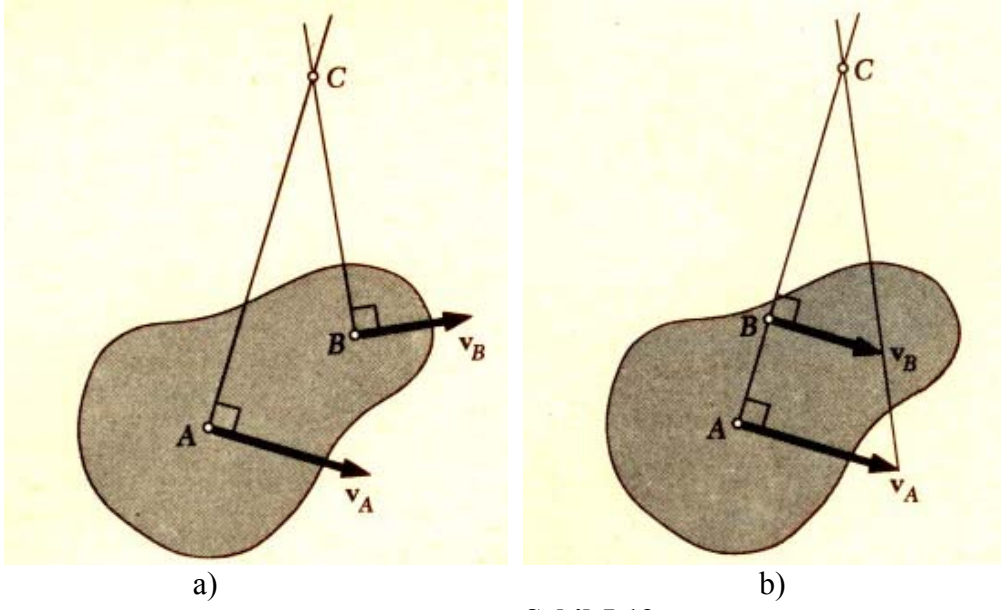
Düzlemsel harekette ani dönme merkezi : Bir levhanın genel hareketini göz önüne alalım. Verilen herhangi bir anda levhanın çeşitli noktalarının hızlarının, levhanın ***ani dönme eksen*** adı verilen ve levha düzlemine dik olan bir eksen etrafında dönmesi ile aynı olduğu görülecektir. Bu eksen levha düzlemini, levhanın ***ani dönme merkezi*** adı verilen bir noktada keser.

Levhanın düzlemsel bir hareketi herhangi bir A karşılaştırma noktasının ötelenmesi ve A etrafında bir dönme şeklinde ikiye ayrılabilir. Hızlar söz konusu olduğu sürece, A noktasının ötelenme hızı $\vec{v}_A$, levhanın açısal hızı $\vec{\omega}$ verildiğinde, levhanın tüm diğer noktalarının hızları bunlara bağlı olarak belirlidir (Şekil 5.11a). Şimdi $\vec{v}_A$ çizgisel ve $\vec{\omega}$ açısal hızlarının bilindiği ve her ikisinin de sıfırdan farklı olduğu kabul edilsin. Eğer $\vec{v}_A = \vec{0}$ ise A noktasının kendisi ani dönme merkezidir, eğer $\vec{\omega} = 0$ ise levha ötelenme yapmaktadır. Bu hızlar Şekil 5.11b de gösterildiği üzere $\vec{v}_A$ ya çizilen dik üzerinde, A dan $r = v_A / \omega$ kadar uzakta bulunan bir C noktası etrafında levhayı $\vec{\omega}$ açısal hızı ile döndürerek de bulunabilir. A nın hızının AC ye dik olduğunu ve şiddetinin $v_A = r \omega = (v_A / \omega) \omega$ olacağını sağlayabiliyoruz. O halde levhanın bütün öteki noktalarının hızları da ilk tanımlanan hızla aynı olacaktır. Şu hale göre ***hızlar bakımından levha göz önüne alınan anda C ani dönme merkezi etrafında döner gibi görünür.***



Şekil 5.11

Ani dönme merkezinin yeri başka iki şekilde daha tanımlanabilir. Levhanın A ve B noktalarının hızlarının doğrultusu biliniyorsa ve bunlar birbirinden farklı ise, C ani dönme merkezi A dan $\vec{v}_A$ ya, ve B den $\vec{v}_B$ ye dikler çizilip bunların kesişme noktasının belirtilmesi ile elde edilebilir (Şekil 5.12a). Eğer A ve B noktalarının $\vec{v}_A$ ve $\vec{v}_B$ hızları AB doğrularına dikse ve şiddetleri biliniyorsa ani dönme merkezi $\vec{v}_A$ ve $\vec{v}_B$ vektörlerinin uçlarını birleştiren doğruyu AB ile kesiştirerek bulunabilir (Şekil 5.12b). Şuna dikkat edilmelidir ki, Şekil 5.12a da $\vec{v}_A$ ve $\vec{v}_B$ hızları paralel olursa veya Şekil 5.12b de $\vec{v}_A$ ve $\vec{v}_B$ hızları aynı şiddette olursa C ani dönme merkezi sonsuza gider ve $\vec{\omega}$ sıfır olur; o zaman levha ötelenme yapıyor demektir.



Şekil 5.12

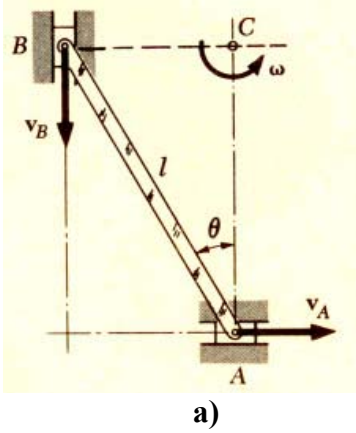
Örnek: Ani dönme merkezi kavramından ne şekilde yararlanılacağını görmek için yine biraz önce incelenen çubuğu göz önüne alalım. A dan $\vec{v}_A$ ya ve B den $\vec{v}_B$ ye dik çizmek suretiyle (Şekil 5.13a) C ani dönme merkezini elde ederiz. Göz önüne alınan anda çubuğun bütün noktalarının hızları, çubuk C etrafında dönüyormuş gibi olmaktadır. Şu halde A nın hızının $\vec{v}_A$ şiddeti belirli ise çubuğun $\vec{\omega}$ açısal hızı

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l \cos \theta}$$

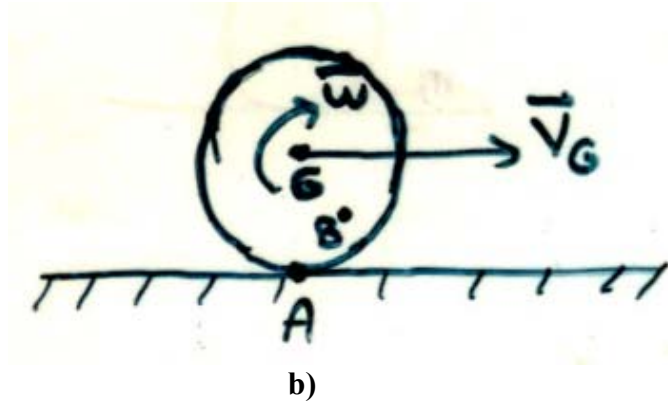
yazarak elde edilebilir. Ondan sonra B nin hızının şiddeti ise

$$v_B = (BC)\omega = l \sin \theta \frac{v_A}{l \cos \theta} = v_A \tan \theta$$

olur. Hesaplarda sadece salt hızların kullanıldığına dikkat etmelidir.



a)



b)

Şekil 5.13

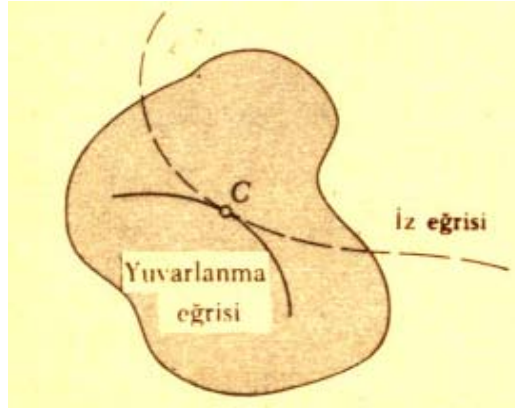
Örnek: Kaymadan yuvarlanan bir tekerin hareketi

Şekil 5.13b de görülen teker durumunda yerle göz önüne alınan anda temas halinde olan bir A noktasının o anda yere göre hızı sıfırdır. Bu durumda bir B noktasının hızı $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ olur. Bu durumda A noktası göz önüne alınan anda ani dönme merkezi olup bu an için tekerin tüm noktalarının hızı, teker A etrafında dönüyormuş kabul edilerek hesaplanabilir.

Düzlemsel hareket yapan bir levhanın ani dönme merkezi levhanın üstünde veya dışında bulunabilir. Eğer levhanın üstünde ise, verilen bir t anında ani dönme merkeziyle üst üste bulunan C noktasının o andaki hızı sıfır olmak zorundadır.

Ani dönme merkezi sadece verilen bir an için geçerlidir. Şu halde bir t anında levhenin ani dönme merkezi ile üst üste olan bir C noktası, genel olarak, $t + \Delta t$ anında ani dönme merkezi ile üst üste bulunmayacaktır; t anında hızı sıfır olduğu halde $t + \Delta t$ anında belki de sıfırdan farklı olacaktır. Bu demektir ki genel olarak C noktasının **ivmesi sıfır değildir**, şu halde levhanın çeşitli noktalarının ivmeleri, levha C etrafında dönüyormuş gibi belirtilemez.

Levha hareketine devam edince ani dönme merkezi uzayda hareket eder. Öte yandan biraz önce söylendiği gibi ani dönme merkezinin levha üzerindeki yeri de daima değişmektedir. Böylece ani dönme merkezi uzayda **iz eğrisi** adı verilen, levha üzerinde de **yuvarlanma eğrisi** denilen bir eğri çizer (Şekil 5.14). Gösterilebilir ki, herhangi bir anda bu iki eğri C de birbirine teğettir ve levha hareket ettikçe yuvarlanma eğrisi iz eğrisinin üzerinde yuvarlanıyormuş gibi görünür.



Şekil 5.14

Düzlemsel harekette salt ve bağıl ivme : Levhanın bir noktasının $\vec{a}_B$ salt ivmesinin

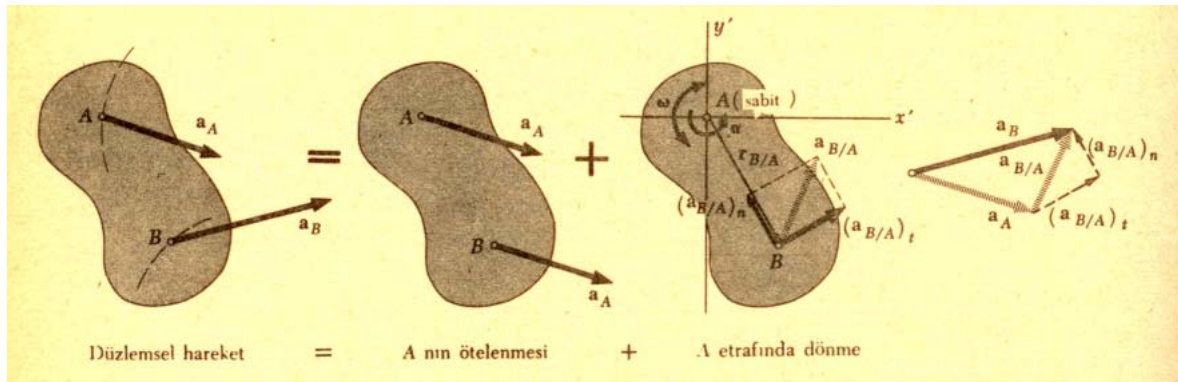
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad (5.19)$$

bağıl ivme formülü ile elde edilebileceği bilinmektedir. Burada $\vec{a}_{B/A}$ bağıl ivmesi levhanın A etrafında dönmesiyle ilgili olup, A ya konulmuş ve doğrultusu sabit eksen takımına göre ölçülecektir (Şekil 5.15). Ana levha dönmesinden bilinmektedir ki, $\vec{a}_{B/A}$ bağıl ivmesi, biri

AB doğrusuna dik $(\vec{a}_{B/A})_t$ **teğetsel bileşeni** ile, diğeri A yönünde bir $(\vec{a}_{B/A})_n$ **normal bileşenine** ayrılabilir. B nin A ya göre yer vektörünü $\vec{r}_{B/A}$ ile ve levhanın sabit eksen takımına göre açısal hız ve ivmesini sırasıyla $\vec{\omega}$ ve $\vec{\alpha}$ ile gösterirsek, A ile B arasındaki uzaklık r olmak üzere

$$\begin{aligned} (\vec{a}_{B/A})_t &= \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} & (a_{B/A})_t &= r \alpha \\ (\vec{a}_{B/A})_n &= -\omega^2 \vec{r}_{B/A} & (a_{B/A})_n &= r \omega^2 \end{aligned} \quad (5.20)$$

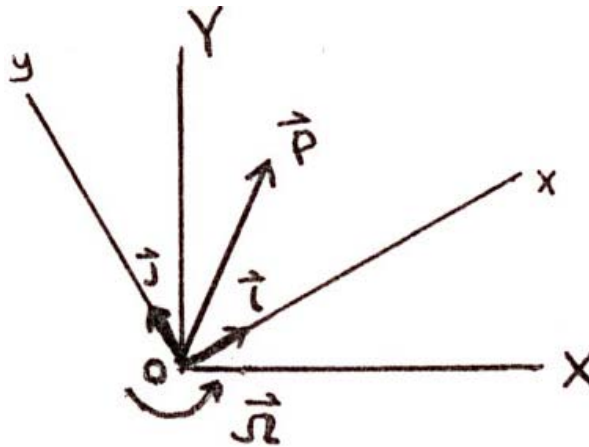
olur.



Şekil 5.15

5.5.Düzlemde Dönen Bir Takıma Göre Bir Vektörün Değişiminin Hızı

Birinci bölümde görüldü ki bir $\vec{P}$ vektörünün değişim hızı, sabit ve ötelenme yapan bir takıma göre aynıdır. Bu kısımda bir $\vec{P}$ vektörünün sabit bir takıma göre değişim hızı ile dönen bir takıma göre değişim hızı karşılaştırılacaktır. Ayrıca bir takıma göre bileşenleriyle verilen $\vec{P}$ nin öteki karşılaştırma takımına göre değişim hızının belirlenmesi öğrenilecektir.



Şekil 5.16

başlangıç noktaları aynı olan sabit bir OXY takımı ile, dönen bir Oxy karşılaştırma takımı göz önüne alınsın (Şekil 5.16). Oxy takımının verilen bir andaki açısal hızı $\vec{\Omega}$ olsun. Bu hızın düzlemsel harekette şekil düzlemine dik olduğu bilinmektedir. Şimdi O dan geçen ve $\vec{P}$ ile gösterilen bir $\vec{P}(t)$ vektör fonksiyonu göz önüne alınsın. t zamanı değiştikçe bu vektörün hem doğrultusu hem de şiddeti değişmektedir. OXY karşılaştırma takımını kullanan gözlemciye göre $\vec{P}$ nin değişimi Oxy takımını kullanan gözlemcininkinden farklı olduğu için, $\vec{P}$ nin değişim hızının seçilen karşılaştırma takımına bağlı olması beklenmelidir. Bu sebeple sabit OXY takımına göre $\vec{P}$ nin değişim hızı $d\vec{P}/dt$ ile ve dönen Oxy takımına göre değişim hızı da $\delta\vec{P}/\delta t$ ile gösterilecektir. Bu iki değişim hızı arasındaki bağıntı çıkarılmaya çalışılacaktır.

Önce $\vec{P}$ vektörü dönen takımın x ve y eksenleri doğrultusunda bileşenlere ayrılınsın. Bu takıma ait birim vektörler $\vec{i}$ ve $\vec{j}$ ile gösterilirse

$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} \quad (5.21)$$

yazılabilir. (5.21) eşitliği t zamanına göre türetilir ve $\vec{i}$ ve $\vec{j}$ birim vektörlerinin dönme yapan takıma göre sabit oldukları göz önüne alınırsa, $\vec{P}$ nin dönen takıma göre $\delta\vec{P}/\delta t$ değişim hızı

$$\frac{\delta\vec{P}}{\delta t} = \frac{dP_x}{dt} \vec{i} + \frac{dP_y}{dt} \vec{j} \quad (5.22)$$

olur. $\vec{P}$ nin sabit takıma göre $d\vec{P}/dt$ değişim hızını bulmak için (5.21) türetilirken $\vec{i}$ ve $\vec{j}$ birim vektörlerini zamanla değişken kabul etmek gerekir. Bu durumda

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt} \vec{i} + \frac{dP_y}{dt} \vec{j} + P_x \frac{d\vec{i}}{dt} + P_y \frac{d\vec{j}}{dt} \quad (5.23)$$

bulunur. (5.22) hatırlanırsa, (5.23) ün sağ tarafındaki ilk iki terimin toplamının $\delta\vec{P}/\delta t$ değişim hızını belirttiği görülür. Diğer taraftan şunu da söyleyebiliriz ki, $\vec{P}$ vektörü Oxy takımına bağlanmış olsaydı $\delta\vec{P}/\delta t$ sıfır olacağından, $d\vec{P}/dt$ değişim hızı (5.23) ün son terimine dönüşmüş olacaktı. Fakat bu durumda $d\vec{P}/dt$ değişimi, Oxy ye rijit olarak bağlı bir cismin $\vec{P}$ nin ucuna rastlayan maddesel noktasının hızını gösterecekti. Buna göre göz önüne alınan anda Oxy takımının açısal hızı $\vec{\Omega}$ olduğundan (5.23) deki son iki terim noktanın hızını belirler. (5.6) kullanılarak,

$$P_x \frac{d\vec{i}}{dt} + P_y \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{P} \quad (5.24)$$

yazılır. (5.22) ve (5.24), (5.23) de yerine konursa aşağıdaki temel bağıntı elde edilir:

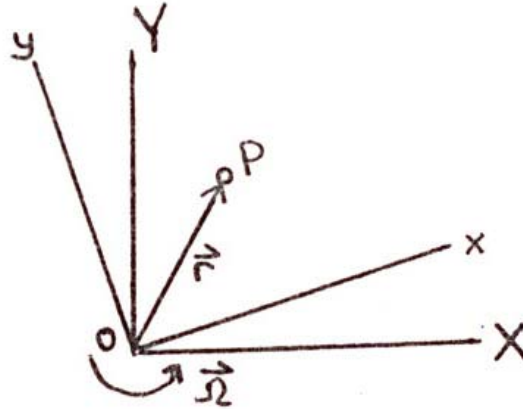
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{\delta\vec{P}}{\delta t} + \vec{\Omega} \times \vec{P} \quad (5.25)$$

Buradan şu sonuç çıkarılır : Sabit OXY takımına göre $\vec{P}$ vektörünün $d\vec{P}/dt$ değişim hızı iki kısımdan oluşmaktadır : Birinci $\delta\vec{P}/\delta t$ kısmı, $\vec{P}$ nin dönen Oxy takımına göre değişim hızıdır, ikinci $\vec{\Omega} \times \vec{P}$ kısmı ise, Oxy takımının dönmesinden ortaya çıkar.

(5.25) bağıntısı kullanılarak, dönen bir takımdaki bileşenleri ile tanımlanan bir $\vec{P}$ vektörünün $d\vec{P}/dt$ değişim hızının belirlenmesi büyük ölçüde basitleşir, çünkü böyle bir vektörün $\delta\vec{P}/\delta t$ değişim hızı (5.22) den kolayca elde edilir.

5.6.Düzlemdeki Bir Maddesel Noktanın Dönen Bir Takıma Göre Hareketi. Coriolis İvmesi

O başlangıç noktaları ortak olan sabit bir OXY ile dönen bir Oxy karşılaştırma takımını göz önüne alalım (Şekil 5.17). P uzayda hareketli bir maddesel nokta olsun. P nin $\vec{r}$ yer vektörü her iki takımda aynı olduğu halde bunun değişim hızı seçilen karşılaştırma takımına bağlıdır.



Şekil 5.17

Maddesel noktanın salt $\vec{v}_p$ hızı $\vec{r}$ nin sabit OXY takımına göre $d\vec{r}/dt$ değişim hızı olarak tanımlanır. Bununla birlikte (5.25) kullanılırsa, $\vec{v}_p$ hızı hareketli takımdan gözlenen $\delta\vec{r}/\delta t$ değişim hızı cinsinden de belirlenebilir. Oxy hareketli takımının göz önüne alınan zamanda açısal hızı $\vec{\Omega}$ ile gösterilirse

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \quad (5.26)$$

yazılır. Fakat $\delta \vec{r} / \delta t$ terimi P maddesel noktasının Oxy takımına göre hızını tanımlar. Bundan başka eğer dönen takıma rijit bir cisim gözü ile bakacak olursak (5.26) daki $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ terimi, göz önüne alınan anda dönen takımın P ile çakışan noktasının hızını gösterir. Böylece

$$\vec{v}_P = \vec{v}_F + \vec{v}_{P/F} \quad (5.27)$$

yazılabilir. Burada

$\vec{v}_P = P$ maddesel noktasının salt hızı

$\vec{v}_F =$ hareketli takımın P ile çakışan noktasının hızı

$\vec{v}_{P/F} = P$ nin hareketli takıma göre hızıdır.

Maddesel noktanın $\vec{a}_P$ salt ivmesi $\vec{v}_P$ nin OXY ye göre değişiminin hızı olarak tanımlanır. $\vec{v}_P$ nin (5.26) daki değeri yerine konarak

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \vec{r}}{\delta t} \right) \quad (5.28)$$

bulunur. (5.25) göz önünde tutulursa

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \vec{r}}{\delta t} \right) = \vec{\Omega} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} \quad (5.29)$$

olur. Böylece $d\vec{r}/dt$ nin (5.26) daki değeri (5.28) de yerine konur ve (5.29) da göz önüne alınırsa

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} \quad (5.30)$$

elde edilir. (5.8) bağıntısı göz önünde tutulursa, yukarıdaki eşitliğin ilk iki teriminin toplamı, göz önüne alınan anda dönen takımın P ye çakışan noktasının $\vec{a}_F$ ivmesini verir. Diğer taraftan sonuncu terim ise P nin dönen takıma göre $\vec{a}_{P/F}$ ivmesini tanımlar. Eğer yukarıda sebebi gösterilmemiş olan üçüncü terim bulunmasaydı ivme için (5.28) e benzer bir bağıntı yazılmış olacak ve $\vec{a}_P$ ivmesi $\vec{a}_F$ ile $\vec{a}_{P/F}$ nin toplamı olarak elde edilecekti. Bununla birlikte açıktır ki böyle bir bağıntı doğru olmayacaktır ek bir terimin daha hesaba katılması gereklidir. Bundan böyle $\vec{a}_c$ ile gösterilecek olan bu terime tamamlayıcı ivme veya Fransız matematikçisi De Coriolis' e izafeten Coriolis ivmesi adı verilmiştir. Böylece

$$\vec{a}_P = \vec{a}_F + \vec{a}_{P/F} + \vec{a}_c \quad (5.31)$$

yazılır. Burada

$\vec{a}_P = P$ maddesel noktasının salt ivmesi

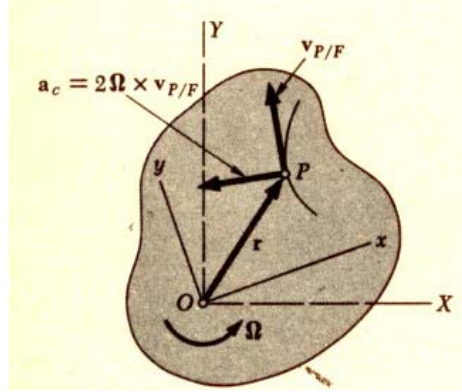
$\vec{a}_F =$ hareketli takımın P ile çakışan noktasının ivmesi

$\vec{a}_{P/F} = P$ nin hareketli takıma göre ivmesi

$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \times \delta \vec{r} / \delta t = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{P/F} =$ tamamlayıcı ivme veya Coriolis ivmesi.

Şu da belirtilmelidir ki, Coriolis ivmesi $\vec{\Omega}$ ve $\vec{v}_{P/F}$ vektörlerine diktir ve eğer bu vektörler paralel veya ikisinden biri sıfır olursa bu ivme de sıfıra eşit olur.

Düzlemsel hareket göz önüne alındığından, $\vec{\Omega}$ vektörü hareket düzlemine ve böylece $\vec{v}_{P/F}$ dik olur. Bu durumda $\vec{a}_c$ nin şiddeti $2\Omega v_{P/F}$ ye eşittir ve doğrultusu ise $\vec{v}_{P/F}$ vektörünü hareketli takımın dönme yönünde 90° döndürerek elde edilir. Bu durum Şekil 5.18 de görülmekte olup burada P maddesel noktası, O etrafında Oxy takımı ile birlikte dönen bir levha üzerinde bir yol çizer.



Şekil 5.18

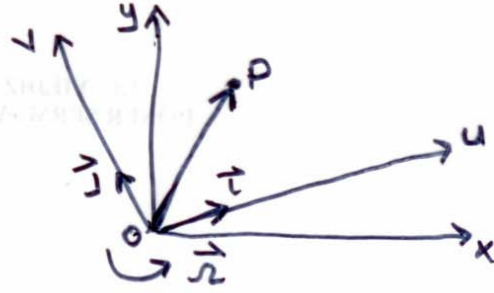
Düzlemdeki Bir Maddesel Noktanın Dönen Bir Takıma Göre Hareketi
Coriolis İvmesi

$$\vec{r} = U\vec{i} + V\vec{j}$$

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dU}{dt}\vec{i} + \frac{dV}{dt}\vec{j} + U\frac{d\vec{i}}{dt} + V\frac{d\vec{j}}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \frac{dU}{dt}\vec{i} + \frac{dV}{dt}\vec{j} = \vec{V}_{P/F} \quad (2)$$

$$\vec{V}_P = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + U\frac{d\vec{i}}{dt} + V\frac{d\vec{j}}{dt} \quad (3)$$



$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = 0 \text{ ise bu durumda;}$$

$$U\frac{d\vec{i}}{dt} + V\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4) \text{ olur. } (2) \vee (4), (3) \text{ de yerine}$$

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5) \text{ bulunur. } \vec{V}_P = \vec{V}_{P/F} + \vec{V}_F \quad (6) \text{ olur.}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{V}_P}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\right) \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}) = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (8) \text{ ise } \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\right) = \frac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2} + \vec{\omega} \times \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \quad (9) \text{ olur.}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \frac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2} \quad (10)$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_F + \vec{a}_{P/F} + \vec{a}_C \quad (10)$$

$\vec{V}_P$: P maddesel noktanın salt hızı

$\vec{V}_F$: Hareketli takımın P ile ilişkili noktasının hızı

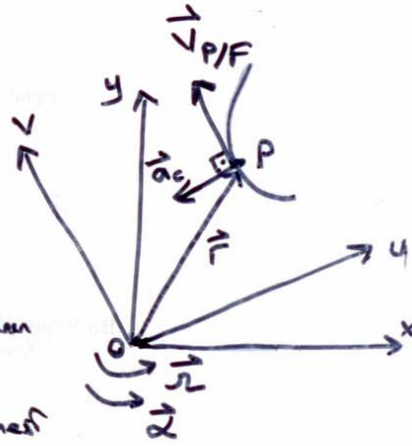
$\vec{V}_{P/F}$: P'nin hareketli takıma göre hızı

$\vec{a}_P$: P maddesel noktasının salt ivmesi

$\vec{a}_F$: Hareketli takımın P ile ilişkili noktasının ivmesi

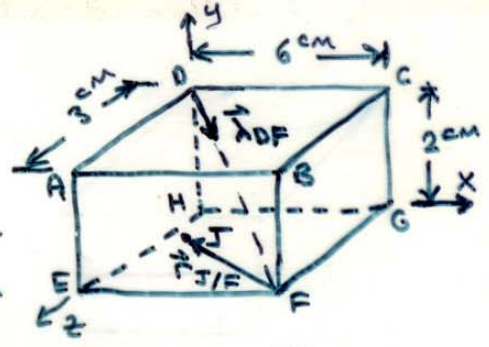
$\vec{a}_{P/F}$: P'nin hareketli takıma göre ivmesi

$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{P/F}$: tanımlayıcı ivme veya Coriolis ivmesi



$\vec{\omega}$ ve $\vec{V}_{P/F}$ vektörleri paralel veya zıt yönde birer sıfırsa Coriolis ivmesi sıfır olur.

Problem 1: Şekildeki prizma kutu DF köşegeni etrafında 7 rad/sn lik sabit açısal hızla dönmektedir. Köşegenin F ucundan bakıldığında açısal hızın saat ibrelerinin tersi yönde olduğu görülmektedir. Bu durumda ABFE yüzünün orta noktası olan J'nin hızını ve ivmesini bulunuz.



Çözüm: $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\lambda}_{DF}$ $\vec{\lambda}_{DF} = \frac{(x_F - x_D)\vec{i} + (y_F - y_D)\vec{j} + (z_F - z_D)\vec{k}}{\sqrt{(x_F - x_D)^2 + (y_F - y_D)^2 + (z_F - z_D)^2}}$

$$\vec{\lambda}_{DF} = \frac{(6-0)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (3-0)\vec{k}}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2}}$$

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\lambda}_{DF} = 7 \cdot \left(\frac{6}{7}\vec{i} - \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k} \right) \text{ rad/sn}$$

$$\vec{\omega} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \text{ rad/sn}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{J/F} = (6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \times (-3\vec{i} + \vec{j}) = 6\vec{k} - 6\vec{k} - 9\vec{j} - 3\vec{i} = -3\vec{i} - 9\vec{j} \text{ cm/sn}$$

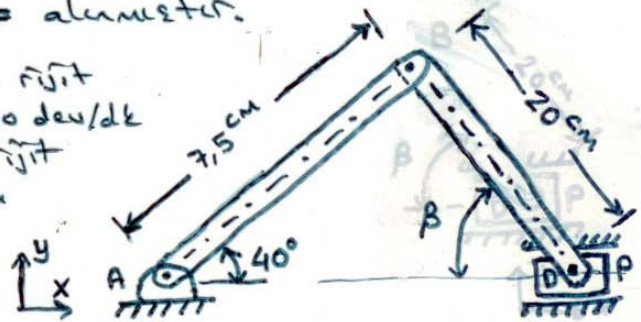
$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v} = (6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \times (-3\vec{i} - 9\vec{j})$$

$$\vec{a} = -54\vec{k} - 6\vec{k} - 9\vec{j} + 27\vec{i} = 27\vec{i} - 9\vec{j} - 60\vec{k} \text{ cm/sn}^2$$

$\vec{\omega}$ da, F ucundan bakıldığında açısal hız saat ibrelerinin tersi yönde olduğundan $\vec{\lambda}_{FD}$ değilde $\vec{\lambda}_{DF}$ alınmıştır.

Problem 2: Şekildeki mekanizmada AB rijit cisminin saat ibreleri yönünde $\omega = 2000 \text{ dev/dk}$ lik sabit bir açısal hızı vardır. AB rijit cisminin şekilde gösterilen konumunda

- BO cisminin açısal hızını bulunuz,
- P pistonunun hızını bulunuz.



Çözüm: $\omega_{AB} = \frac{2000 \cdot 2\pi}{60} = 209 \text{ rad/sn}$

Sinüs teoreminde

$$\frac{7.5}{\sin \beta} = \frac{20}{\sin 40^\circ} \rightarrow \beta = 13.9^\circ$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} ; \vec{v}_B = \vec{v}_{B/A} = \vec{\omega}_{BA} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{v}_B = -209\vec{k} \times 7.5(\cos 40^\circ \vec{i} + \sin 40^\circ \vec{j}) = -209 \cdot 7.5 \cdot (\cos 40^\circ \vec{j} - \sin 40^\circ \vec{i})$$

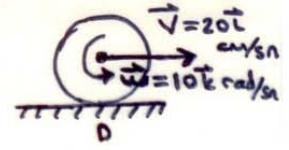
$$\vec{v}_O = \vec{v}_B + \vec{v}_{O/B} \rightarrow v_O \vec{i} = \vec{v}_B + \vec{v}_{O/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{OB} \times \vec{r}_{O/B}$$

$$v_O \vec{i} = -209 \cdot 7.5 \cdot (-\sin 40^\circ \vec{i} + \cos 40^\circ \vec{j}) + \omega_{OB} \vec{k} \times 20(\cos 13.9^\circ \vec{i} - \sin 13.9^\circ \vec{j})$$

$$v_O \vec{i} = -209 \cdot 7.5 \cdot (-\sin 40^\circ \vec{i} + \cos 40^\circ \vec{j}) + \omega_{OB} \cdot 20(\cos 13.9^\circ \vec{j} + \sin 13.9^\circ \vec{i})$$

$$\left. \begin{aligned} (v_O = 209 \cdot 7.5 \cdot \sin 40^\circ + \omega_{OB} \cdot 20 \cdot \sin 13.9^\circ) \vec{i} \\ (0 = -209 \cdot 7.5 \cdot \cos 40^\circ + \omega_{OB} \cdot 20 \cdot \cos 13.9^\circ) \vec{j} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \omega_{OB} &= 61.9 \text{ rad/sn} \\ \vec{v}_O = v_P \vec{i} &= 1305 \vec{i} \text{ cm/sn} \end{aligned}$$

Problem 3: $r = 8$ cm yarıçaplı bir top düzgün bir yatay yüzeyde yuvarlanıyor ve kayıyor. Disk merkezinin sağa doğru $20 \hat{i}$ cm/sn lik hızı olduğu ve saat ibresinin tersi yönünde $\omega = 10 \text{ rad/sn}$ lik sabit bir açısal hız olduğuna göre, a) anı dönme merkezini, b) diskten yüzeye dokunan noktasının hızını bulunuz.



Çözüm: C noktası anı dönme merkez olsun.

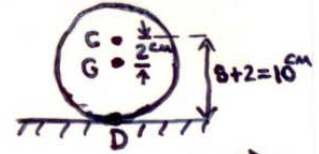


$$\vec{V}_C = \vec{V}_G + \vec{V}_{C/G} = \vec{V}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{C/G}$$

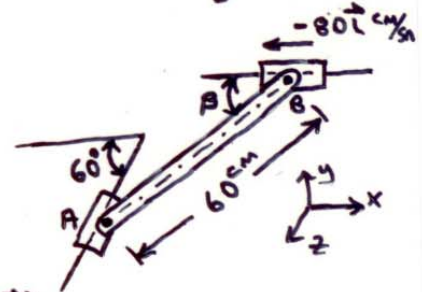
$$0 = 20\hat{i} + 10\hat{k} \times (r_x\hat{i} + r_y\hat{j}) = 20\hat{i} + 10r_x\hat{j} - 10r_y\hat{i}$$

$$(20 - 10r_y = 0)\hat{i} \rightarrow r_y = 2 \text{ cm}; (10r_x = 0)\hat{j} \rightarrow r_x = 0$$

$$\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{D/C} = \vec{\omega} \times (-10\hat{j}) = 100\hat{i} \text{ cm/sn}$$



Problem 4: B bileziği 80 cm/sn lik sabit bir hızla sola doğru hareket etmektedir. $\beta = 30^\circ$ olduğu anda, a) AB çubuğunun açısal hızını, b) A bileziğinin hızını hesaplayınız.



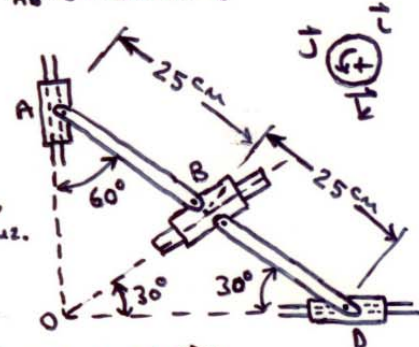
Çözüm: $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B}$

$$V_A(-\cos 60^\circ\hat{i} - \sin 60^\circ\hat{j}) = -80\hat{i} + \omega_{AB}\hat{k} \times (-60\cos 30^\circ\hat{i} - 60\sin 30^\circ\hat{j})$$

$$-V_A \cos 60^\circ\hat{i} - V_A \sin 60^\circ\hat{j} = -80\hat{i} - \omega_{AB} \cdot 60 \cos 30^\circ\hat{j} + \omega_{AB} \cdot 60 \sin 30^\circ\hat{i}$$

$$\omega_{AB} = 1,33 \text{ rad/sn}; V_A = 79,8 \text{ cm/sn}$$

Problem 5: AB ve BD çubukları şekildeki gibi bir bileziğe bağlanmışlardır. A bileziği aşağıya doğru 18 cm/sn lik bir hızla hareket ediyorsa, a) çubukların açısal hızlarını, b) D'nin hızını bulunuz.



Çözüm: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$

$$V_B(\cos 30^\circ\hat{i} + \sin 30^\circ\hat{j}) = -18\hat{j} + \omega_{AB}\hat{k} \times (25\sin 60^\circ\hat{i} - 25\cos 60^\circ\hat{j})$$

$$V_B \cos 30^\circ\hat{i} + V_B \sin 30^\circ\hat{j} = -18\hat{j} + \omega_{AB} \cdot 25 \sin 60^\circ\hat{j} + \omega_{AB} \cdot 25 \cos 60^\circ\hat{i}$$

$$(V_B \cos 30^\circ = 25 \cos 60^\circ \omega_{AB})\hat{i}$$

$$(V_B \sin 30^\circ = -18 + 25 \sin 60^\circ \omega_{AB})\hat{j}$$

$$\omega_{AB} = 1,25 \text{ rad/sn}$$

$$V_B = 18 \text{ cm/sn}$$

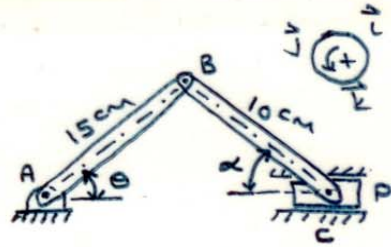
$$\vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B} = \vec{V}_B + \omega_{BD}\hat{k} \times \vec{r}_{D/B} = 18(\cos 30^\circ\hat{i} + \sin 30^\circ\hat{j}) + \omega_{BD}\hat{k} \times 25(\cos 30^\circ\hat{i} - \sin 30^\circ\hat{j})$$

$$V_D\hat{i} = 15,625\hat{i} + 9,06\hat{j} + 25 \cos 30^\circ \omega_{BD}\hat{j} + 25 \sin 30^\circ \omega_{BD}\hat{i}$$

$$(0 = 9,06 + 25 \cos 30^\circ \omega_{BD})\hat{j} \rightarrow \omega_{BD} = -0,42 \text{ rad/sn}$$

$$(V_D = 15,625 + 25 \sin 30^\circ (-0,42))\hat{i} \rightarrow V_D = 10,375 \text{ cm/sn}$$

Problem 6 : Şekildeki AB çubuğu saat ibresi'nin yönünde 1600 dev/dk sabit açısal hızıyla dönmektedir. $\theta = 25^\circ$ olduğu anda P pistonunun hızesini hesaplayınız.



Çözüm : $\omega_{AB} = \frac{1600 \cdot 2\pi}{60} = 167,55 \text{ rad/sn}$, $\vec{\omega}_{AB} = -167,55 \hat{k} \text{ rad/sn}$

$$\vec{v}_B = -167,55 \hat{k} \times 15(\cos 25^\circ \hat{i} + \sin 25^\circ \hat{j})$$

$$\frac{\sin \theta}{10} = \frac{\sin \alpha}{15} \rightarrow \alpha = 39,34^\circ$$

$$\vec{v}_B = -2277,8 \hat{j} + 1062,15 \hat{i}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{C/B} = -2277,8 \hat{j} + 1062,15 \hat{i} + \omega_{BC} \hat{k} \times 10(\cos 39,34^\circ \hat{i} - \sin 39,34^\circ \hat{j})$$

$$v_C \hat{i} = 1062,15 \hat{i} - 2277,8 \hat{j} + 10 \cdot \cos 39,34^\circ \cdot \omega_{BC} \hat{j} + 10 \cdot \sin 39,34^\circ \cdot \omega_{BC} \hat{i}$$

$$(0 = -2277,8 + 10 \cdot \cos 39,34^\circ \cdot \omega_{BC}) \hat{j} \rightarrow \omega_{BC} = 294,67 \text{ rad/sn}$$

$$v_C = 1062,15 + 10 \cdot \sin 39,34^\circ \cdot \omega_{BC} = 2930,2 \text{ cm/sn}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad (\omega_{AB} = \text{sabit} \rightarrow \alpha_{AB} = 0)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B/A} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}) = -\omega_{AB}^2 \cdot \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = -(167,55)^2 \cdot (15 \cdot \cos 25^\circ \hat{i} + 15 \cdot \sin 25^\circ \hat{j}) = -381641,7 \hat{i} - 177962,5 \hat{j} \text{ cm/sn}^2$$

$$\vec{a}_C = a_C \hat{i} = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B} = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BC} \times \vec{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \cdot \vec{r}_{C/B}$$

$$a_C \hat{i} = -381641,7 \hat{i} - 177962,5 \hat{j} + \alpha_{BC} \hat{k} \times 10(\cos 39,34^\circ \hat{i} - \sin 39,34^\circ \hat{j}) - (294,67)^2 \cdot 10(\cos 39,34^\circ \hat{i} - \sin 39,34^\circ \hat{j})$$

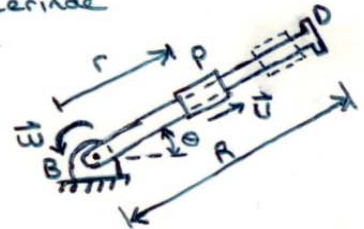
$$a_C \hat{i} = -381641,7 \hat{i} - 177962,5 \hat{j} + 7,73 \alpha_{BC} \hat{j} + 6,34 \alpha_{BC} \hat{i} - 671544,5 \hat{i} + 550436 \hat{j}$$

$$(0 = -177962,5 + 7,73 \alpha_{BC} + 550436) \hat{j} \rightarrow \alpha_{BC} = -48185,5 \text{ rad/sn}^2$$

$$(a_C = -381641,7 + 6,34 \alpha_{BC} - 671544,5) \hat{i} \rightarrow a_C = -1358682,3 \text{ cm/sn}^2$$

Problem 7 : Sabit $\vec{\omega}$ açısal hızıyla dönen BD çubuğu üzerinde

bir P bileziği sabit $\vec{U}$ bağıl hızıyla dışa doğru kaymaktadır. $\theta = 0$ iken $r = 0$ ve $\theta = \pi$ iken bilezik çubuk ucuna geldiğine göre P bileziğinin çubuk ucuna geldiği anda ki hızesinin sıddetini hesaplayınız.



Çözüm : $\vec{a}_P = \vec{a}_F + \vec{a}_{P/F} + \vec{a}_C$

$$\vec{a}_P = \omega^2 R \hat{i} + 0 + 2\omega \hat{k} \times U(-\hat{i}) = \omega^2 R \hat{i} - 2\omega U \hat{j}$$

$$R = Ut \quad \text{ve} \quad \pi = \omega t \rightarrow U = R/t = R\omega/\pi$$

$$\vec{a}_P = \omega^2 R \hat{i} - 2\omega \frac{R\omega}{\pi} \hat{j} = \omega^2 R \hat{i} - \frac{2R\omega^2}{\pi} \hat{j}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r} + \vec{r} \times (\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r}) + \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} + 2 \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}$$

Problem 8: Şekildeki B bileziği 75 cm/s ile sabit bir hızla C ye doğru kayıyor. Anı dönme merkezî yöntemi kullanılarak $\theta = 15^\circ$ olduğunda, (a) AB çubuğunun açısal hızını, (b) A bileziğinin hızını hesaplayınız.

Ex 2.2.11: $\vec{V}_B = 75(-\sin 45^\circ \vec{i} + \cos 45^\circ \vec{j}) = -53\vec{i} + 53\vec{j}$

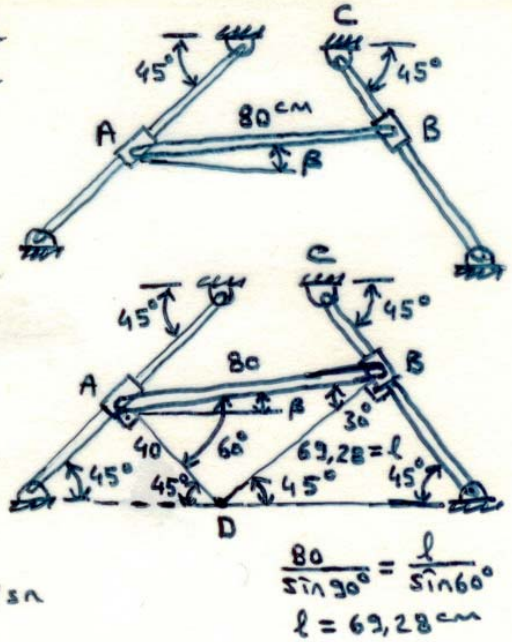
a) $\vec{v}_B = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} \rightarrow$

$$\rightarrow -53\vec{i} + 53\vec{j} = \omega_{AB} \vec{k} \times [69,28(\sin 45^\circ \vec{i} + \cos 45^\circ \vec{j})]$$

$$\omega_{AB} = 1,082 \text{ rad/s}$$

$$\vec{V}_A = 1.082 \vec{k} \times [40(\cos 45^\circ \vec{j} - \sin 45^\circ \vec{i})]$$

$$\vec{v}_A = -30,6\vec{i} - 30,6\vec{j} \text{ cm/sn} \quad v_A = 43,27 \text{ cm/sn}$$



6. RİJİT CİSİMLERİN DÜZLEMSEL HAREKETİ: KUVVETLER VE İVMELER

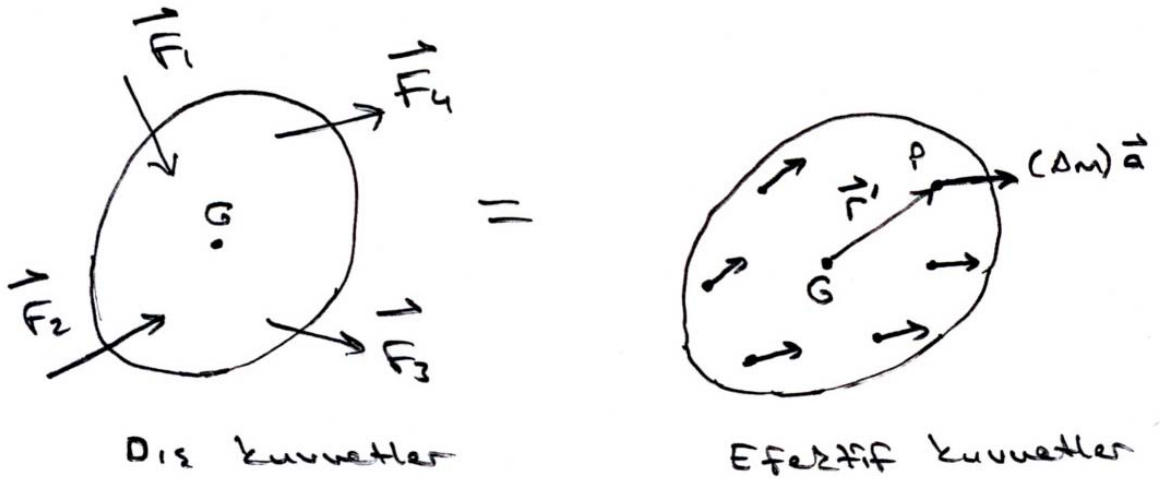
6.1. Giriş

Bu bölümde, *rijit cisimlerin kinetiğini*, yani cisim üzerine etkiyen kuvvetler, cismin şekli ve kütlesi ile ortaya çıkan hareket arasındaki bağıntılar incelenecektir. Bölüm 2 de 4 e kadar cisim bir maddesel nokta olarak, yani cismin bütün kütesinin bir noktada toplandığı ve kuvvetlerin bu noktaya etki ettiği kabul edilerek benzer bağıntılar incelenmişti. Şimdi cismin şeklini ve kuvvetlerin etki noktalarının doğru konumları tam olarak göz önüne alınacaktır. Bunun yanı sıra cismin yalnızca bir bütün olarak hareketi ile değil, kendi ağırlık merkezi etrafındaki hareketi ile de uğraşacağız.

Bu bölümdeki inceleme doğrudan $\vec{F} = m\vec{a}$ denkleminde dayanacak ve iki bakımdan kısıtlandırılacaktır: (1) Rijit cismin sadece *düzlemsel hareket* yaptığı, yani cismin her noktasının sabit bir karşılaştırma düzlemine olan uzaklıklarının değişmediği kabul edilecektir. (2) Rijit cisimler sadece düzlem levhalardan ve karşılaştırma düzlemine göre simetrik cisimlerden oluşacaktır.

6.2. Rijit bir cismin düzlemsel hareketi

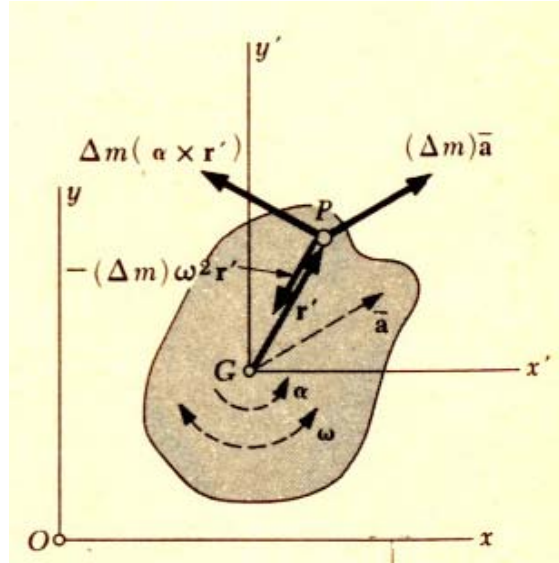
Çeşitli $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ kuvvetlerinin etkisi altında kendi düzleminde hareket eden ve kütlesi m olan bir rijit levha ele alınsın. D' Alembert ilkesi gereğince, levha üzerine etkiyen dış kuvvetler, levhayı oluşturan çeşitli maddesel noktaların efektif kuvvetlerine eşdeğer olmalıdır (Şekil 6.1). Δm kütleli bir maddesel noktanın efektif kuvvetinin $(\Delta m)\vec{a}$ olduğu bilinmektedir.



Şekil 6.1

Eğer efektif kuvvetler sistemini levhanın G kütle merkezine etkiyen eşdeğer bir vektör ile bir vektör çiftine indirgersek rijit bir levhanın düzlemsel hareketi için d'Alembert ilkesinin daha kullanışlı bir ifadesini elde ederiz. Vektör, levhanın çeşitli noktalarının efektif kuvvetlerini toplayarak, vektör çiftinin çiftinin momenti ise bunların G ye göre momentlerinin toplamını alarak elde edilir.

Kısım 5.4 den bilindiği gibi G kütle merkezi karşılaştırma noktası olarak seçilirse levhanın bir P maddesel noktasının $\vec{a}$ ivmesi, G nin $\vec{\ddot{a}}$ ivmesi ile, P nin G ye bağlı ve sabit



Şekil 6.2

doğrultudaki bir takıma göre $\vec{a}'$ ivmesinin toplamı olarak belirlenebilir. P nin G ye göre yer vektörü $\vec{r}'$ ile gösterilir ve (5.19) bağıntısı hatırlanırsa

$$\vec{a} = \vec{\ddot{a}} + \vec{a}' = \vec{\ddot{a}} + \vec{a}'_t + \vec{a}'_n = \vec{\ddot{a}} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' - \omega^2 \vec{r}'$$

yazılır; burada $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\omega}$ sırasıyla levhanın göz önüne alınan zamandaki açısal ivme ve açısal hızını gösterir. P maddesel noktasını efektif kuvveti Şekil 6.2 de görüldüğü gibi üç vektörel bileşene ayrılabilir :

$$(\Delta m) \vec{a} = (\Delta m) \vec{\ddot{a}} + \Delta m (\vec{\alpha} \times \vec{r}') - (\Delta m) \omega^2 \vec{r}' \quad (6.1)$$

$\vec{\ddot{a}}, \vec{\alpha}$ ve $\vec{\omega}$ göz önüne alınan maddesel noktadan bağımsız olduğundan levhanın çeşitli noktalarındaki efektif kuvvetlerin toplamı

$$\begin{aligned} \sum \vec{a} \Delta m &= \sum \vec{\ddot{a}} \Delta m + \sum (\vec{\alpha} \times \vec{r}') \Delta m - \sum \omega^2 \vec{r}' \Delta m \\ &= \vec{\ddot{a}} \sum \Delta m + \vec{\alpha} \times \sum \vec{r}' \Delta m - \omega^2 \sum \vec{r}' \Delta m \end{aligned}$$

olur. Burada $\sum \Delta m$ toplamı levhanın m kütesine, ve (2.9) a göre $\sum \vec{r}' \Delta m$ toplamı ise $m \vec{\bar{r}'}$ ye eşittir. G nin kendisine göre $\vec{\bar{r}'}$ yer vektörü sıfır olduğundan, bu sonuncusu da açık olarak sıfıra eşit olur. Böylece efektif kuvvetlerin toplamı

$$\sum \vec{a} \Delta m = m \vec{\ddot{a}} \quad (6.2)$$

ifadesine dönüşür. (6.2) denklemi maddesel noktalar sisteminin hareketi için çıkarılmış olan genel hale ait (2.12) denklemi ile aynı sonucu verir.

Levhanın efektif kuvvetlerinin G ye göre momentlerinin toplamı (6.1) kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}\sum (\vec{r}' \times \vec{a} \Delta m) &= \sum (\vec{r}' \times \vec{a} \Delta m) + \sum [\vec{r}' \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}') \Delta m] - \sum (\vec{r}' \times \omega^2 \vec{r}' \Delta m) \\ &= (\sum \vec{r}' \Delta m) \times \vec{a} + \sum [\vec{r}' \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}') \Delta m] - \omega^2 \sum (\vec{r}' \times \vec{r}') \Delta m\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadede $\sum \vec{r}' \Delta m$ ve $\vec{r}' \times \vec{r}'$ sıfır olduğundan yukarıdaki ifadede sadece sağ taraftaki ikinci terim kalır. Şekil 6.2 ye bakılırsa bu terimin $\vec{\alpha}$ ile aynı doğrultuda (yani levhaya dik) ve $\alpha \sum r'^2 \Delta m$ şiddetinde bir vektör olduğu kolayca sağlanabilir. $\sum r'^2 \Delta m$ toplamının levhanın ağırlık merkezinden geçen ve levha düzlemine dik bir eksene göre $\bar{I}$ atalet momentini gösterdiği hatırlanırsa efektif kuvvetlerin G ye göre momentlerinin toplamı olarak aşağıdaki eşitlik elde edilir :

$$\sum (\vec{r}' \times \vec{a} \Delta m) = \bar{I} \vec{\alpha} \quad (6.3)$$

(6.2) ve (6.3) denklemleri Şekil 6.3 de gösterilmiştir. Böylece şu sonuca varılır ki, **dış kuvvetler sistemi G den geçen $m \vec{a}$ vektörü ile $\bar{I} \vec{\alpha}$ vektör çiftine eşdeğerdir.** Levha için çıkarılmış olan bu sonuçların karşılaştırma düzlemine göre simetrik olan rijit bir cisim için de geçerli olduğuna değinmek yerinde olur.



Şekil 6.3

Şekil 6.3 de görülen ilişkiyi cebirsel olarak, şekildeki kuvvetlerin ve vektörlerin x ve y bileşenleri ile bunların keyfi bir A noktasına göre momentlerini alarak yazmak mümkündür. Eğer momentler rijit cismin G ağırlık merkezine göre hesaplanırsa bu denklemler aşağıdaki şekli alırlar :

$$\sum F_x = m \bar{a}_x \quad \sum F_y = m \bar{a}_y \quad \sum M_G = \bar{I} \alpha \quad (6.4)$$

Buraya kadar çıkarılan bağıntılar genel bir düzlemsel hareket durumunu belirlemektedir (Şekil 6.3). Şekil 6.3 ten, **kinetik bakımdan**, karşılaştırma düzlemine göre simetrik olan rijit bir cismin en genel düzlemsel hareketinin, bir ötelenme ile ağırlık merkezi etrafındaki bir dönmenin toplamına getirilebileceği kolayca görülür. Şuna da değinmeliyiz ki, bu ifade tarzı, karşılaştırma noktası olarak cismin kütle merkezinin seçilmesini şart koştuğundan,

daha önce **kinematik** bakımdan yapılmış olan benzer ifade tarzından (Kısım 5.4) daha kısıtlıdır.

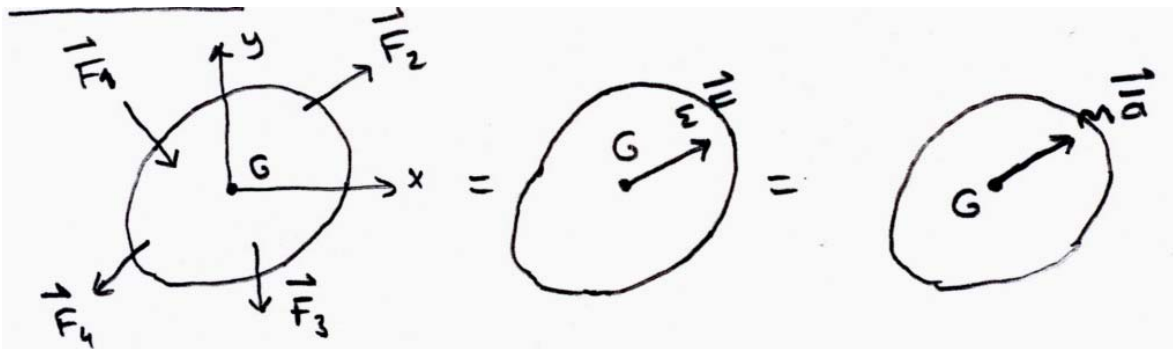
(6.4) denklemlerine bakılırsa, ilk iki denklemin, kütlesi m olan ve $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots$ kuvvetlerinin etkisi altında bulunan maddesel bir noktanın hareket denklemlerine eşdeğer olduğu görülür. Böylece şu sonuca varılır: **Düzlemsel bir harekette rijit bir cismin G kütle merkezi, cismin bütün kütlesi bu noktada toplanmış ve dış kuvvetler de bu noktaya etkiyormuş gibi hareket eder.** Bu sonucun daha önce kısım 2.5 de, genel bir maddesel noktalar sistemi için, maddesel noktaların rijit cisim teşkil etmesinin gerekmediği halde elde edilmiş olduğunu hatırlayalım. O halde kısım 2.5 de söylenildiği gibi, dış kuvvetler sistemi her zaman G den geçen tek bir $m\vec{a}$ vektörüne dönüştürülemez. Bu sebeple rijit bir cismin genel düzlemsel hareketinde, **cisim üzerine etkiyen dış kuvvetlerin bileşkesi, cismin kütle merkezinden geçmez.**

6.3. Bağlı düzlemsel hareket

Birçok mühendislik problemleri rijit cisimlerin, verilen çeşitli bağların etkisi altındaki hareketi ile uğraşır. Örneğin, kranklar sabit bir mil etrafında dönmeye, tekerlekler kaymaksızın yuvarlanmaya, biyeller önceden belirlenen birtakım hareketler yapmaya zorlanırlar. Bütün bu hallerde söz konusu olan cismin G kütle merkezinin $\vec{a}$ ivmesinin bileşenleri ile $\vec{\alpha}$ açısal ivmesi arasında belirli bağıntılar mevcuttur. Bu tür bir harekete **bağlı hareket** adı verilir.

Bağlı bir düzlemsel hareketle ilgili bir problemin çözümünde önce problemin **kinematik çözümü** yapılmalıdır. Aşağıda bazı bağlı hareket türleri verilmiştir.

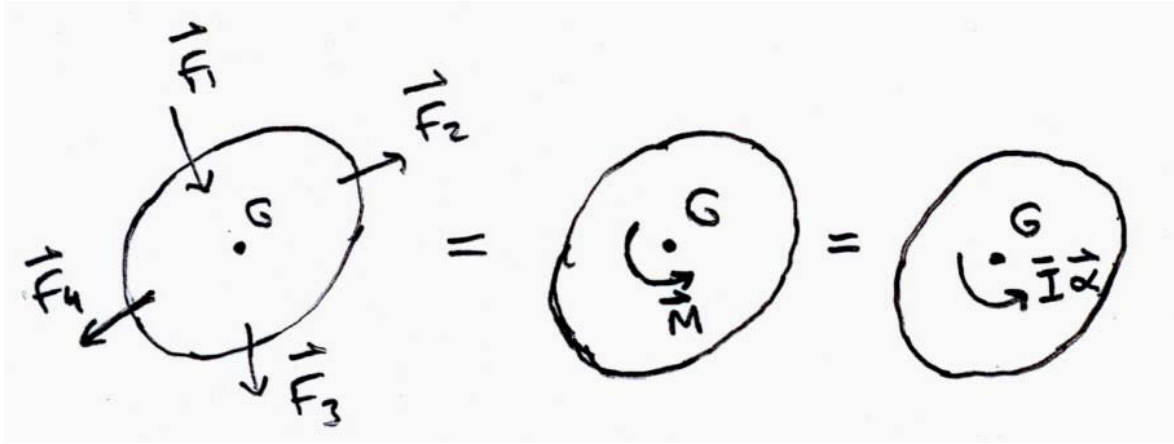
Ötelenme: Eğer bir rijit cisim bir ötelenme hareketi yapmaya zorlanırsa açısal ivmesi özdeş olarak sıfıra eşit olur ve efektif kuvvetler ise G den geçen bir $m\vec{a}$ vektörüne indirgenir (Şekil 6.4). Böylece, ötelenme halinde rijit cisim üzerine etkiyen dış kuvvetlerin bileşkesi cismin kütle merkezinden geçer ve $m\vec{a}$ ya eşit olur.



Şekil 6.4

Ağırlık merkezi etrafında dönme: Eğer bir levha, veya daha genel olarak karşılaştırma düzlemine göre simetrik bir cisim, G ağırlık merkezinden geçen ve karşılaştırma düzlemine dik olan bir eksen etrafında dönmeye zorlanırsa, bu cisme **ağırlık merkezi etrafında dönüyor** denir. $\vec{a}$ ivmesi özdeş olarak sıfır olduğundan cismin efektif kuvvetleri bir $\vec{I}\vec{\alpha}$

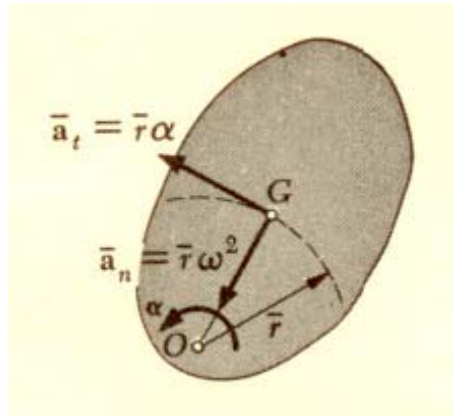
vektör çiftine indirgenmiş olur(Şekil 6.5). Buna göre ağırlık merkezi etrafında dönen bir cisme etkiyen dış kuvvetler bir $\vec{I} \vec{\alpha}$ vektör çiftine eşdeğer olurlar.



Şekil 6.5

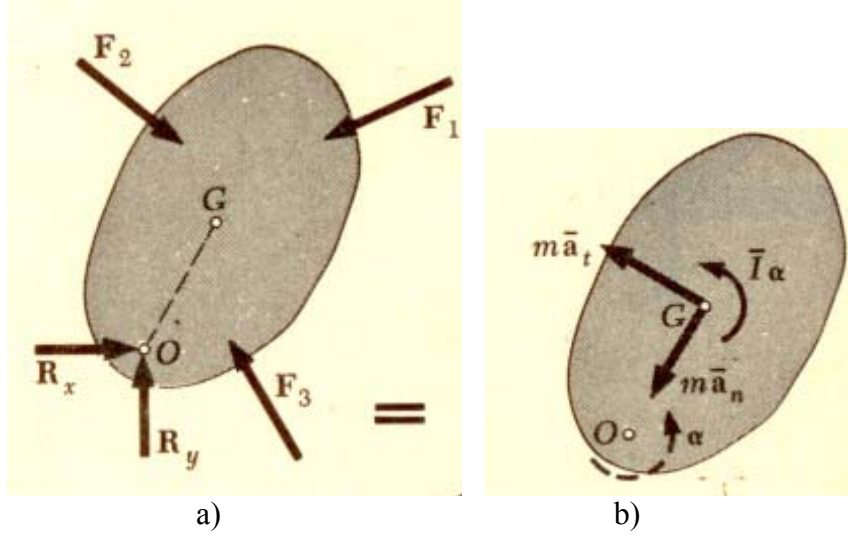
Keyfi bir nokta etrafında dönme: Bu hareket rijit bir cismin kütle merkezinden geçmeyen bir eksen etrafında dönmeye zorlanmasından meydana gelir. Böyle bir harekette cismin G kütle merkezi dönme ekseninin karşılaştırma düzlemini kestiği O noktası etrafında $\bar{r}$ yarıçaplı bir çember çizer (Şekil 6.6). OG doğrusunun açısal hızı ve açısal ivmesi sırasıyla $\bar{\omega}$ ve $\bar{\alpha}$ ile gösterilirse, G nin ivmesinin teğetsel ve normal bileşenleri için aşağıdaki ifadeler elde edilir :

$$\bar{a}_t = \bar{r} \alpha \quad \bar{a}_n = \bar{r} \omega^2 \quad (6.5)$$



Şekil 6.6

OG doğrusu cisme ait bir doğru olduğundan, bunun $\bar{\omega}$ açısal hızı ile $\bar{\alpha}$ açısal ivmesi, aynı zamanda, cismin G ye göre olan hareketindeki açısal hızı ile açısal ivmesini gösterir. Bu nedenle (6.5) denklemleri, G kütle merkezinin hareketi ile cismin G etrafındaki hareketi arasında mevcut kinematik bağıntıyı tanımlar. Elde edilmiş olan bu denklemlerdeki $\bar{a}_t$ ve $\bar{a}_n$ yi yok etmek için D'Alembert ilkesi (Şekil 6.7) kullanılmalıdır.



Şekil 6.7

Sırası ile Şekil 6.7 nin a ve b parçalarında görülen kuvvetlerin ve vektörlerin O noktasına göre yazılan momentlerini eşitleyerek

$$\sum M_o = \bar{I} \alpha + (m \bar{r} \alpha) \bar{r} = (\bar{I} + m \bar{r}^2) \alpha$$

bulunur. Oysa Steiner teoremine göre $I_o = \bar{I} + m \bar{r}^2$ olur, burada I_o rijit cismin sabit eksene göre atalet momentini gösterir. Buna göre

$$\sum M_o = I_o \alpha \quad (6.6)$$

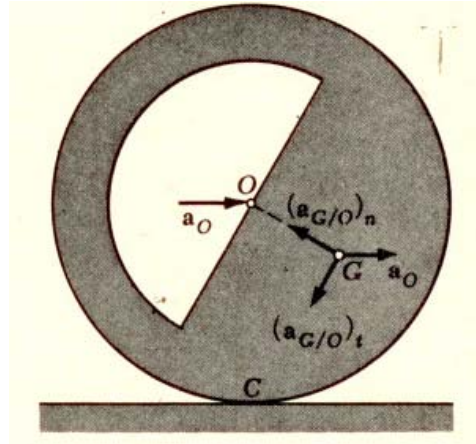
yazılır. (6.6) formülü dış kuvvetlerin sabit O noktasına göre momentlerinin toplamı ile $I_o \alpha$ arasında önemli bir bağıntıyı göstermekle birlikte açıkça anlaşılmalıdır ki, bu formül dış kuvvetler sisteminin, $I_o \alpha$ şiddetinde bir vektör çiftine eşdeğer olduğu anlamına gelmez. Efektif kuvvetler sistemi, dolayısıyla dış kuvvetler sistemi, sadece O ile G çakıştığı, yani ***hareket sadece ağırlık merkezi etrafında bir dönme hareketi olduğu zaman***, bir vektör çiftine indirgenir (Kısım 6.2). Daha genel hal olan keyfi bir nokta etrafındaki dönme hareketi halinde dış kuvvetler sistemi bir vektör çiftine indirgenmez.

Keyfi bir nokta etrafındaki dönme hareketinin özel bir hali ilginçtir; bu, $\vec{\omega}$ açısal hızının sabit olduğu ***düzgün dönme*** hareketidir. Bu durumda $\vec{\alpha}$ sıfır olduğundan vektör çifti ortadan kalkar ve sadece normal bileşen kalır. Bu bileşen (buna merkezci kuvvet de denir) rijit cismi dönme eksenini etrafında tutan bileşendir.

Yuvarlanma hareketi: Düzlemsel hareketin diğer önemli bir tipi de bir disk veya tekerleğin bir düzlem üzerindeki yuvarlanma hareketidir (Şekil 6.8). Diskin dengelendiği, yani kütle merkezi ile geometrik merkezinin çakıştığı kabul edilirse, kaymasız bir yuvarlanma için, G nin aldığı $\bar{s}$ yolu $\bar{s} = r\theta$ dır, burada r disk yarıçapıdır. Bu bağıntı iki kere türetilirse

$$\bar{a} = r\alpha \quad (6.7)$$

temel bağıntıdan göz önüne alınan problemin çözümüne en uygun düşen izdüşüm ve moment denklemlerini çıkarmak tercih edilir.



Şekil 6.9

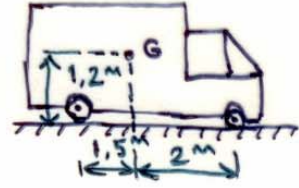
Şekil 6.3 de görülen dış kuvvetlerle efektif kuvvetlerin eşdeğerlilik ilkesi, yani rijit cisme uygulanan kuvvetler ile bunlardan meydana gelen doğrusal ve açısal ivmeler arasındaki bağıntıyı vektörel olarak gösteren serbest cisim diyagramlarının kullanılması, (6.4) denklemlerinin körü körüne uygulanmasına göre önemli bir üstünlük sağlar. Bu üstünlükler aşağıdaki şekilde özetlenebilir :

1. Herşeyden önce resimli bir gösterim kullanıldığından kuvvetlerin cismin hareketi üzerine etkisi daha açık bir anlayış kazanır.
2. Bu tür bir yaklaşım bir dinamik problemin çözümünü iki parçaya bölme imkanını sağlar: Birinci parçada problemin kinematik ve kinetik özelliklerinin ayrılması bizi Şekil 6.3 deki serbest cisim diyagramına götürür; ikinci parçada ise elde edilmiş olan diyagram işe karışan çeşitli kuvvetlerin çözümlemesinde kullanılır.
3. Rijit bir cismin düzlemsel hareketinin incelenmesi için, söz konusu özel hareket şeklinden bağımsız olarak, tek bir yol bulunmuş olur. Göz önüne alınan çeşitli hareketlerin kinematiği bir halden ötekine değiştiği halde kinetikteki çözüm yolu daima aynı kalır. Her durumda dış kuvvetleri, G nin hareketini belirleyen $m\vec{a}$ vektörünü ve cismin G etrafındaki dönme hareketine ait $\vec{I}\alpha$ vektör çiftini gösteren bir diyagram çizeceğiz.
4. Rijit bir cismin düzlemsel hareketinin burada yapıldığı gibi, bir ötelenme ile ağırlık merkezi etrafındaki bir dönme hareketine bölünmesi, mekaniğin incelenmesinde baştan başa etkili olarak uygulanan temel bir kavramdır.

6.5. Rijit cisimlerden meydana gelen sistemler

Bir evvelki kısımda açıklanan yöntem, birbirlerine bağlı çeşitli rijit cisimlerin düzlemsel hareketleriyle ilgili problemlerde de kullanılabilir. Sistemin her parçası için Şekil 6.3 e benzer bir diyagram çizilebilir. Bu diyagramlardan elde edilmiş olan hareket denklemleri bir arada çözülür.

Problem 1: Şekildeki kanyonun hızı 10 m/s iken aniden fren yapıyor ve kanyon duruncaya kadar 8 m ilerliyor. Kanyon kaydığı sıradan tekerlerdeki normal reaksiyonların şiddetlerini ve sürtünme kuvvetlerini hesaplayınız.

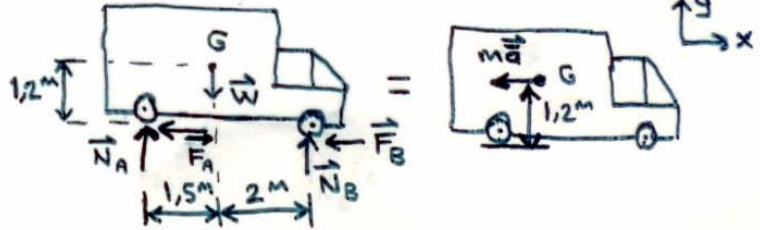


Çözüm: $V^2 = V_0^2 + 2as$

$$0 = 10^2 + 2a \cdot 8 \rightarrow a = -6,25 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{F}_A = -F_A \vec{i}; \vec{F}_B = -F_B \vec{i}$$

$$\vec{N}_A = N_A \vec{j}; \vec{N}_B = N_B \vec{j}$$



$$\Sigma \vec{F} = M\vec{a} = -W\vec{j} + N_A\vec{j} + N_B\vec{j} - N_A \cdot \mu \cdot \vec{i} - N_B \cdot \mu \cdot \vec{i} = M(-6,25)\vec{i}$$

$$(N_A + N_B - W = 0)\vec{j} \quad (1)$$

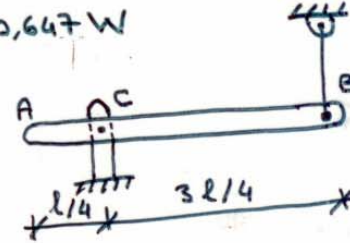
$$-N_A \mu - N_B \mu = -6,25 M \quad (2)$$

$$(\Sigma \vec{M}_A)_{dis} = (\Sigma \vec{M}_A)_{ef}$$

$$1,5\vec{i} \times (-W\vec{j}) + 3,5\vec{i} \times (N_B\vec{j}) = 1,2\vec{j} \times (-6,25 M\vec{i})$$

$$-1,5 W \vec{k} + 3,5 N_B \vec{k} = 7,5 \cdot \frac{W}{g} \vec{k} \quad (3) \rightarrow N_B = 0,647 W$$

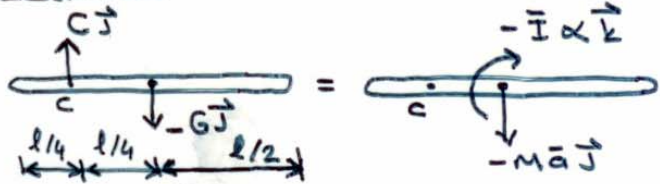
(1) den $N_A = 0,353 W$; (2) den $\mu = 0,637$



Problem 2: l uzunluklu üniform $w \text{ (N/m)}$ ağırlıklı bir kiris şekilde görüldüğü gibi mesnetlerdir. Eğer B'deki ip aniden kesilirse
a) C'deki mesnet reaksiyonunu,
b) B noktasının ymeşirini hesaplayınız.

Çözüm: $I = \frac{1}{12} M l^2$; $G = w \cdot l$

$$m = \frac{wl}{g}; \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} = -\alpha \vec{k} \times \frac{l}{4} \vec{i} = -\alpha \cdot \frac{l}{4} \vec{j}$$



$$\Sigma \vec{F} = C\vec{j} - G\vec{j} = -m \cdot \frac{\alpha l}{4} \vec{j} \quad (1) \quad \Sigma \vec{F} = M\vec{a} \text{ dan bulunduk.}$$

$$(\Sigma \vec{M}_C)_{dis} = (\Sigma \vec{M}_C)_{ef}$$

$$\frac{l}{4} \vec{i} \times (-wl\vec{j}) = \frac{l}{4} \vec{i} \times (-\frac{\alpha l}{4} \vec{j}) \cdot \frac{wl}{g} - \frac{1}{12} \frac{wl}{g} \cdot l^2 \cdot \alpha \vec{k}$$

$$-\frac{wl^2}{4} \vec{k} = \frac{wl^3 \alpha}{16g} \vec{k} - \frac{1}{12} \frac{wl^3}{g} \alpha \vec{k} \rightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{\alpha l}{16g} - \frac{\alpha l}{12g} = -\frac{7\alpha l}{48g} \quad g=10 \text{ alınacak}$$

$$\alpha = \frac{480}{28l} = \frac{17,14}{l}; \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{B/C} = -\frac{17,14}{l} \vec{k} \times \frac{3l}{4} \vec{i} = -12,855 \vec{j} \text{ m/s}^2$$

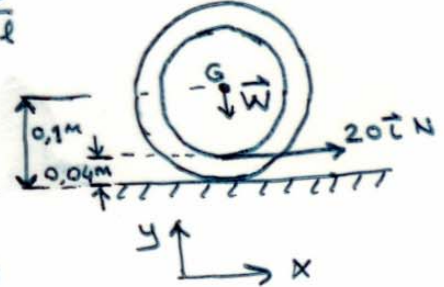
(1) den $C = 0,5715 W l$ elde edilir.

II. yol C noktasına göre dönme $I_C = \frac{1}{12} \frac{Wl}{g} l^2 + \frac{Wl}{g} \cdot \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{W \cdot l^3}{g} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right)$

$$I_C = \frac{Wl^3}{g} \cdot \frac{7}{48} = \frac{7Wl^3}{48g} ; (\sum \vec{M}_C)_{dış} = I_C \cdot (-\alpha \vec{k}) \Rightarrow \frac{l}{4} \vec{i} \times (-G\vec{j}) = I_C (-\alpha \vec{k})$$

$$- \frac{Wl^2}{4} \vec{k} = - \frac{7Wl^3}{48g} \alpha \rightarrow \alpha = \frac{48g}{28l} = \frac{480}{28l}$$

Problem 3: Bir tekerlin iç tamburuna sarılmış olan 20 N luk kuvvetle yatay olarak çekilmektedir. Tekerleğin ağırlığı 50 N ve atalet yarıçapı 7 cm dir. $\mu_s = 0,2$ ve $\mu_k = 0,15$ ise G nin tıynetini ve tekerlin ağısal tıynetini bulunuz.



Çözüm: Sadece yuvarlanma var, kayma yok kabulü ile çözüme başlıyoruz.

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}$$

$$-W\vec{j} + N\vec{j} + 20\vec{i} - F\vec{i} = M(-\alpha \vec{k} \times 0,1\vec{j}) = 0,1M\alpha \vec{i} \quad (1)$$

$$\vec{j} \cdot (-W + N = 0) \rightarrow W = N ; 20\vec{i} - F\vec{i} = 0,1M\alpha \vec{i}$$

$$(\sum \vec{M}_C)_{dış} = (\sum \vec{M}_C)_{ef}$$

$$0,04\vec{j} \times 20\vec{i} = 0,1\vec{j} \times (0,1M\alpha \vec{i}) - \vec{I}\alpha \vec{k} \rightarrow -0,8\vec{k} = -0,01M\alpha \vec{k} - 0,025\alpha \vec{k} \quad (2)$$

$$(2) \text{ den } \alpha = 0,8 / 0,076 = 10,53 \text{ rad/sn}^2$$

$$(1) \text{ den } 20 - F = 0,1 \cdot \frac{50}{9,81} \cdot 10,53 \rightarrow F = 14,63 \text{ N} ; F_{max} = 50 \cdot 0,2 = 10 \text{ N}$$

$F > F_{max}$ olduğundan basta yapışma kabul yanlı olup, kayma ile yuvarlanmanın beraber olduğu ortaya çıkar.

Yuvarlanma ve kayma var:

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} \Rightarrow 20\vec{i} - F\vec{i} + N\vec{j} - W\vec{j} = M\vec{a}$$

Kaymalı yuvarlanma durumunda $F_{max} = N \cdot \mu_k = 50 \cdot 0,15 = 7,5 \text{ N}$

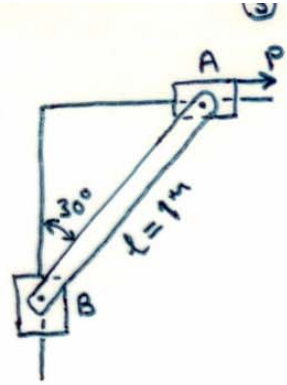
$$20 - 50 \cdot 0,15 = \frac{50}{9,81} \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{a} = 2,45 \text{ m/sn}^2$$

$$(\sum \vec{M}_C)_{dış} = (\sum \vec{M}_C)_{ef}$$

$$0,04\vec{j} \times 20\vec{i} = -0,025\alpha \vec{k} + 0,1\vec{j} \times \frac{50}{9,81} \cdot 2,45\vec{i}$$

$$-0,8\vec{k} = -0,025\alpha \vec{k} - 1,249\vec{k} \rightarrow \alpha = -18 \text{ rad/sn}^2$$

Problem 4: Ağırlığı 5 N olan ince bir çubuk A ve B uçlarından iki bileziğe bağlanmış olup, bu bilezikler şekilde görüldüğü gibi çubuklar üzerinde sürtünmesiz olarak kaymaktadır. A bileziğine uygulanan yatay P kuvveti çubuğu saat ibreleri yönünde 5 rad/s^2 açısal ivmesiyle harekete başlatıyor. Bileziklerin ağırlığı ihmal edildiğine göre
a) $P = ?$; b) A ve B'deki reaksiyonları hesaplayınız.



Çözüm: Kinematik Çözümleme

$$\alpha = -5 \vec{k} \text{ rad/s}^2 ; \omega = 0 \text{ başlangıç değerleri}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}$$

$$a_B \vec{j} = a_A \vec{i} + \alpha (-\vec{k}) \times (-\cos 60^\circ \vec{i} - \sin 60^\circ \vec{j}) = a_A \vec{i} + \alpha \cos 60^\circ \vec{j} - \alpha \sin 60^\circ \vec{i}$$

$$\vec{i} (a_A = \alpha \sin 60^\circ) \rightarrow a_A = 4,33 \text{ m/s}^2$$

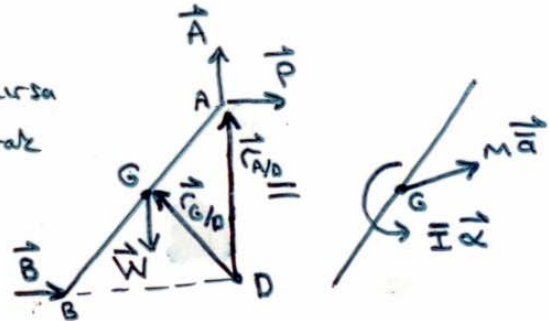
$$\vec{j} (a_B = \alpha \cos 60^\circ) \rightarrow a_B = 2,5 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{a}_{G/B} = 2,5 \vec{j} + 5 (-\vec{k}) \times (0,5 \cos 60^\circ \vec{i} + 0,5 \sin 60^\circ \vec{j}) = 2,165 \vec{i} + 1,25 \vec{j} \text{ m/s}^2$$

Kinetik Çözümleme

D gibi bir noktaya göre moment alırsa
A ve B reaksiyonları bilinmeyen olarak
denkleme girmez:

$$(\sum \vec{M}_D)_{diz} = (\sum \vec{M}_D)_{ef}$$



$$\vec{r}_{G/D} \times \vec{W} + \vec{r}_{A/D} \times \vec{P} = \vec{r}_{G/D} \times M \vec{a} + \vec{I} \alpha$$

$$0,5 (-\cos 60^\circ \vec{i} + \sin 60^\circ \vec{j}) \times (-5 \vec{j}) + 1 \cdot \sin 60^\circ \vec{j} \times P \vec{i} =$$

$$= 0,5 (-\cos 60^\circ \vec{i} + \sin 60^\circ \vec{j}) \times \frac{5}{10} (2,165 \vec{i} + 1,25 \vec{j}) + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{10} \cdot 1^2 (-5 \vec{k})$$

$$1,25 \vec{k} - 0,867 P \vec{k} = -0,208 \vec{k} - 0,125 \cdot 1,25 \vec{k} - 0,217 \cdot 2,165 \vec{k} \rightarrow P = 2,41 \text{ N}$$

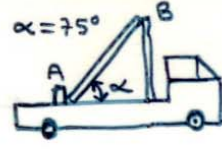
$$\sum \vec{F}_x = M \vec{a}_x \vec{i}$$

$$P \vec{i} + B \vec{i} = 0,5 \cdot 2,165 \vec{i} \rightarrow B = -1,33 \text{ N}$$

$$\sum \vec{F}_y = M \vec{a}_y \vec{j}$$

$$A \vec{j} - 5 \vec{j} = 0,5 \cdot 1,25 \vec{j} \rightarrow A = 5,625 \text{ N}$$

Problem 5: Bir kanyona boyu 2m olan bir tahta alt ucu kanyon kasası üzerindeki bir A bloğuna ve üst ucu kasa devanına dayanacak şekilde yerleştirilmiştir. Tahtanın şekilde görülen konumda kalabilmesi için kanyonun mümkün olan maksimum genişliği ne olur?



Gözlem: $\alpha = 0$ (limit durumu)

$$\sum \vec{M}_G = \vec{I} \times \vec{\alpha} \quad \text{Burada } \alpha = 0 \text{ durumu arıyoruz.}$$

$$\sum \vec{M}_G = 0 = \vec{r}_{A/G} \times (\vec{F} + \vec{R}) = -1 \cdot (\cos 75^\circ \vec{i} + \sin 75^\circ \vec{j}) \times (F \vec{i} + R \vec{j})$$

$$F \cdot \sin 75^\circ \vec{k} - R \cdot \cos 75^\circ \vec{k} = 0 \quad (1) \quad \sum F_y = 0 = -W \vec{j} + R \vec{j} = 0 \rightarrow R = W \quad (2)$$

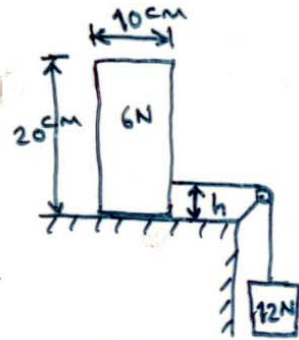
$$(1) \text{ den } F \cdot \sin 75^\circ = R \cdot \cos 75^\circ = W \cdot \cos 75^\circ$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \rightarrow F \vec{i} + R \vec{j} - W \vec{j} = m \vec{a} \rightarrow \begin{cases} R = W \\ F = m \vec{a} \end{cases}$$

$$m \vec{a} \cdot \sin 75^\circ = W \cdot \cos 75^\circ = m g \cdot \cos 75^\circ \rightarrow \vec{a} = g \cdot \cos 75^\circ / \sin 75^\circ = 2,63 \text{ m/s}^2$$

Bu durum limit durum olup, söz konusu tane tahta B de reaksiyon almaz.

Problem 6: Yüksekliği 20 cm, kalı 10 cm ve ağırlığı 6 N olan bir silindir yatay bir düzlemde sürtünmesiz olarak kaymaktadır. Bu silindire şekilde görüldüğü gibi 12 N luk bir ağırlık bağlanmıştır.



- Ağırlığı serbest bırakılmasından sonra silindirin hızı ve ivmesi kuvveti,
- Hareket süresince silindirin devrilişmesi için h'nin alt ve üst sınırları hesaplayınız.

Gözlem: a) $\sum \vec{F} = \sum m \vec{a} \rightarrow -12 \vec{j} = 1,8 \cdot a (-\vec{j}) \rightarrow a = 6,54 \text{ m/s}^2$

$$\begin{aligned} \uparrow T \vec{j} &= \downarrow -12 \vec{j} \\ (-12 + T) \vec{j} &= \frac{12}{10} \cdot (-6,54 \vec{j}) \rightarrow T = 4 \text{ N} \\ \sum F_y = 0 \rightarrow R - W = 0 \rightarrow R = W \end{aligned}$$

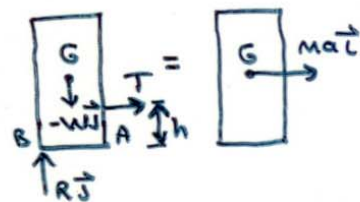
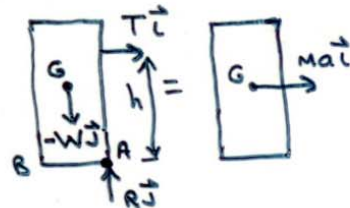
b) Üst limit : $(\sum \vec{M}_G)_{\text{dış}} = (\sum \vec{M}_G)_{\text{ef}}$

$$\begin{aligned} (h - 10) \vec{j} \times T \vec{i} + 5 \vec{i} \times R \vec{j} &= 0 \\ (10 - h) 4 \vec{k} + 5 \cdot 6 \vec{k} &\rightarrow h = 17,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

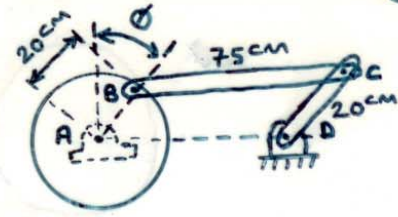
Alt limit : $(\sum \vec{M}_G)_{\text{dış}} = (\sum \vec{M}_G)_{\text{ef}}$

$$\begin{aligned} -(10 - h) \vec{j} \times T \vec{i} - 5 \vec{i} \times R \vec{j} &= 0 \\ (10 - h) T \vec{k} - 5 R \vec{k} &= 0 \\ (10 - h) \cdot 4 - 5 \cdot 6 &= 0 \rightarrow h = 2,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$2,5 \text{ cm} \leq h \leq 17,5 \text{ cm}$$



Problem 7: AB diskü, CD krankıyla birlikte 180 dev/dak hızıyla dönmektedir. $\theta = 30^\circ$ için ağırlığı 8 N olan BC biyeline B ve C pınlarından gelen kuvvetlerin dikey bileşenlerini hesaplayınız.



Cözüm: Kinematik Cözümleme

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} = \frac{180 \cdot 2\pi}{60} (-\vec{k}) \times 20 (\sin 30^\circ \vec{i} + \cos 30^\circ \vec{j})$$

$$\vec{V}_B = 326,48 \vec{i} - 188,49 \vec{j} \text{ cm/s}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \cdot \vec{r}_{B/A} = \left(\frac{180 \cdot 2\pi}{60} \right)^2 \cdot 0,2 (\sin 30^\circ \vec{i} + \cos 30^\circ \vec{j})$$

$$\vec{a}_B = -35,53 \vec{i} - 61,54 \vec{j} \text{ m/s}^2 ; \vec{a}_C = \vec{a}_B = \vec{a}$$

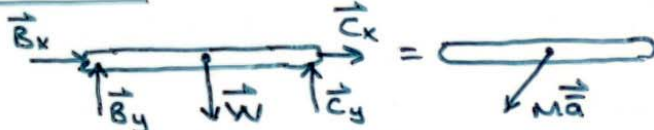
Kinetik Cözümleme

$$(\sum \vec{M}_B)_{dış} = (\sum \vec{M}_B)_{ef}$$

$$0,75 \vec{i} \times C_y \vec{j} + \frac{0,75}{2} \vec{i} \times (-8 \vec{j}) =$$

$$= \left(\frac{0,75}{2} \vec{i} \times (0,8 \cdot (-35,53 \vec{i} - 61,54 \vec{j})) \right) \rightarrow 0,75 C_y \vec{k} - 3 \vec{k} = -18,462 \vec{k} \rightarrow C_y = -20,61 \text{ N}$$

$$\sum \vec{F}_y = M \vec{a}_y \rightarrow B_y \vec{j} + C_y \vec{j} - 8 \vec{j} = 0,8 (-61,54 \vec{j}) \rightarrow B_y = -20,61 \text{ N}$$

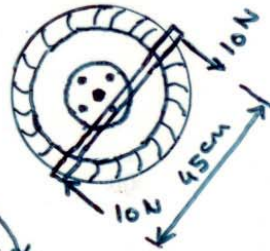
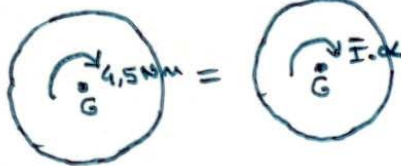


Problem 8: Bir otomobil tekeri'nin merkezinden 5 cm uzakta bulunan bir ciyata bir kuvvet çifti uygulanarak anahtarla sıkıştırılıyor. Tekerin serbestçe dönebildiği kabul edilirse açısal ivmesi ne olur? Tekerin ağırlığı = 20 N.

Atalet yarıçapı = 25 cm.

$$\text{Cözüm: } M = 10 \cdot 0,45 = 4,5 \text{ Nm}$$

$$\bar{I} = \frac{20}{g} \cdot (0,25)^2 = 0,1274 \text{ Nm s}^2$$



$$(\sum \vec{M}_G)_{dış} = (\sum \vec{M}_G)_{ef}$$

$$-4,5 \vec{k} = \bar{I} \cdot \alpha \cdot (-\vec{k}) \rightarrow -4,5 \vec{k} = 0,1274 \cdot \alpha \cdot (-\vec{k}) \Rightarrow \alpha = 35,32 \text{ rad/s}^2$$

Problem 9: Ağırlığı 70 N olan bir türbin diskü sabit 9600 dev/dak hızıyla dönmektedir. Diskin kitle merkezi O dönme merkezyle samsıktır. A diskü 0,04 N ağırlığında bir kanardan gevşeyerek fırladığı kabul edilirse, O da bu nedenle oluşacak reaksiyon ne olur?

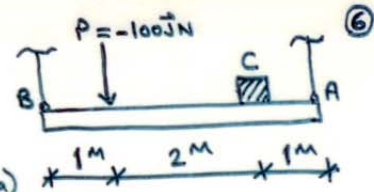
$$\text{Cözüm: } \omega = \frac{9600 \cdot 2\pi}{60} = 1005,3 \text{ rad/s}$$



$$F = \frac{0,04}{9,81} \cdot \frac{(1005,3 \cdot 0,35)^2}{0,35} = 1414,88 \text{ N}$$



Problem 10: Boyu 4 m, ağırlığı 90 N olan bir AB rijit cisim şekilde görüldüğü gibi iki kabloyla asılmıştır. AB rijit cisim üzerinde 100 N luk bir kuvvetle birlikte ağırlığı 60 N olan bir C cisim (maddesel nokta) etmektedir. Eğer B noktasındaki kablo aniden koparsa



- a) A kablосundaki çekme kuvveti,
b) A, B ve C noktalarındaki ivmeler ne olur?

Çözüm: Kinematik Çözümleme

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \alpha \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A} = \alpha \times \vec{r}_{B/A}$$

$$\omega = \dot{\omega}_0 + \alpha \cdot t^0 = 0$$

$$\vec{a}_B = \alpha \times \vec{r}_{G/A} ; \vec{a}_C = \alpha \times \vec{r}_{C/A} ; \vec{a}_B = \alpha \vec{k} \times (-4\vec{i}) = -4\alpha \vec{j}$$

$$\vec{a}_B = -2\alpha \vec{j} ; \vec{a}_C = -\alpha \vec{j} ; \bar{I}_{AB} = \frac{1}{12} \cdot 9 \cdot 4^2 = 12 = \frac{1}{12} M_{AB} \cdot l^2$$

Kinetik Çözümleme

$$(\sum \vec{M}_A)_{dis} = (\sum \vec{M}_A)_{ef} \Rightarrow \vec{r}_{O/A} \times (-100\vec{j}) + \vec{r}_{G/A} \times (-W_{AB}\vec{j}) + \vec{r}_{C/A} \times (-W_C\vec{j}) = \bar{I}_{AB} \alpha \vec{k} + \vec{r}_{G/A} \times M_{AB}(-2\alpha \vec{j}) + \vec{r}_{C/A} \times M_C(-\alpha \vec{j})$$

$$(-3\vec{i}) \times (-100\vec{j}) + (-2\vec{i}) \times (-90\vec{j}) + (-\vec{i}) \times (-60\vec{j}) = 300\vec{k} + 180\vec{k} + 60\vec{k} = 540\vec{k} \text{ Nm} = 540\vec{k} = 12\alpha \vec{k} + (-2\vec{i}) \times 9(-2\alpha \vec{j}) + (-\vec{i}) \times 6(-\alpha \vec{j}) = 12\alpha \vec{k} + 36\alpha \vec{k} + 6\alpha \vec{k}$$

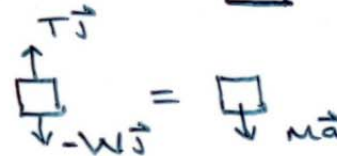
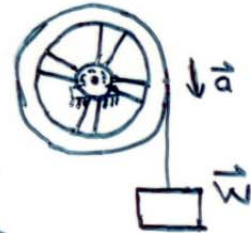
$$540\vec{k} = 54\alpha \vec{k} \rightarrow \alpha = 10 \text{ rad/s}^2$$

$$b) \vec{a}_B = -40\vec{j} \text{ m/s}^2 ; \vec{a}_A = -20\vec{j} \text{ m/s}^2 ; \vec{a}_C = -10\vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$a) \sum \vec{F} = \sum M \vec{a} \rightarrow -100\vec{j} - 90\vec{j} - 60\vec{j} + A\vec{j} = 9(-20\vec{j}) + 6(-10\vec{j})$$

$$A\vec{j} = 250\vec{j} - 180\vec{j} - 60\vec{j} = 10\vec{j} \text{ N}$$

Problem 11: Yarıçapı $R = 90 \text{ cm}$ olan bir volana sarılı bir ip ucuna $W = 20 \text{ N}$ luk bir ağırlık asılıyor. Volanın ağırlığı 200 N ve atalet yarıçapı 75 cm dir. Sistem ilk hıza hareket etmeye bırakıldığında, $2,5 \text{ m}$ lik bir düşüş sonunda W ağırlığının hızı ne olur? Yatay sürtünme ihmal edilmektedir.



Çözüm: $\vec{a} = \alpha(-\vec{k}) \times 0,9\vec{i} = -0,9\alpha \vec{j}$

$$-W\vec{j} + T\vec{j} = \frac{20}{9,81}(-0,9\alpha \vec{j}) \quad (1)$$

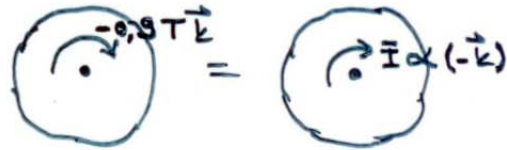
$$\bar{I} = \frac{200}{9,81} \cdot (0,75)^2 = 11,25 \text{ Nm s}^2$$

$$-0,9T\vec{k} = -\bar{I} \alpha \vec{k} = -11,25\alpha \vec{k} \quad (2)$$

(1) ve (2) den $T = 17,44 \text{ N} ; \alpha = 1,395 \text{ rad/s}^2$

$$a = 0,9\alpha = 0,9 \cdot 1,395 = 1,256 \text{ m/s}^2$$

$$V^2 = V_0^2 + 2as = 2 \cdot 1,256 \cdot 2,5 = 6,2775 \rightarrow V = 2,505 \text{ m/s}$$

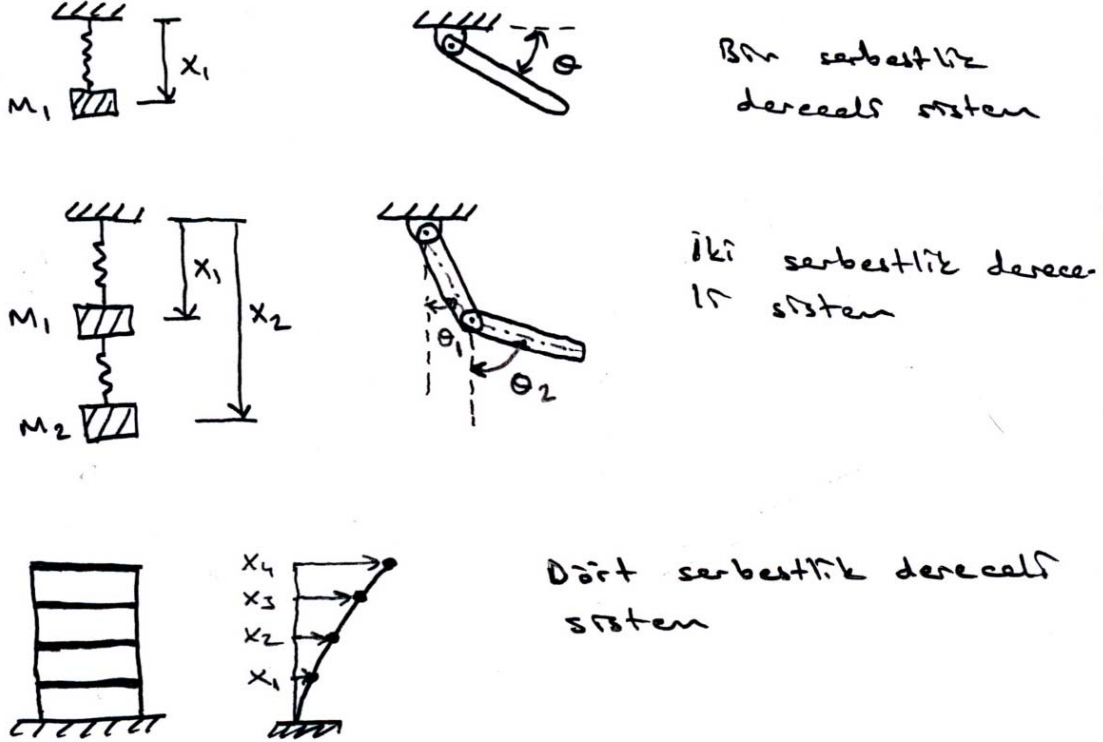


7. MEKANİK TİTREŞİMLER

7.1. Giriş

Mekanik titreşimler bir maddesel noktanın veya bir cismin denge konumu etrafındaki salınımıdır. Titreşimler gerilme artımı ve enerji kaybına sebep olduklarından ortadan kaldırılmaları veya uygun bir tertiple azaltılmaları gerekir.

Son yıllarda yüksek hızlı makine ve hafif yapıların yapımı titreşimlerin incelenmesini önemli kılmaktadır.



Burada tek serbestlik dereceli sistemler incelenecektir. Mekanik titreşim sistemin kararlı durumdan saptırılması halinde ortaya çıkar. Sistem kararlı durumdan saptırılınca ilk konumuna dönmeye çalışır. Fakat bu ilk konuma genellikle belirli bir hız ile döner. Bu hız sistemi yeniden denge konumu dışına çıkarır. Eğer sürtünme etkisi yoksa hareket sürekli devam eder. Hareketin bir tüm devrini tamamlaması için geçen zamana **titreşimin periyodu** adı verilir. Birim zamandaki devir sayısına **frekans**, ve sistemin denge konumuna göre maksimum yer değiştirmesine de **titreşimin genliği** adı verilir.

Hareketin devamını sadece geriye döndürücü kuvvetler sağlıyor ve sürtünme yoksa titreşim **serbest titreşim** olarak adlandırılır. Sisteme periyodik bir kuvvet uygulanıyor ve sürtünme yoksa ortaya çıkan hareket **sönümsüz zorlanmış titreşim**, aksi halde, periyodik kuvvet ve sürtünme olması durumunda, **sönümlü zorlanmış titreşim** olarak isimlendirilir.

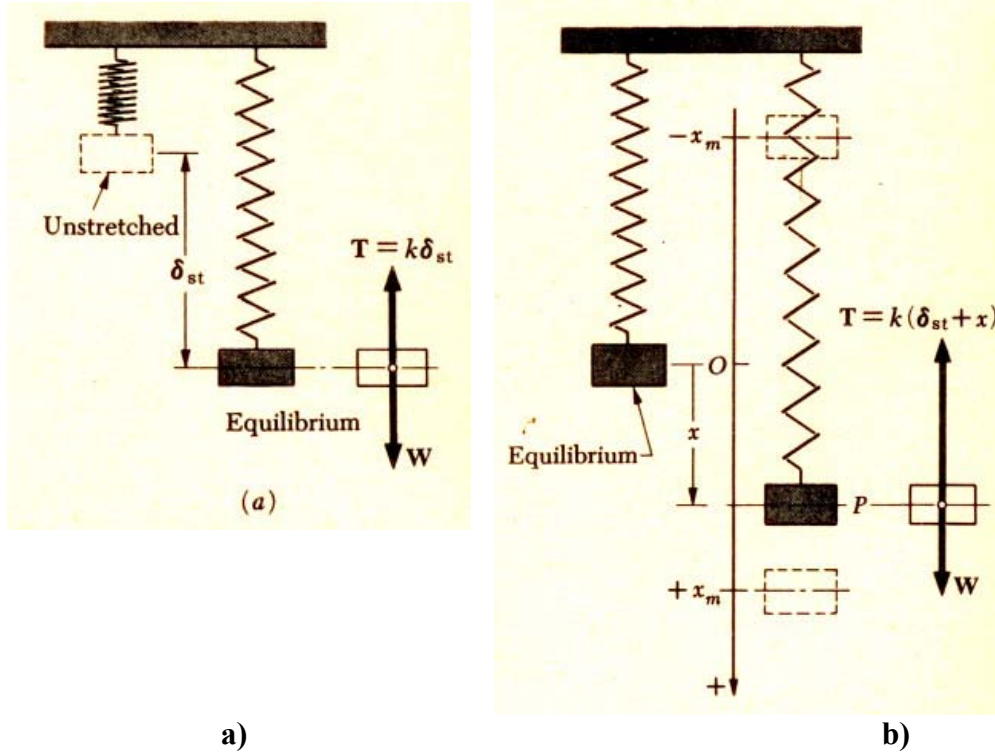
Eğer serbest bir titreşim hafif sönümlü ise genliği yavaş yavaş azalır ve bir süre sonra hareket durur. Sönüm gerçek bir titreşime engel olacak kadar büyük de olabilir; bu durumda sistem yavaş yavaş ilk konumuna döner. Sönümlü zorlanmış bir titreşim, kendisini doğuran periyodik kuvvet uygulandığı sürece devam eder. Titreşimin genliği ise söndürücü kuvvetin şiddetine bağlıdır.

7.2. Maddesel Noktaların Serbest Titreşimleri. Basit Harmonik Hareket.

Katsayısı k olan bir yaya bağlanmış ve kütlesi m olan bir cisim göz önüne alınsın (Şekil 7.1a). Bu aşamada cismin sadece kütle merkezinin hareketi ile ilgilenildiğinden cisim bir maddesel nokta olarak dikkate alınabilir. Şekil 7.1a da görüldüğü gibi statik denge durumunda

$$W = k \delta_{st} \quad (7.1)$$

olur. Burada W cismin ağırlığını, δ_{st} yayın doğal durumdan itibaren uzamasını göstermektedir. Şimdi maddesel noktanın denge konumundan x_m kadar saptırıldıktan sonra ilk hızsız olarak harekete terk edildiğini kabul edelim. Eğer x_m değeri δ_{st} den daha küçük seçilirse maddesel nokta kendi denge konumu etrafında hareket etmeye başlar ve bu şekilde, genliği x_m olan bir titreşim ortaya çıkmış olur. Şunu da unutmamak gerekir ki, maddesel noktaya $x=0$ denge konumunda bir ilk hız vermekle veya, daha genel olarak, verilen keyfi bir $x=x_o$ konumunda bir v_o ilk hızı uygulanmakla da titreşim meydana getirilebilir.



Şekil 7.1

Maddesel noktanın herhangi bir t anındaki, O denge konumundan itibaren ölçülen P konumundaki OP yer değişimi (aşağı doğru pozitif) x ile gösterilsin. $\vec{F}$ bileşke kuvveti aşağı doğru pozitif olarak alınırsa, F şiddetinin

$$F = W - k(\delta_{st} + x) = -kx \quad (7.2)$$

olduğu Şekil 7.1a dan görülür. $\vec{F}$ kuvvetinin her an O denge konumuna yönlenmiş olduğu görülmektedir. Bulunan F değeri $F=ma$ temel denkleminde götürülürse

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (7.3)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Gerek $d^2 x / dt^2$ ivmesi, gerekse x yer değişimi için, aşağı doğru pozitif olacak şekilde işaret kuralı uygulanır.

(7.3) denklemi ikinci mertebeden lineer homojen bir diferansiyel denklemdir. Burada

$$p^2 = \frac{k}{m} \quad (7.4)$$

konursa (7.3) için

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p^2 x = 0 \quad (7.5)$$

bulunur. (7.5) denklemiyle tanımlanan harekete, **basit harmonik hareket** adı verilir. Bu hareket **ivmenin, yer değiştirme ile orantılı ve ters yönde** olduğunu gösterir. (7.5) in karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + p^2 = 0 \quad (7.6)$$

olur. Bu denklemin çözümünden

$$\lambda_{1,2} = \pm i p \quad i = \sqrt{-1} \quad (7.7)$$

elde edilir. Bu durumda diferansiyel denklemin çözümü

$$x = C_1 e^{ipt} + C_2 e^{-ipt} = C_1 (\cos pt + i \sin pt) + C_2 (\cos pt - i \sin pt) \quad (7.8)$$

olur. Gerçek ve sanal kısımları ayırtmak için

$$C_1 = (m_1 + in_1) \quad C_2 = (m_2 + in_2)$$

olarak (7.8) de yerine konursa

$$x = (m_1 + in_1)(\cos pt + i \sin pt) + (m_2 + in_2)(\cos pt - i \sin pt) \quad (7.9)$$

elde edilir. Buradan

$$x = (m_1 + m_2) \cos pt + (-n_1 + n_2) \sin pt + i(n_1 + n_2) \cos pt + i(m_1 - m_2) \sin pt \quad (7.10)$$

olur. (7.10) denkleminin gerçek kısmı

$$A = (-n_1 + n_2) \quad \text{ve} \quad B = (m_1 + m_2)$$

alınarak

$$x = A \sin pt + B \cos pt \quad (7.11)$$

şeklinde elde edilir. Türev alarak, sırasıyla, t anındaki hız ve ivme elde edilir :

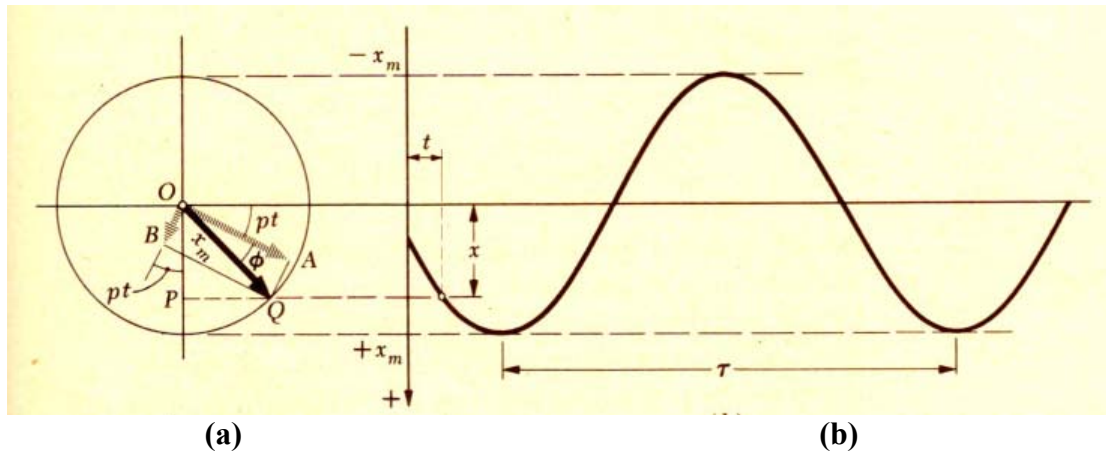
$$v = \frac{dx}{dt} = A p \cos pt - B p \sin pt \quad (7.12)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A p^2 \sin pt - B p^2 \cos pt. \quad (7.13)$$

Bu ifadelerde keyfi iki sabit olduğundan elde edilen çözüm diferansiyel denklemin genel çözümüdür. A ve B sabitlerinin değerleri hareketin **başlangıç şartlarına** bağlıdır. Genel olarak zaman için alınan $t=0$ ve yer değiştirme ve ilk hız için alınan x_o ve v_o değerleri, (7.11) ve (7.12) de yerine konursa $A = v_o / p$ ve $B = x_o$ bulunur.

Maddesel noktaların yer değiştirmesi, hızı ve ivmesi için elde edilmiş olan ifadeler daha kısa ve toplu bir şekilde yazılabilir; bunun için (7.11) ile tanımlanan $x=OP$ yer değiştirmesinin, Şekil 7.2a da görüldüğü gibi yönelen ve şiddetleri A ve B olan $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ gibi iki vektörün x doğrultusundaki bileşenlerinin toplamı olarak yazılabileceği düşünülmelidir. t

değiştikçe iki vektör de saat ibreleri yönünde döner. Ayrıca bunların $\vec{OQ}$ bileşkesinin



Şekil 7.2

şiddeti de maksimum x_m yer değiştirmesine eşit olur. Böylece P nin x eksenı boyunca yaptığı basit harmonik hareket, Q noktasının x_m yarıçaplı bir **yardımcı çember üzerinde sabit p açısal hızı** ile yaptığı hareketin, x eksenı üzerindeki izdüşümü olarak elde edilebilir. $\vec{OQ}$ vektörlerinin A ile yaptığı açı ϕ ile gösterilirse

$$OP = OQ \sin(pt + \phi) \quad (7.14)$$

yazılabilir; buradan P nin yer değişimi, hızı ve ivmesi için aşağıdaki yeni ifadeler elde edilir :

$$x = x_m \sin(pt + \phi) \quad (7.15)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = x_m p \cos(pt + \phi) \quad (7.16)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_m p^2 \sin(pt + \phi) \quad (7.17)$$

Yer değiştirme-zaman eğrisi bir sinüs eğrisi ile gösterilir (şekil 7.2b), ve yer değiştirmenin x_m maksimum değerine titreşimin **genliği** adı verilir. Yardımcı çemberi çizen Q noktasının p açısal hızına, **titreşimin dairesel frekansı** denir ve radyan/san ile ölçölür; Q nun çember üzerindeki ilk konumunu belirleyen ϕ açısı ise **faz açısı** adını alır. şekil 7.2 den görölüğü gibi, pt açısı 2π radyan kadar artacak olursa bir tam **çevrim** tanımlanmış olur. Buna karşı gelen t değeri τ ile gösterilir ve titreşimin periyodu adını alır ve saniye ile ölçölür. Birim zamanda tamamlanan çevrim sayısı f ile gösterilir ve titreşimin **frekansı** olarak isimlendirilir. Frekanslar, **çevrim/san** veya çevrimler boyutsuz olduğu için san^{-1} ile ölçölür :

$$\text{Periyot} = \tau = \frac{2\pi}{p} \quad (7.18)$$

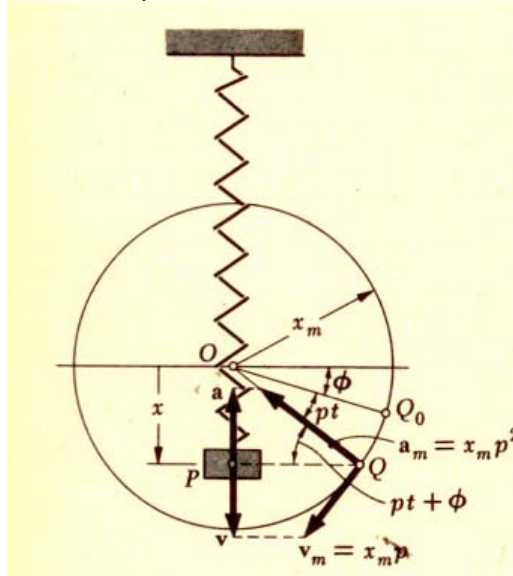
$$\text{frekans} = f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi} \quad (7.19)$$

(7.4) de p nin, k yay katsayısı ve maddesel noktanın m kütlesi cinsinden tanımlandığı hatırlanırsa, periyot ve frekansın, titreşimin başlangıç şartlarından ve genliğinden bağımsız olduğu görölür. τ ve f nin, maddesel noktanın **kütlesine** bağlı olup, **ağırlığına** bağlı olmadığı ve bu sebeple bunların g den bağımsız olduğuna işaret etmek gerekir.

Hız-zaman ve ivme-zaman eğrileri, yol-zaman eğrilerinde olduğu gibi, aynı periyotlu, fakat faz açıları farklı bir sinüs eğrisi ile gösterilebilir. (7.16) ve (7.17) den görölüğü gibi, hız ve ivmenin şiddetlerinin maksimum değerleri

$$v_m = x_m p \quad a_m = x_m p^2 \quad (7.20)$$

dir. Q noktası x_m yarıçaplı bir yardımcı çember üzerinde sabit p açısal hızı ile dolandığından, bunun hız ve ivmesi sırasıyla, (7.20) ifadelerine eşittir. (7.16) ve (7.17) denklemleri göz önünde tutulursa, P nin her hangi bir andaki hız ve ivmesi, şiddetleri $v_m = x_m p$ ile $a_m = x_m p^2$ olan ve sırasıyla Q noktasının aynı andaki hız ve ivmelerini belirleyen vektörlerin x eksenı üzerindeki izdüşümleri olarak elde edilebilecekleri görölür (şekil 7.3)

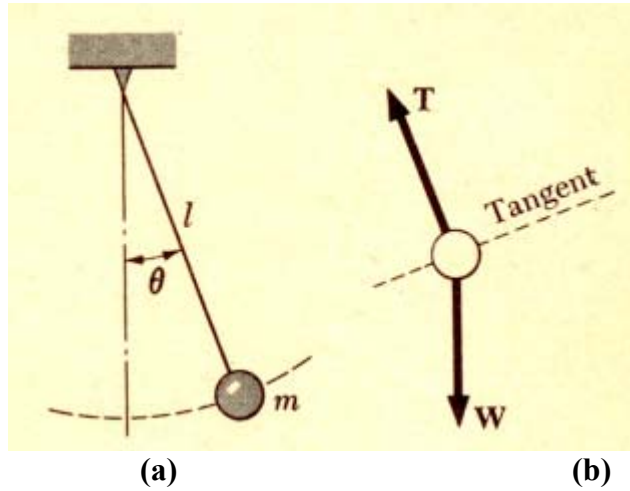


şekil 7.3

Elde edilen sonuçlar, sadece, bir yayın ucuna asılı bir kütle probleminin çözümüne uygulanmakla kalmazlar. Bunlar, **maddesel noktanın üzerine etkiyen kuvvetlerin $\vec{F}$ bileşkesi ile noktanın x yer değiştirmelerinin orantılı olduğu ve kuvvetin O ya yöneldiği** her doğrusal hareketin çözülmesinde de kullanılır. Bu durumda hareketin $F=ma$ temel denklemi, basit harmonik hareketi belirleyen (7.5) formunda yazılabilir. x in (7.5) deki katsayısının, titreşimin p dairesel frekansının karesini gösterdiğine dikkat edilirse p bulunur ve bu değer (7.18) ile (7.19) da yerine konularak, titreşimin τ periyodu ve f frekansı kolaylıkla elde edilir.

7.3. Basit Sarkaç (yaklaşık çözüm)

Mühendislik uygulamalarında en çok karşılaşılan titreşimler, basit harmonik hareket yardımı ile gösterilebilirler. Diğer birçok hareketler, farklı türden olmakla birlikte, genlikleri küçük kalmak şartıyla, **yaklaşık olarak**, basit harmonik hareket gibi kabul edilebilirler. Örneğin l boyunda bir ipin ucuna asılı bir m kütesinden oluşan ve düşey düzlemde salınım yapan bir **basit sarkaç** göz önüne alalım (Şekil 7.4a). Verilen bir t anında ip düşey ile θ açısı yapsın. Cisme etkiyen kuvvetler kendi ağırlığı $\vec{W}$ ile ipten gelen $\vec{T}$ kuvvetidir (Şekil 7.4b). Teğetsel bileşenler kullanılır (sağa doğru pozitif) ve $a_t = l(d^2\theta/dt^2)$ olduğuna dikkat edilirse



Şekil 7.4

$$F_t = ma_t \quad : \quad -W \sin \theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

yazılır. $W=mg$ olduğundan, ml ile bölünürse

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (7.21)$$

elde edilir. Küçük genlikli salınımlar için $\sin \theta$ yerine bunun radyan cinsinden θ değerini koyabiliriz :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (7.22)$$

(7.5) ile karşılaştırılırsa, elde edilmiş olan denklemin bir basit harmonik hareket gösterdiği ve salınımın p dairesel frekansının $(g/l)^{1/2}$ ye eşit olduğu görülür. Bu değer (7.18) de yerine konursa, l boyunda bir sarkacın küçük salınımlarının periyot ifadesi bulunmuş olur :

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (7.23)$$

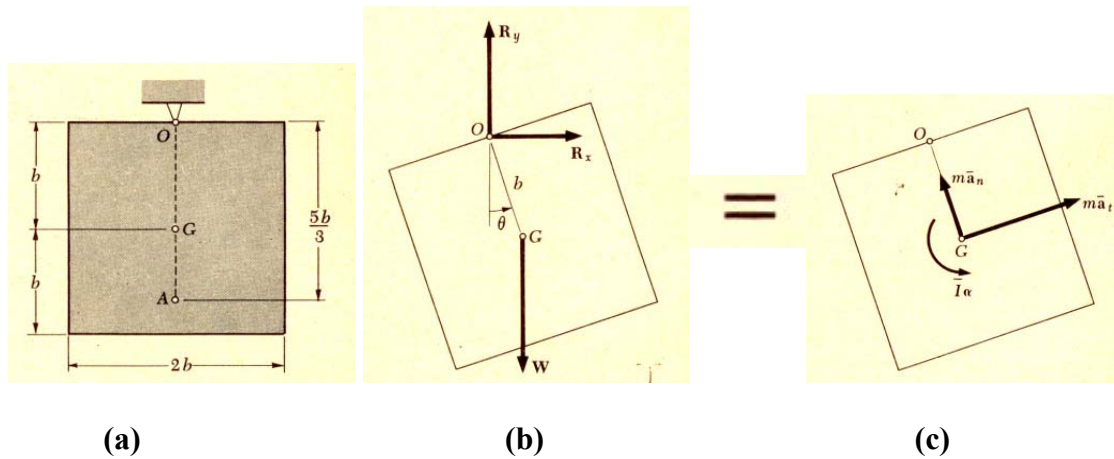
9.4. Rijit Cisimlerin Serbest Titreşimleri

Tek serbestlik dereceli rijit bir cismin veya bir rijit cisimler sisteminin titreşimlerinin çözülmesi, maddesel bir noktanın titreşimlerinin çözülmesine benzer. Cismin veya cisimler sisteminin konumunu tanımlamak amacıyla, x aralığı veya θ açısı gibi uygun bir değişken seçilir, ve bu değişken ile bunun t ye göre ikinci türevini bağlayan bir denklem (7.5) ile aynı formda, yani

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2x = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + p^2\theta = 0 \quad (7.24)$$

şeklinde ise göz önüne alınan titreşim basit harmonik bir hareket olur. Bu durumda titreşimin periyot ve frekansı, p nin eşdeğerini (7.18) ve (7.19) da yerine koyarak elde edilebilir.

Genellikle (7.24) denklemlerinden birisini elde etmek için basit yol, değişkenin herhangi bir değeri için serbest cisim diyagramını çizip uygun hareket denklemini yazarak dış kuvvetler sisteminin efektif kuvvetler sistemine eşit olduğunu ifade etmektir. Burada amaç, değişkenin doğrudan doğruya kendisini veya zamana göre birinci ve ikinci türevlerini belirlemek olmayıp, x veya θ değişkeninin katsayısını belirlemek olmalıdır. Bu katsayısı p^2 ye eşitleyerek, τ ve f nin hesaplanabileceği p dairesel frekansı elde edilmiş olur.



Şekil 7.5

Ana hatları verilmiş olan bu yöntem, tamamen basit harmonik hareket şeklinde ortaya çıkan titreşimlerin veya **yaklaşık olarak** basit harmonik hareket kabul edilebilen küçük genlikli titreşimlerin çözülmesi için kullanılabilir. Bir örnek olarak, kenar uzunluğu $2b$ olan ve bir kenarının O orta noktasından asılmış bulunan, kare şeklinde bir plağın küçük

salınımlarının periyodu belirlenecektir (Şekil 7.5a). Plağın, OG çizgisinin düşey ile yaptığı θ açısı ile tanımlanan herhangi bir konumu ele alınsın ve bunun $\vec{W}$ ağırlığı ile O daki reaksiyonun $\vec{R}_x$ ve $\vec{R}_y$ bileşenlerinin, $m\vec{a}_t, m\vec{a}_n$ vektörleri ile $\vec{I}_\alpha$ vektör çiftine eşdeğer olduğunu ifade eden diyagram çizilsin (Şekil 7.5b). Plağın açısal hızı ile açısal ivmesi sırasıyla $d\theta/dt$ ve $d^2\theta/dt^2$ ye eşit olduğundan, $m\vec{a}_t$ ve $m\vec{a}_n$ vektörlerinin şiddetleri sırasıyla $mb(d^2\theta/dt^2)$ ve $mb(d\theta/dt)^2$ ve vektör çiftinin şiddeti ise $\bar{I}(d^2\theta/dt^2)$ olur. Bu yöntemin daha önceki uygulamalarında (Böl. 6), mümkün oldukça ivme için yön doğru alınmaya çalışılmıştır. Burada da (7.24) şeklinde bir denklem elde edilebilmesi amacıyla θ ve $d^2\theta/dt^2$ için aynı pozitif yön kabul edilmelidir. Böylece gerçeğe uymamış olmakla birlikte $d^2\theta/dt^2$ açısal ivmesi için, saat ibrelerinin tersi pozitif olarak kabul edilmiş olmaktadır. O ya göre momentler eşitlenerek

$$-W(b \sin \theta) = \left(mb \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) b + \bar{I} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

bulunur.

$$\bar{I} = \frac{1}{12} m [(2b)^2 + (2b)^2] = \frac{2}{3} mb^2 \quad \text{ve} \quad W = mg$$

yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{5} \frac{g}{b} \sin \theta = 0 \quad (7.25)$$

Küçük genlikli salınımlar için $\sin \theta$ yerine, radyan cinsinden θ konulacak olursa

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{5} \frac{g}{b} \theta = 0 \quad (7.26)$$

elde edilir. Bulunan bu denklem (7.24) ile karşılaştırılırsa hareketin basit harmonik ve salınımın p dairesel frekansının ise $(3g/5b)^{1/2}$ ye eşit olduğu görülür. Bu değer (7.18) de yerine konursa salınımın periyodu için aşağıdaki değer elde edilir:

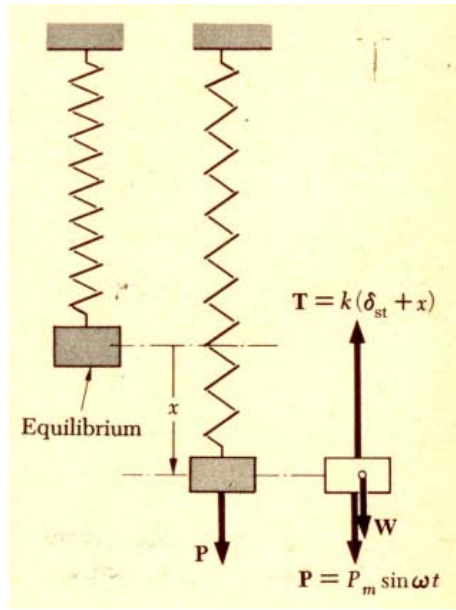
$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{5b}{3g}} \quad (7.27)$$

Bulunmuş olan bu sonuç sadece küçük genlikli salınımlar için geçerlidir. l boyu $5b/3$ e eşit seçilirse (7.26) ve (7.22) denklemleri eşdeğer olur. Bu ise plağın $l=5b/3$ boyunda basit bir sarkaç gibi salınım yaptığını ifade eder. Plağın OG doğrusu üzerinde ve O dan $l=5b/3$ uzaklığında bulunan A noktası, O ya karşı gelen **salınım merkezi** adını alır (Şekil 7.5a).

7.5. Sönümsüz Zorlanmış Titreşimler

Mühendislik uygulamaları bakımından en önemli titreşimler, bir sistemin **zorlanmış titreşimleridir**. Bir sistem, Periyodik bir kuvvetin etkisi altında kalır, veya alternatif olarak hareket eden bir mesnede elastik olarak bağlanırsa, bu tür bir titreşim ortaya çıkar.

Birinci hal olarak, şiddeti $P = P_m \sin \omega t$ şeklinde değişen periyodik bir $\vec{P}$ kuvvetinin etkisi altında, yaya asılı bir m kütlesi göz önüne alınsın (Şekil 7.6). Bu kuvvet, cisme doğrudan doğruya etkiyen bir dış kuvvet olabildiği gibi, cismin dengede olmayan bir parçasının dönmesinden meydana gelen merkezkaç bir kuvvet de olabilir. Cismin denge konumundan ölçülen yer değiştirmesi x ile gösterilirse, hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir :

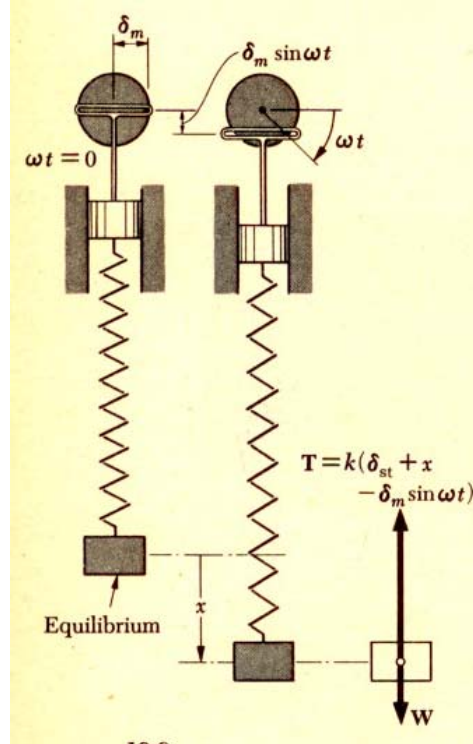


Şekil 7.6

$$+ \downarrow \sum F = m a : \quad P_m \sin \omega t + W - k(\delta_{st} + x) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$W = k \delta_{st}$ olduğu hatırlanırsa

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = P_m \sin \omega t \quad (7.28)$$



Şekil 7.7

elde edilir. İkinci olarak, δ yer değiştirmesi $\delta_m \sin \omega t$ ye eşit olan bir mesnede bağlanmış bir yaya asılı, bir m kütleini göz önüne alalım (Şekil 7.7). Cismin $\omega t = 0$ değerine karşı gelen statik denge konumundan ölçülen yer değiştirmeleri x ile gösterilsin. Yayın t anındaki toplam boy uzaması $\delta_{st} + x - \delta_m \sin \omega t$ olarak bulunur. Bu durumda hareket denklemi,

$$+ \downarrow \sum F = m a : \quad W - k(\delta_{st} + x - \delta_m \sin \omega t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

olur. $W = k\delta_{st}$ olduğuna göre

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = k\delta_m \sin \omega t \quad (7.29)$$

dir. (7.28) ve (7.29) denklemleri aynı formda olduğuna göre, birinci denklemin bir çözümü, $P_m = k\delta_m$ konulursa ikinci denklemi de gerçekler.

(7.28) ve (7.29) şeklinde bir diferansiyel denklem, sağ tarafı sıfırdan farklı olduğuna göre, **homojen olmayan** bir diferansiyel denklem adını alır. Bunun genel çözümü; verilen denklemin bir özel çözümünü, sağ taraftaki terimi sıfır yaparak elde edilen **homojen** denklemin genel çözümüne katarak elde edilir. (7.28) in veya (7.29) un bir **özel çözümünün**

$$x_{\text{özel}} = \bar{x}_m \sin \omega t \quad (7.30)$$

formunda olduğunu deneyerek bulabiliriz. (7.28) de x yerine $x_{\text{özel}}$ konulursa

$$-m\omega^2 \bar{x}_m \sin \omega t + k \bar{x}_m \sin \omega t = P_m \sin \omega t$$

bulunur. Buradan $\bar{x}_m$ genliği için

$$\bar{x}_m = \frac{P_m}{k - m\omega^2}$$

elde edilir. (7.4) den, p cismin serbest titreşiminin dairesel frekansını göstermek üzere, $p^2 = k/m$ olduğu hatırlanırsa

$$\bar{x}_m = \frac{P_m / k}{1 - (\omega / p)^2} \quad (7.31)$$

yazılabilir. (7.30) ile (7.29) a gidilecek olursa, benzer şekilde, aşağıdaki ifade bulunur :

$$\bar{x}_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega / p)^2} \quad (7.32)$$

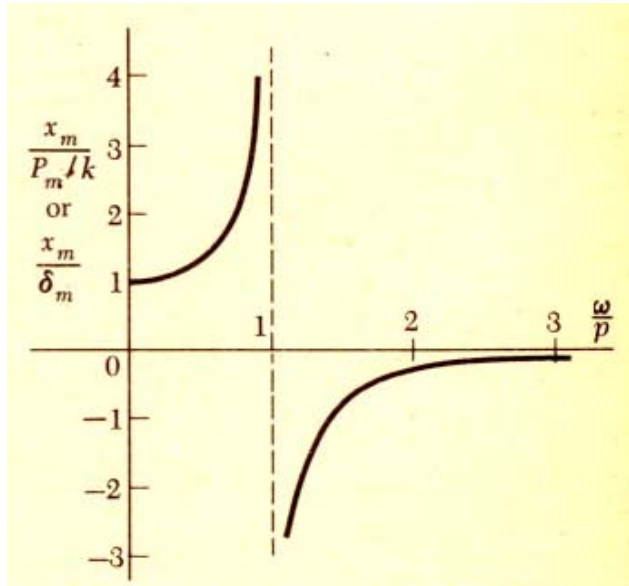
(7.28) ve (7.29) a karşı gelen homojen denklem, cismin serbest titreşimini belirleyen (7.3) denklemdir. Bunun **tamamlayıcı fonksiyon** adını alan homojen çözümü Kısım 7.2 de bulunmuştu :

$$x_{tamam} = A \sin pt + B \cos pt \quad (7.33)$$

(7.30) özel çözümü ve (7.33) tamamlayıcı fonksiyonu toplanarak, (7.28) ve (7.29) denklemlerinin **genel çözümü** bulunur :

$$x = A \sin pt + B \cos pt + \bar{x}_m \sin \omega t \quad (7.34)$$

Elde edilmiş olan titreşim, iki titreşimin süperpozisyonundan oluşmaktadır. (7.34) ün ilk iki terimi, sistemin serbest titreşimini gösterir. Bu titreşimin frekansı, sistemin **doğal frekansı** adını alır ve sadece k yay katsayısı ile cismin kütlesine bağlıdır; A ve B sabitleri başlangıç şartlarından belirlenir. Bu serbest titreşime, pratikte sürtünme kuvvetleri ile hemen söndürüldüğü için, **geçici titreşim** adı da verilir. Bu sebeple bundan sonra $x_m \cong \bar{x}_m$ olarak alınacaktır.



Şekil 7.8

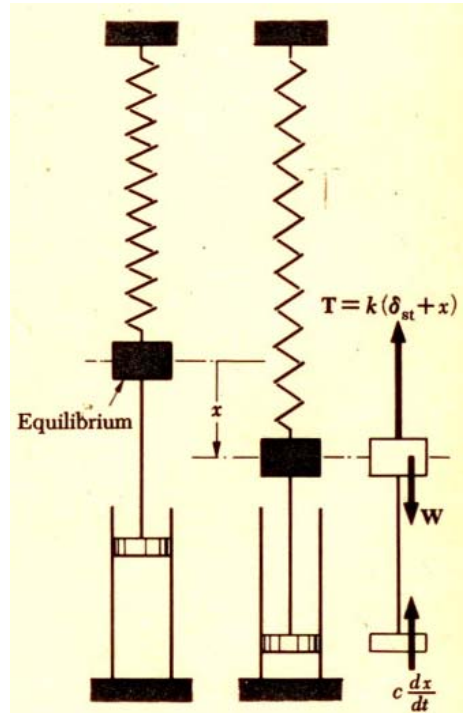
(7.34) deki son terimin belirlediği, ve etkiyen kuvvet veya mesnet hareketi ile meydana gelen ve beslenen titreşime, **devamlı titreşim** adı verilir. Bu titreşimin, söz konusu kuvvet veya mesnet hareketi tarafından ortaya çıkarılan frekansı, **zorlanmış frekanstır** ve x_m genliği ise (7.31) veya (7.32) tarafından belirlenir ve ω/p **frekans oranına** bağlıdır. Devamlı titreşimin x_m genliğinin, P_m kuvvetinden meydana gelen statik P_m/k yer değişimine veya mesnet hareketinin δ_m genliğine oranı, **büyütme çarpanı** adını alır. (7.31) ve (7.32) den

$$\text{Büyütme çarpanı} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega/P)^2} \quad (7.35)$$

bulunur. Büyütme çarpanının, ω/p frekans oranına bağlı olarak değişimi, Şekil 7.8 de gösterilmiştir. Şuna işaret edilmelidir ki, zorlanmış titreşimin genliği $\omega = p$ için sonsuz olmaktadır. Bu durumda, etkiyen kuvvet veya mesnet hareketi, verilen sistem ile **rezonans** haline gelir. Gerçekte, titreşimin genliği, söndürücü kuvvetler sebebiyle sonlu kalır. Bununla beraber böyle bir durumdan sakınmalı ve zorlanmış frekans, sistemin doğal frekansına çok yakın seçilmemelidir. Ayrıca görülüyor ki, (7.34) de, $\sin \omega t$ nin katsayısı $\omega < p$ için pozitifken, $\omega > p$ için negatiftir. Birinci halde zorlanmış titreşim, etkiyen kuvvet veya hareketli mesnet ile **aynı fazda** iken, ikinci halde bu 180° **faz dışıdır**.

7.6. Sönümlü Serbest Titreşimler

Gerçekte bütün titreşimler bir ölçüde sürtünme kuvvetleri tarafından söndürülürler. Bu kuvvetler iki cisim arasındaki **kuru sürtünme** veya **Coulomb sürtünmesinden**, rijit bir cismin bir akışkan içerisindeki hareketinden ortaya çıkan **sıvı sürtünmesinden**, veya görünüşte elastik olan bir cismin molekülleri arasındaki **iç sürtünmeden** meydana gelirler.



Şekil 7.9

Özel olarak ilginç bir sönüm türü, az ve orta hızlarda, sıvı sürtünmesinden ortaya çıkan **viskoz sönümdür**. Viskoz sönümün en belirli özelliği, sürtünme kuvvetinin, hareket eden cismin hızı ile **doğru orantılı** olmasıdır. Örnek olarak katsayısı k olan bir yaya asılı bir m kütesinin, bir direnç kutusunun (daşpot) silindrine bağlandığını kabul edelim (Şekil 7.9). Silindire etrafını saran sıvıdan etkiyen sürtünme kuvvetinin şiddeti $c(dx/dt)$ ye eşittir. Burada $Nsan/m$ cinsinden beliren ve **viskoz sönüm katsayısı** adını alan c katsayısı, akışkanın fiziksel özelliklerine ve direnç kutusunun yapısına bağlıdır. Buna göre hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$+\downarrow \sum F = m a : \quad W - k(\delta_{st} + x) - c \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$W = k\delta_{st}$ olduğu hatırlanacak olursa

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (7.36)$$

elde edilir. (7.36) da $x = e^{\lambda t}$ konulursa **karakteristik denklem** elde edilir :

$$m \lambda^2 + c \lambda + k = 0 \quad (7.37)$$

Bunun kökleri

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (7.38)$$

olur. (7.38) de karekökün içini sıfır yapan c değeri c_c **kritik sönüm katsayısı** olarak tanımlanırsa

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2mp \quad (7.39)$$

yazılır; burada p , sönüm olmaması halinde, sistemin doğal frekansıdır. c katsayısının değerine göre üç farklı sönüm hali ortaya çıkar :

1. Kuvvetli sönüm: $c > c_c$. (7.37) karakteristik denkleminin λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve ayrıktır, ve (7.36) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (7.40)$$

olur. Bu çözüm, titreşimsiz bir harekete karşı gelir. λ_1 ve λ_2 nin her ikisi de negatif olduklarından t sonsuza giderken x sıfıra yaklaşır. Bununla birlikte gerçekte sistem, sonlu bir zaman geçtikten sonra yeniden dengesini kazanır.

2. Kritik sönüm: $c = c_c$. Karakteristik denklemin $\lambda = -c_c / 2m = -p$ şiddetinde çift katlı bir kökü vardır ve (7.36) nın genel çözümü

$$x = (A + Bt)e^{-pt} \quad (7.41)$$

dir. Elde edilen hareket yine titreşimsizdir. Kritik sönümlü sistemlerin, salınım yapmaksızın, en kısa zamanda tekrar denge konumlarına döndüklerinden, mühendislik uygulamalarında özel bir önemi vardır.

3. Zayıf sönüm: $c < c_c$. (7.37) nin kökleri kompleks ve eşleniktir, ve (7.36) nin genel çözümü

$$x = e^{-(c/2m)t} (A \sin qt + B \cos qt) \quad (7.42)$$

şeklindedir; burada q aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır :

$$q^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m} \right)^2$$

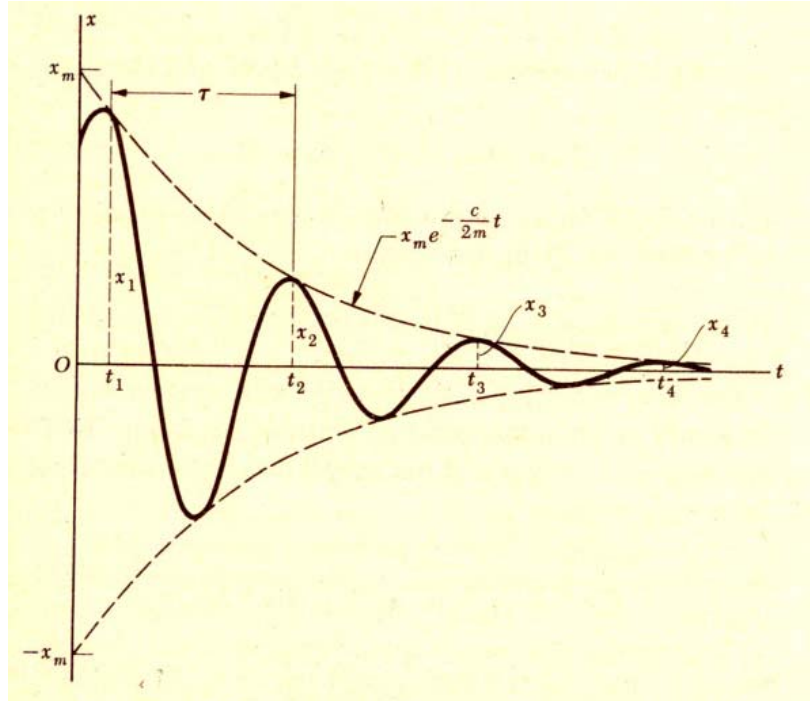
$k/m = p^2$ konur ve (7.39) göz önünde tutulursa

$$q = p \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c} \right)^2} \quad (7.43)$$

yazılır; burada c/c_c sönüm çarpanı adını alır. Kısım 7.2 de kullanılmış olana benzer bir ifade yerine konarak, (7.36) nin genel çözümü aşağıdaki formda yazılabilir :

$$x = x_m e^{-(c/2m)t} \sin(qt + \phi) \quad (7.44)$$

(7.44) ün tanımladığı hareket, genliği azalan bir titreşim hareketidir (Şekil 7.10). Her ne kadar bu hareket, gerçekte, aynı biçimde tekrarlanmazsa da, Şekil 7.10 da görülen ve (7.44) eğrisinin değdiği iki limit eğriden biri üzerindeki ardışık iki noktaya karşı gelen $\tau = 2\pi/q$ zaman aralığı, genellikle sönümlü titreşimin periyodu olarak gösterilir. (7.43) e bakarak τ nun karşıt sönümsüz titreşimin periyodundan daha büyük olduğunu görürüz.



Şekil 7.10

9.7. Sönümlü Zorlanmış Titreşimler

Bir önceki kısımda göz önüne alınan sistem, $P = P_m \sin \omega t$ olarak değişen periyodik bir $\vec{P}$ kuvveti etkisinde kalırsa, hareket denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = P_m \sin \omega t \quad (7.45)$$

(7.45) in genel çözümü, (7.45) in bir özel çözümüne bir tamamlayıcı fonksiyon veya (7.36) homojen denkleminin genel çözümünü eklemekle elde edilir. Tamamlayıcı fonksiyon, göz önüne alınmış olan sönümün tipine bağlı olarak (7.40), (7.41) ve (7.42) de verilmiştir. Bu, en sonunda sönen **geçici** bir hareket gösterir.

Bu kısımda daha çok, (7.45) denkleminin

$$x_{\text{özel}} = x_m \sin(\omega t - \varphi) \quad (7.46)$$

formundaki özel bir çözümü ile belirlenen, sürekli titreşim ile ilgileneceğiz. (7.45) de x yerine $x_{\text{özel}}$ konularak

$$-m\omega^2 x_m \sin(\omega t - \varphi) + c\omega x_m \cos(\omega t - \varphi) + kx_m \sin(\omega t - \varphi) = P_m \sin \omega t$$

elde edilir. x_m ve φ yi bulabilmek için, $\omega t - \varphi$ yi sırayla, 0 ve $\pi/2$ ye eşitlersek

$$c\omega x_m = P_m \sin \varphi \quad (7.47)$$

$$(k - m\omega^2)x_m = P_m \cos \varphi \quad (7.48)$$

bulunur. (7.47) ve (7.48) in her iki tarafının karelerini alıp toplarsak

$$\left[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2 \right] x_m^2 = P_m^2 \quad (7.49)$$

elde edilir. (7.49) eşitliği x_m ye göre çözülür, ve ayrıca (9.47) ve (9.48) taraf tarafa bölünürse

$$x_m = \frac{P_m}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad \text{tg} \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (7.50)$$

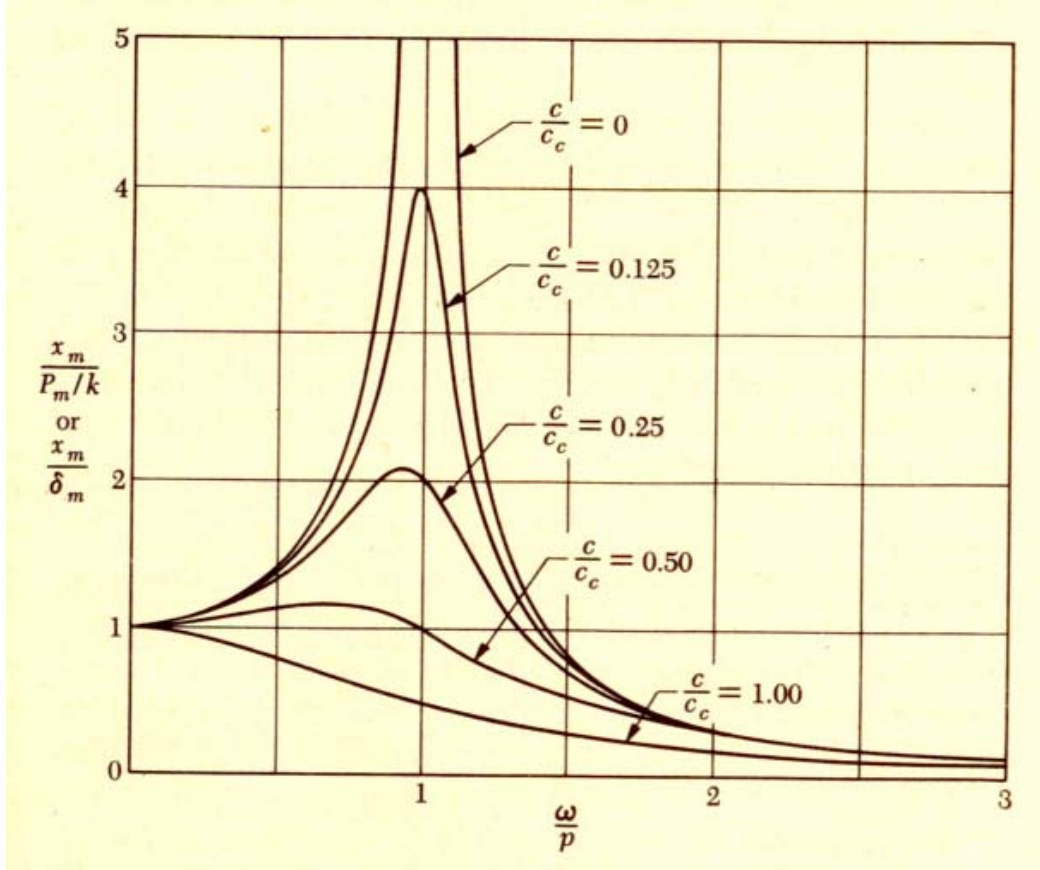
bulunur. (7.4) den, p sönümsüz serbest titreşimin dairesel frekansı olmak üzere $k/m=p^2$ ve (7.39) dan, sistemin kritik sönüm katsayısı c_c olmak üzere, $2mp=c_c$ olduğu hatırlanarak

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/p)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega/p)]^2}} \quad (7.51)$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega/p)}{1 - (\omega/p)^2} \quad (7.52)$$

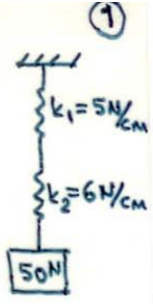
yazılır. (7.51) formülü, ω/p frekanslar oranı ve c/c_c sönüm çarpanı cinsinden yazılan büyütme çarpanını gösterir. Bu, $P=P_m \sin \omega t$ şiddetinde etkiyen bir kuvvetin, veya yer

değişimleri $\delta = \delta_m \sin \omega t$ şeklinde değişen hareketli bir mesneden meydana getirdiği devamlı titreşimin genliğini belirlemek için kullanılır. (7.52) formülü, etkiyen kuvvet veya mesnet hareketi ile sönümlü sistemin devamlı titreşimi arasındaki ϕ faz farkını aynı parametreler cinsinden tanımlar. Sönüm çarpanının çeşitli değerlerine karşı gelen frekanslar oranına göre, büyütme çarpanının değişimi Şekil 7.11 de gösterilmiştir. Buradan görülmektedir ki, zorlanmış titreşimin genliğinin küçük olabilmesi için, c viskoz sönüm katsayısını büyütme, veya doğal ve zorlanmış frekansları birbirlerinden uzak tutmak gerekir.



Şekil 7.11

Problem 1: Ağırlığı 50 N olan bir blok şekilde gösterilen yay düzeniyle asılıdır. Blok denge konumundan itibaren aşağıya doğru çekildikten sonra serbest bırakılmıştır: a) Hareketin periyodunu ve frekansını bulunuz. b) Hareketin genliği 7,5 cm ise bloğun maksimum hızı ve ivmesi ne olur?



Çözüm: $W = k_{es} \cdot \delta_{st} = k_{es} \cdot \left(\frac{W}{k_1} + \frac{W}{k_2} \right) \Rightarrow 1 = k_{es} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$

$$\frac{1}{k_{es}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \Rightarrow k_{es} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \text{ seri bağlı yaylar için.}$$

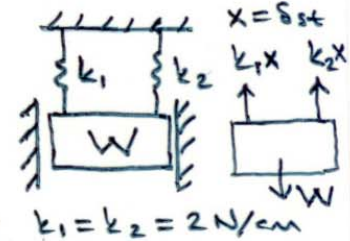
$$k_{es} = \frac{500 \cdot 600}{500 + 600} = 272,73 \text{ N/m}$$

a) $\omega = \sqrt{k/M} = \sqrt{272,73 / (50/10)} = 7,385 \text{ rad/sn}; T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7,385} = 0,85 \text{ sn}$
 $f = 1/T = 1/0,85 = 1,18 \text{ sn}^{-1}$

b) $x = x_m \cdot \sin(\omega t + \phi); v = x_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \phi); a = -x_m \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \phi)$

$$v_m = x_m \cdot \omega = 0,075 \cdot 7,385 = 0,55 \text{ m/sn}$$

$$a_m = x_m \cdot \omega^2 = 0,075 \cdot (7,385)^2 = 4,09 \text{ m/sn}^2$$



Problem 2: Şekilde gösterilen $W=20 \text{ N}$ ağırlıklı cisim 10 cm aşağı çekilip ilk hızı sıfır serbest bırakılmıştır. Cismin 5. saniyede ki yerini, hızını ve ivmesini hesaplayınız.

Çözüm: $W = F_1 + F_2 = k_{es} \cdot x = (k_1 \cdot x + k_2 \cdot x) = (k_1 + k_2) x$

$$k_{es} = 200 + 200 = 400 \text{ N/m}; g = 10 \text{ m/sn}^2$$

$$\omega = \sqrt{k/M} = \sqrt{400 / (20/10)} = 14,142 \text{ rad/sn}$$

$$t=0 \rightarrow x = 10 \text{ cm} = x_m \cdot \sin(0 + \phi) \rightarrow x_m = 10 \text{ cm}$$

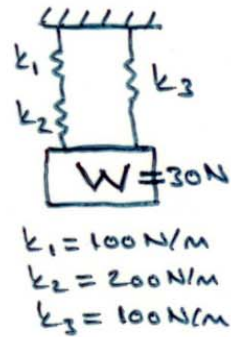
$$v = 0 = x_m \cdot \omega \cdot \cos(0 + \phi) \rightarrow \phi = \pi/2$$

$$x_5 = 10 \cdot \sin(14,142 \cdot 5 + \pi/2) = -0,242 \text{ cm}$$

$$v_5 = 10 \cdot 14,142 \cdot \cos(14,142 \cdot 5 + \pi/2) = -141,379 \text{ cm/sn}$$

$$a_5 = -10 \cdot (14,142)^2 \cdot \sin(14,142 \cdot 5 + \pi/2) = 48,325 \text{ cm/sn}^2$$

Problem 3: Şekilde gösterilen sistemin $t=0$ anında konumu (denge konumuna göre) $x_0 = 2 \text{ cm}$, $v_0 = 6 \text{ cm/sn}$ olduğuna göre; a) hareketin periyodunu ve genliğini bulunuz, b) $t = 2 \text{ sn}$ için konum, hız ve ivmeyi hesaplayınız.



Çözüm: $k_{es12} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{100 \cdot 200}{100 + 200} = \frac{200}{3}; k_{es} = k_{es12} + k_3$

$$k_{es} = \frac{200}{3} + 100 = 166,67 \text{ N/m}; \omega = \sqrt{166,67 / (30/10)} = 7,45 \text{ rad/sn}$$

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi / 7,45 = 0,84 \text{ sn}$$

(2)

a) $t=0 \rightarrow X=0,02 = X_m \cdot \sin(7,45 \cdot 0 + \phi)$
 $V=0,06 = X_m \cdot 7,45 \cdot \cos(7,45 \cdot 0 + \phi)$ } $\tan \phi = \frac{1}{3} \cdot 7,45 \rightarrow \phi = 1,188 \text{ rad}$
 $X_m = 2,156 \text{ cm}$

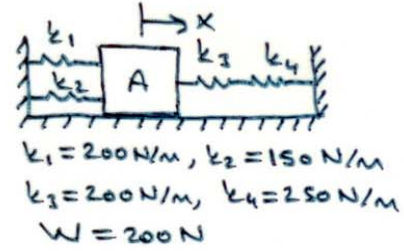
b) $t = 2 \text{ sn}$

$$X_2 = 2,156 \cdot \sin(7,25 \cdot 2 + 1,188) = 4,304 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

$$V_2 = 2,156 \cdot 7,25 \cdot \cos(7,25 \cdot 2 + 1,188) = -15,628 \text{ cm/sn}$$

$$a_2 = -2,156 \cdot (7,25)^2 \cdot \sin(7,25 \cdot 2 + 1,188) = -2,262 \text{ cm/sn}^2$$

Problem 4: A cisim şekildedeki konumda dengede olup yaylarda herhangi bir kuvvet yoktur. Cisim denge konumundan itibaren 0,06 m sağda olduğu durumda hız yine sağa doğru 2 m/sn dir. Bu konumdan itibaren 3 sn geçince konum, hız ve ivmeyi bulunuz.



Gözüm: $k_{es12} = k_1 + k_2 = 200 + 150 = 350 \text{ N/m}$

$$k_{es34} = \frac{k_3 \cdot k_4}{k_3 + k_4} = \frac{200 \cdot 250}{200 + 250} = 111,11 \text{ N/m}$$

$$k_{es} = k_{es12} + k_{es34}$$

$$k_{es} = 350 + 111,11 = 461,11 \text{ N/m}$$

$$P = \sqrt{k/m} = \sqrt{461,11 / (200/10)} = 4,8 \text{ rad/sn}$$

$t=0 \rightarrow X_0 = 0,06 \text{ m} = X_m \cdot \sin(P \cdot 0 + \phi)$
 $V_0 = 2 \text{ m/sn} = X_m \cdot 4,8 \cdot \cos(P \cdot 0 + \phi)$ } $\phi = 0,143 \text{ rad}$
 $X_m = 0,42 \text{ m}$

$t = 3 \text{ sn}$ $X_3 = 0,42 \cdot \sin(4,8 \cdot 3 + 0,143) = 0,386 \text{ m}$

$$V_3 = 0,42 \cdot 4,8 \cdot \cos(4,8 \cdot 3 + 0,143) = -0,796 \text{ m/sn}$$

$$a_3 = -0,42 \cdot 4,8^2 \cdot \sin(4,8 \cdot 3 + 0,143) = -8,89 \text{ m/sn}^2$$

Problem 5: AB ağırlığının ağırlığını ihmal ederek şekildedeki sistemin doğal frekansını bulunuz. $t=0$ anındaki $X_{80}=0$ ve $V_{80}=5 \text{ m/sn}$ (sağıya doğru) ise $t=2$ sn'de B'nin konum, hız ve ivmesi ne olur?

Gözüm: $\sum M_C = 0 \rightarrow -kx \cdot a + W \cdot b = 0$
 $x = Wb / (k \cdot a) = 140 / 200 = 0,7 \text{ m}$

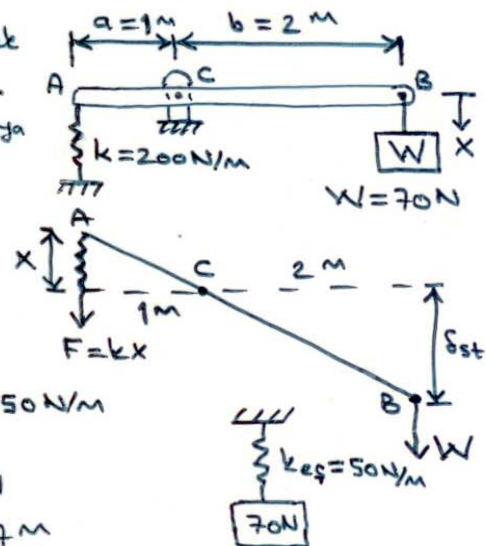
$$\frac{x}{1} = \frac{\delta_{st}}{2} \rightarrow \delta_{st} = 2x = 1,4 \text{ m}$$

$$W = k_{es} \cdot \delta_{st} \rightarrow 70 = k_{es} \cdot 1,4 \rightarrow k_{es} = 50 \text{ N/m}$$

$$P = \sqrt{50 / (70/10)} = 2,67 \text{ rad/sn}$$

$t=0 \rightarrow \begin{cases} X_0 = 0 = X_m \cdot \sin \phi \\ V_0 = 5 = X_m \cdot P \cdot \cos \phi \end{cases} \rightarrow \phi = 0 \text{ rad}$
 $X_m = 1,87 \text{ m}$

$t = 2 \text{ sn}$ $\begin{cases} X_2 = 1,87 \cdot \sin(2,67 \cdot 2) = -1,52 \text{ m} \\ V_2 = 1,87 \cdot 2,67 \cdot \cos(2,67 \cdot 2) = 2,904 \text{ m/sn} \\ a_2 = -1,87 \cdot (2,67)^2 \cdot \sin(2,67 \cdot 2) = -10,81 \text{ m/sn}^2 \end{cases}$



Problem 6: Boyu 1 m ve ağırlığı 20 N olan bir AB çubuğu C merkezinde bir mafsala ve D noktasından tse katsayısı 60 N/m olan bir yaya bağlanmıştır. Çubuğun titreşim periyodu 1 sn olması için gerekli h uzaklığı bulunur.

Çözüm: $(\sum \vec{M}_C)_{dii} = (\sum M_C)_{ef}$

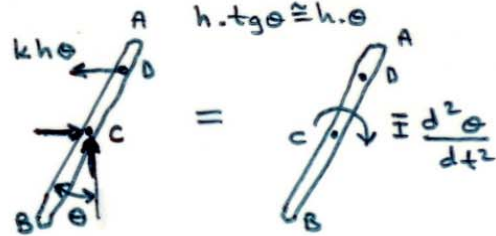
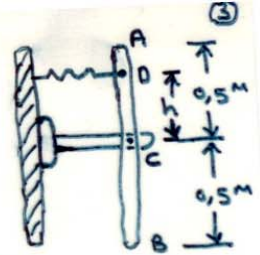
$$k(h\theta) \cdot h = -\frac{1}{12} \frac{W}{g} \cdot l^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{Wl^2}{12g} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + kh^2\theta = 0$$

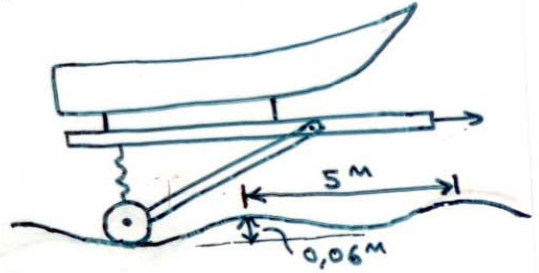
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{12gkh^2}{Wl^2} \cdot \theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + p^2\theta = 0$$

$$p^2 = \frac{12gkh^2}{Wl^2} = \frac{12 \cdot 10 \cdot 60 \cdot h^2}{20 \cdot 1^2} = 360h^2 \rightarrow p = 18,974h$$

$$T = \frac{2\pi}{p} \rightarrow 1 = \frac{2\pi}{18,974h} \rightarrow h = 0,331 \text{ m}$$



Problem 7: Ağırlığı 3000 N olan küçük bir treyler katsayıları 200 N/cm olan eşit tse yaya oturtulmuştur. Treyler, kesiti yaklaşık olarak sinüs eğrisi şeklinde değişen bir yol üzerinde çekilmektedir. Eğrinin genliği 3 cm ve bir periyot süresince alınan yol 5 m dir (yarı ardışık iki tepe arası 5 m ve bir tepe ile bir çukur arasındaki dikey uzaklık 6 cm dir).



a) Rezonans meydana getiren hız, b) treylerin 60 km/saat hız ile giderken yapacağı titreşimin genliğini bulunur.

Çözüm: $X_m = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$; $k = 2 \cdot 20000 = 40000 \text{ N/m}$

$$a) p = \sqrt{\frac{40000}{3000/g}} = 11,44 \text{ rad/sn}; T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{11,44} = 0,5494 \text{ sn}$$

Zorlamız frekans doğal frekansa eşit olursa rezonans olur. Yani treyler 5 m yi 0,5494 saniyede alırsa rezonans oluşur.

$$5 = v \cdot 0,5494 \rightarrow v = 9,101 \text{ m/sn.}$$

$$T = T_w; p = \omega \text{ tse rezonans oluşur. } p = p_m \cdot \sin \omega t$$

$$b) v = 60 \text{ km/sa} = 60000/3600 = 16,67 \text{ m/sn}$$

$$5 = 16,67 \cdot t \rightarrow t = 0,3 \text{ sn} = T_w \rightarrow \text{zorlamız titreşimin periyodu.}$$

$$T_w = 0,3 = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = 20,944 \text{ rad/sn}$$

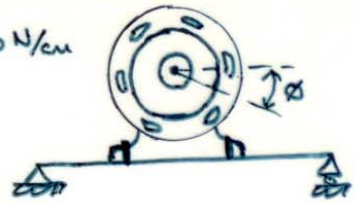
$$X_m = \frac{8m}{1 - (\omega/p)^2} = \frac{0,03}{1 - (20,944/11,44)^2} = 0,012757 \text{ m} = 1,2757 \text{ cm}$$

Problem 8: Düzey yündeki harekette rijitliği $k=20 \text{ N/cm}$

alınabilir bir kütleye üzerine sekilde gösterilen motor bağlanmıştır. Motorun ağırlığı $W=100 \text{ N}$ dur.

Rotorun derinliği, dönme ekseninden $12,5 \text{ cm}$ uzaklıkta $60 \times 10^{-3} \text{ N}$ luk bir ağırlığın bulunması

durumuna zedeğendir. Motor ancak düzey doğrultuda hareket edebildiğine göre; a) kütlenin genleşmesi (rezonans) için gerekli ağırsal hızı bulunuz. b) Motorun ağırsal hızı 240 dev/dak iken devamlı titreşimin genliğini bulunuz.



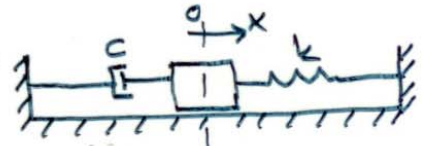
Çözüm: a) $\omega = \sqrt{2000 / (100/10)} = 14,14 \text{ rad/sn}$

$\omega = \omega_p$ iken rezonans olur. $\omega = 14,14 \text{ rad/sn} = \frac{14,14 \cdot 60}{2\pi} \approx 135,03 \text{ dev/dak}$

b) $P_m = M_d \cdot \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{10} \cdot \left(\frac{240 \cdot 2\pi}{60} \right)^2 \cdot 0,125 = 0,4737 \text{ N}$

$X_m = \frac{P_m / k}{1 - (\omega / \omega_p)^2} = \frac{0,4737 / 2000}{1 - (25,133 / 14,14)^2} = 1,097 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 1,097 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$

Problem 9: Şekilde gösterilen sönümlü sistemde m kütleli yayı 10 cm sıkıştırarak sekilde sağa doğru çekildikten sonra serbest bırakılmıştır (İlk hızı sıfır).



a) Kütleliğin 0 başlangıç noktasına titreşimi yapmaksızın minimum zamanda gelmesi için gerekli viskozite katsayısı ne olmalıdır? $W=1000 \text{ N}$, $k=5000 \text{ N/m}$
b) Kütle 0 noktasına ne kadar zamanda döner?

Çözüm: $X = A e^{-\omega_p t} + B t e^{-\omega_p t} \leftarrow c = c_{cr}$ için

a) $c = c_{cr} = 2m\omega_p = 2 \cdot 100 \cdot \sqrt{5000/100} = 1412,2 \text{ kg/sn}$

b) $X = A \cdot e^{-\omega_p t} + B t e^{-\omega_p t}$

$\omega_p = \sqrt{50} = 7,071 \text{ rad/sn}$

$V = -A \omega_p e^{-\omega_p t} + B e^{-\omega_p t} - B t \omega_p e^{-\omega_p t}$

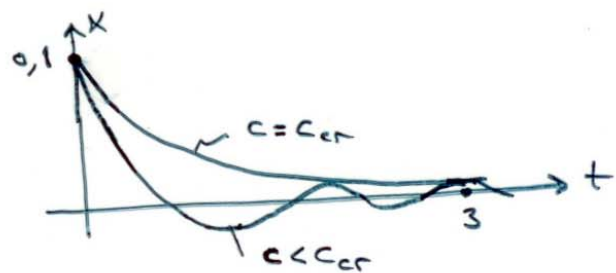
$t=0 \begin{cases} X = X_0 = 0,1 = A \cdot e^0 + 0 \\ V = V_0 = 0 = -A \omega_p e^0 + B e^0 \end{cases} \quad \begin{matrix} A = 0,1 \\ B = 0,7071 \end{matrix}$

$X = 0,1 \cdot e^{-7,071 t} + 0,7071 \cdot t \cdot e^{-7,071 t}$

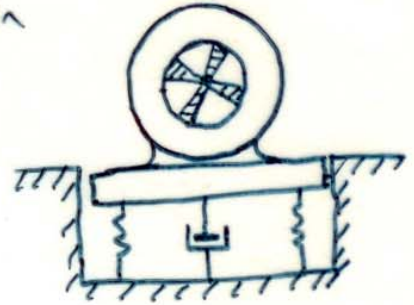
$t=0,1 \rightarrow X = 0,084 \text{ m}$

$t=2 \rightarrow X = 0,0006855 \text{ m}$

$t=3 \rightarrow X = 0,000000001 \text{ m}$



Problem 10: Ağırlığı 250 N olan bir motor her birinin katsayısı $k = 2500 \text{ N/cm}$ olan dört adet yay üzerine oturtulmuştur. Rotorun dengesizliği dâime ekseninden 10 cm uzaklıkta 0,3 N luk bir ağırlığın bulunması durumuna denktir. Motor sadece dikey doğrultuda hareket edebilmektedir.



a) Sönüm oranına göre,

b) sönüm oranı $c/c_{cr} = 0,125$ olduğuna göre motorun 1800 dev/dak hızındaki devamlı titreşiminin genliğini bulunuz.

Çözüm: $\omega = 1800 \text{ dev/dak} = 1800 \cdot 2\pi / 60 = 188,5 \text{ rad/sn}$.

a) $c/c_{cr} = 0$; $P_m = m_d \cdot r \cdot \omega^2 = \frac{0,3}{10} \cdot 0,1 \cdot (188,5)^2 = 108,66 \text{ N}$

$$P = P_m \cdot \sin \omega t \quad ; \quad p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 250000}{250/9,81}} = 198,1 \text{ rad/sn}$$

$$x_m = \frac{P_m / k}{1 - (\omega/p)^2} = \frac{108,66 / 1000000}{1 - (188,5/198,1)^2} = 0,00115 \text{ m} = 0,115 \text{ cm}$$

b) $c/c_{cr} = 0,125$; $x_m = \frac{P_m / k}{\sqrt{[1 - (\omega/p)^2]^2 + [2(c/c_{cr})(\omega/p)]^2}}$

$$x_m = \frac{108,66 / 1000000}{\sqrt{[1 - (\frac{188,5}{198,1})^2]^2 + [2(0,125)(\frac{188,5}{198,1})]^2}} = 0,000424 \text{ m} = 0,0424 \text{ cm}$$

$$x_{\text{özel}} = x_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_{cr})(\omega/p)}{1 - (\omega/p)^2} = \frac{2(0,125)(188,5/198,1)}{1 - (188,5/198,1)^2} = 2,515$$

$$\tan \varphi = 2,515 \rightarrow \varphi = 1,1024 \text{ rad}$$

KAYNAKLAR

1. F. Beer ve E. R. Johnston, Jr.,” DİNAMİK “, Çevirenler: S. Tameroğlu, Tekin Özbek, Üç Er Matbaacılık, İstanbul (1979).
2. I. H. Shames, “Statics and Dynamics”, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi (1969).

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MEKANİK ANABİLİM DALI**

DİNAMİK

1.BÖLÜM

**MADDESEL NOKTALARIN
KİNEMATİĞİ: EĞRİSEL HAREKET**

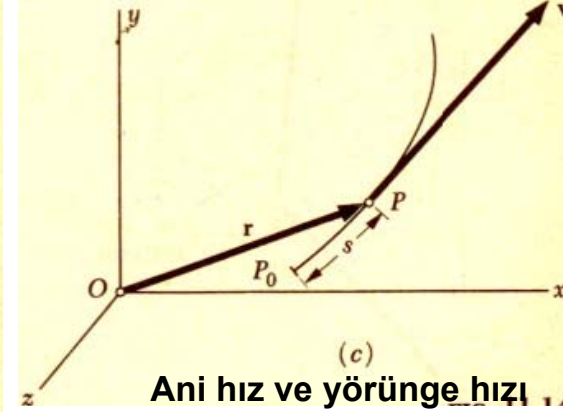
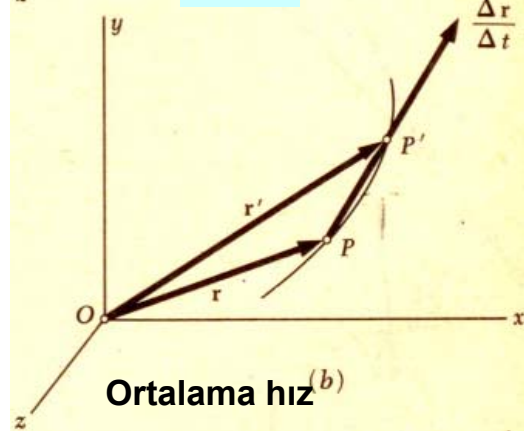
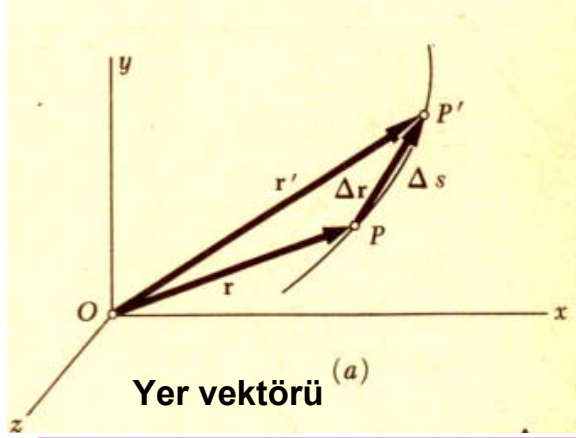
PROF. DR. TURGUT KOCA TÜR K

1.1.Yer vektörü, hız ve ivme

Eğrisel Hareket:

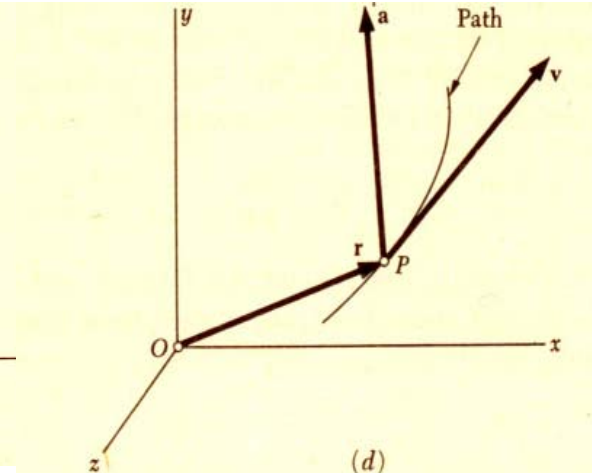
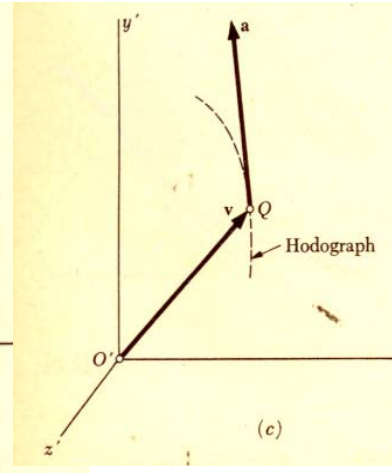
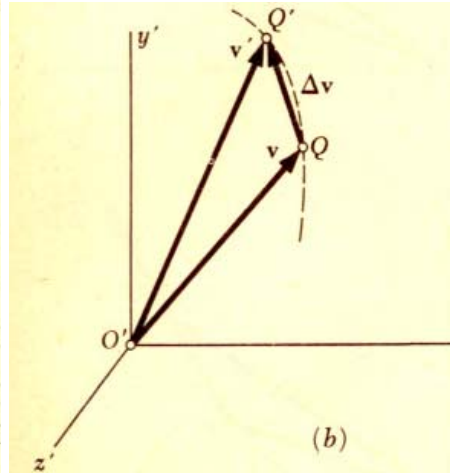
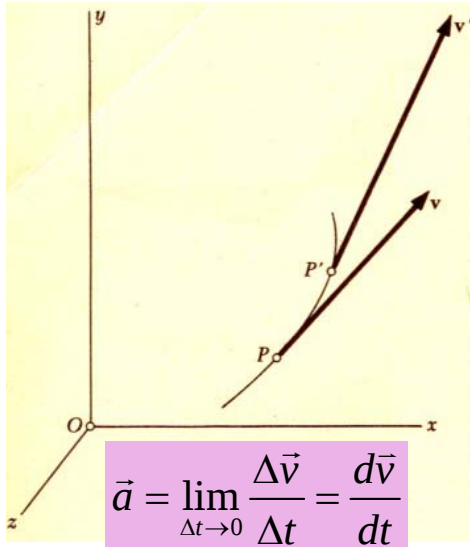
Doğrusal olmayan bir çizgi üzerinde harekete **eğrisel hareket** denir.

Yer vektörü: t anındaki yer vektörü $\vec{r}$, $t + \Delta t$ anındaki yer vektörü $\vec{r}'$



$$\vec{v}_{ort} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v}_{ani} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{PP'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

v şiddetine maddesel noktanın **yörünge hızı** denir.



İvme genel olarak maddesel noktanın yörüngesine **teğet değildir**.

1.2. Vektör fonksiyonlarının türevleri:

$\vec{P}(u)$, u skaler değişkeninin vektör fonksiyonudur. u değişkeni P vektörünün şiddetini, doğrultusunu ve yönünü tam olarak tanımlar. $\vec{P}(u)$ vektör fonksiyonunun türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\frac{d\vec{P}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{P}(u + \Delta u) - \vec{P}(u)}{\Delta u}$$

$\vec{P}(u)$ vektör fonksiyonunun türevi $P(u)$ nun ucunun çizdiği eğriye teğettir.

$$\frac{d(\vec{P} + \vec{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta(\vec{P})}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta u} = \frac{d\vec{P}}{du} + \frac{d\vec{Q}}{du}$$

$$\frac{d(f\vec{P})}{du} = \frac{df}{du} \vec{P} + f \frac{d\vec{P}}{du}$$

$$\frac{d(\vec{P} \cdot \vec{Q})}{du} = \frac{d\vec{P}}{du} \cdot \vec{Q} + \vec{P} \cdot \frac{d\vec{Q}}{du}$$

Bu çarpımlar komütatif olup yerler değişebilir.

$$\frac{d(\vec{P} \times \vec{Q})}{du} = \frac{d\vec{P}}{du} \times \vec{Q} + \vec{P} \times \frac{d\vec{Q}}{du}$$

Vektörel çarpım komütatif değildir. Yerler değişirse işaret değişir.

Bu özellikleri bir $\vec{P}(u)$ vektör fonksiyonunun türevinin dik bileşenlerini bulmakta kullanalım.

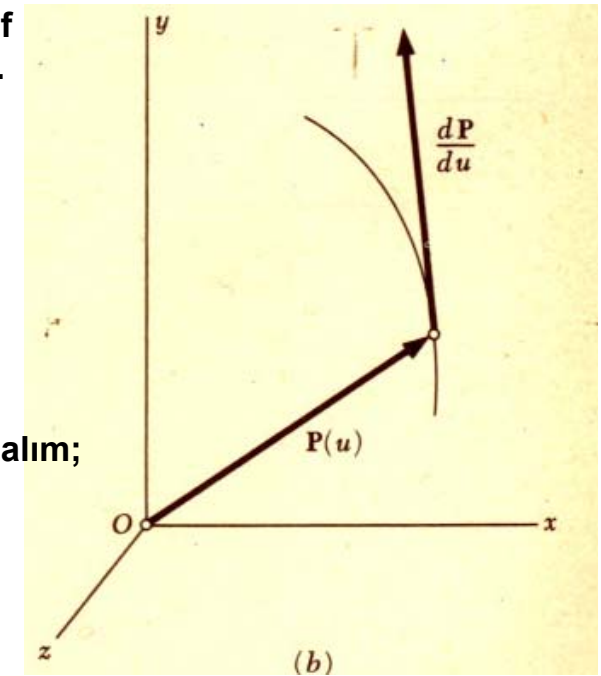
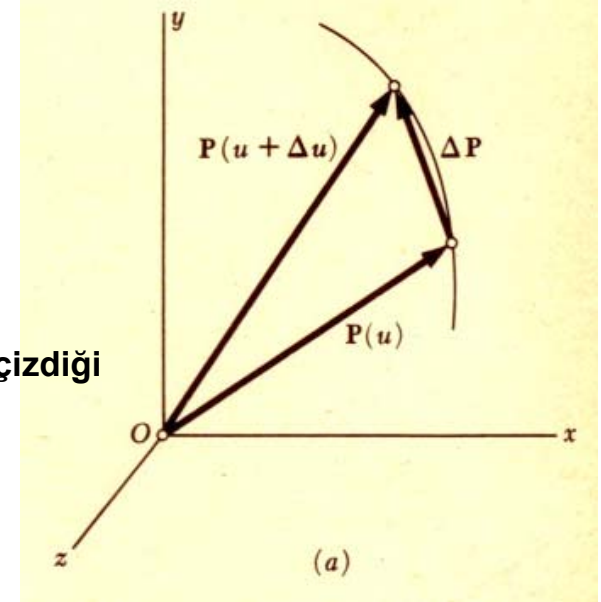
Vektör fonksiyonunun dik bileşenlerinin türevi:

$\vec{P}$ nin sabit x, y, z dik eksenleri üzerindeki izdüşümlerini izleyen şekilde yazalım;

$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{P}}{du} = \frac{dP_x}{du} \vec{i} + \frac{dP_y}{du} \vec{j} + \frac{dP_z}{du} \vec{k}$$

Burada i, j, k birim vektörlerinin şiddetleri sabittir (1 e eşit) ve yönleri değişmemektedir. Bu nedenle onların türevleri sıfırdır.



Bir vektörün değişim hızı:

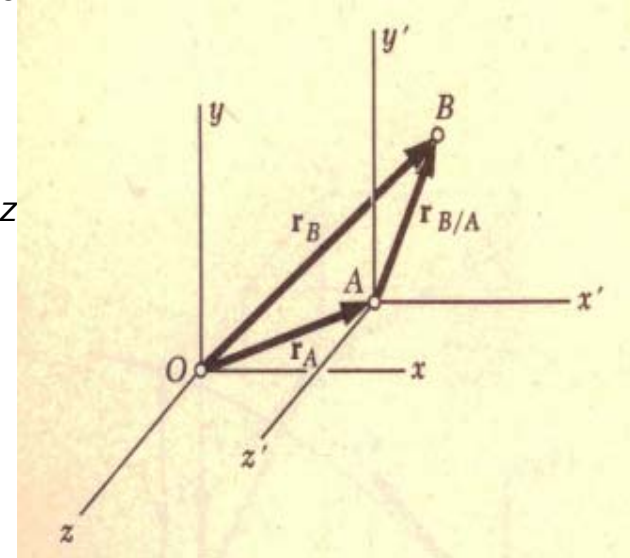
Bir $\vec{P}$ vektörü t zamanının fonksiyonu ise, $d\vec{P}/dt$ türevi, $\vec{P}$ nin Oxyz takımına göre değişim hızını gösterir. $\vec{P}$ yi dik bileşenlerine ayırarak izleyen eşitlik elde edilir:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt} \vec{i} + \frac{dP_y}{dt} \vec{j} + \frac{dP_z}{dt} \vec{k}$$

Daha sonra görüleceği gibi, bir $\vec{P}$ vektörünün hareketli bir karşılaştırma takımından gözlenen değişim hızı, genel olarak sabit bir karşılaştırma takımından gözlenen değişim hızından farklıdır.

Bununla birlikte, eğer hareketli O'x'y'z' takımı **ötelenme** yapıyorsa, yani eksenleri, sabit Oxyz takımının karşıt eksenlerine paralel kalıyorsa, iki takım da aynı i, j, k birim vektörleri kullanılır ve P vektörünün P_x, P_y, P_z bileşenleri, verilen bir anda her iki takım da aynı olur.

Yukarıdaki eşitlikten, $d\vec{P}/dt$ değişim hızının, Oxyz ve O'x'y'z' takımlarına göre aynı olduğu sonucu çıkar. O halde şunu söyleyebiliriz: **Bir vektörün, sabit bir takıma göre değişim hızı ile ötelenme yapan bir takıma göre değişim hızı aynıdır.**



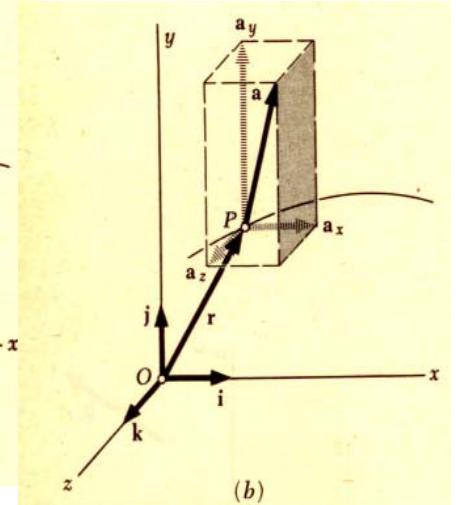
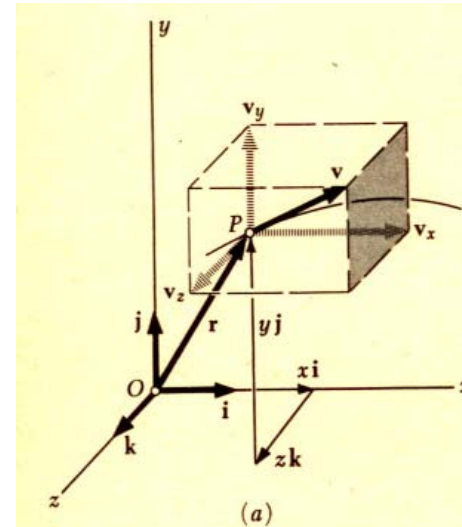
1.3. Hız ve İvmenin Dik Bileşenleri

Bir P maddesel noktasının herhangi bir andaki yeri x, y, z dik koordinatlarıyla tanımlanmışsa, o noktanın $\vec{v}$ hızının ve $\vec{a}$ ivmesinin de dik bileşenlere ayrılması kolay olur.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$



1.4 Ötelenme Yapan Bir Takıma Göre Bağlı Hareket:

Buraya kadar maddesel noktanın hareketini tanımlamak için bir tek takım kullanılmıştı. Pek çok durumda bu takım dünyaya bağlı alınmış ve sabit kabul edilmişti. Şimdi, aynı anda birden fazla karşılaştırma takımı kullanmanın kolaylık sağlayabileceği halleri incelenecektir. Takımlardan biri dünyaya bağlı ise ona **sabit karşılaştırma takımı**, diğer takımlara ise **hareketli karşılaştırma takımı** adı verilecektir. Bununla birlikte sabit bir karşılaştırma takımının seçimi tamamıyla keyfidir. Herhangi bir takım **sabit** olarak alınabilir; o zaman bu takıma rijit bağlı olmayan bütün öteki takımlar **hareketli** sayılır. Uzayda hareket etmekte olan A ve B gibi iki maddesel nokta göz önüne alınsın. x, y, z sabit takım, $x'y'z'$ hareketli takım olsun.

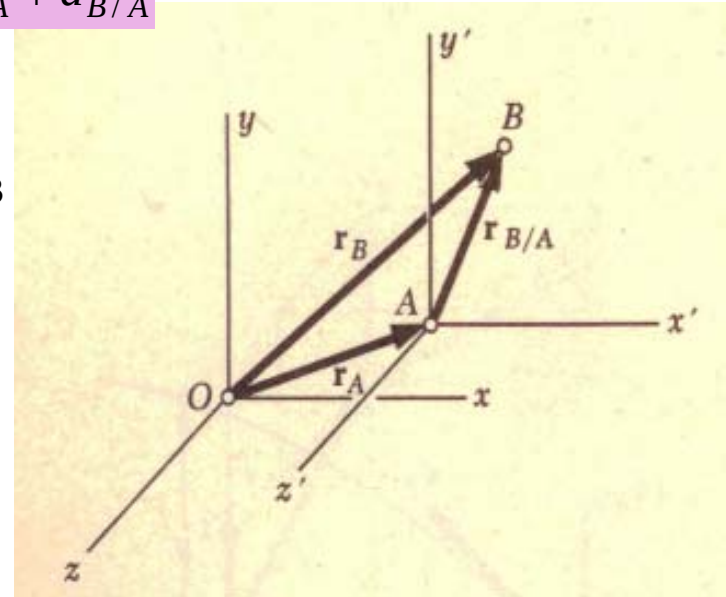
$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

B nin, sabit $Oxyz$ takımına göre hareketine, B nin **salt hareketi** denir.

Bu kısımda çıkardığımız denklemler şunu göstermektedir : B nin **salt hareketi**, A nın hareketi ile A ya bağlanmış hareketli bir takıma göre B nin **bağlı hızını** bileştirerek elde edilebilir. Bununla birlikte, $A'x'y'z'$ takımının **ötelenme** yaptığını, yani A noktası hareket ettiği halde eksenlerin aynı doğrultuyu koruduğunu hatırdan çıkarmamak gereklidir. İleride görüleceği gibi dönme yapan karşılaştırma takımlarında, farklı bağıntılar kullanma zorunluluğu vardır.

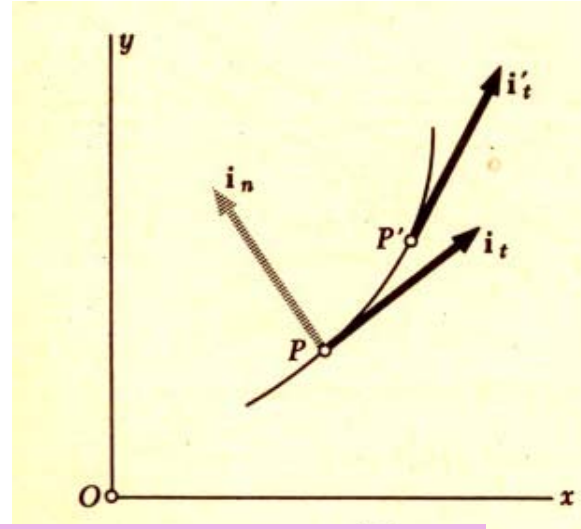
1.5 Teğetsel ve normal bileşenler:

Bir maddesel noktanın hızının, maddesel noktanın yörüngesine teğet bir vektör olduğunu, fakat ivmesinin genel olarak yörüngeye teğet olmadığını Kısım 1.1 de görmüştük. Bazı hallerde, ivmeyi yörüngenin teğeti ve normali doğrultusunda bileşenlere ayırmak daha yararlı olmaktadır.



Maddesel noktanın düzlemsel hareketi:

Önce şekil düzleminde bulunan bir eğri üzerinde hareket eden, bir maddesel noktayı göz önüne alacağız. Verilmiş bir anda maddesel noktanın yeri P olsun. P ye, maddesel noktanın yörüngesine teğet olan ve hareket doğrultusu yönünde bir $\vec{i}_t$ birim vektörü bağlansın. Noktanın biraz sonraki P' yerine karşı gelen birim vektör $\vec{i}_t'$ olsun.



$$|\Delta \vec{i}_t| = 2 \sin(\Delta \theta / 2)$$

$$\lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta \theta / 2)}{\Delta \theta} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta \theta / 2)}{\Delta \theta / 2} = 1$$

Bu durumda limitte, maddesel noktanın yörüngesine normal, $\vec{i}_t$ nin döndüğü yönde bir birim vektör elde edilmektedir. Bu vektörü $\vec{i}_n$ ile göstererek

$$\vec{i}_n = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{i}_t}{\Delta \theta} = \frac{d\vec{i}_t}{d\theta}$$

yazılabilir. Maddesel noktanın $\vec{v}$ hızı yörüngeye teğet olduğundan $\vec{v} = v \vec{i}_t$ yazılabilir. Maddesel noktanın ivmesini

elde etmek için bu ifadenin t ye göre türevi alınır

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{i}_t + v \frac{d\vec{i}_t}{dt}$$

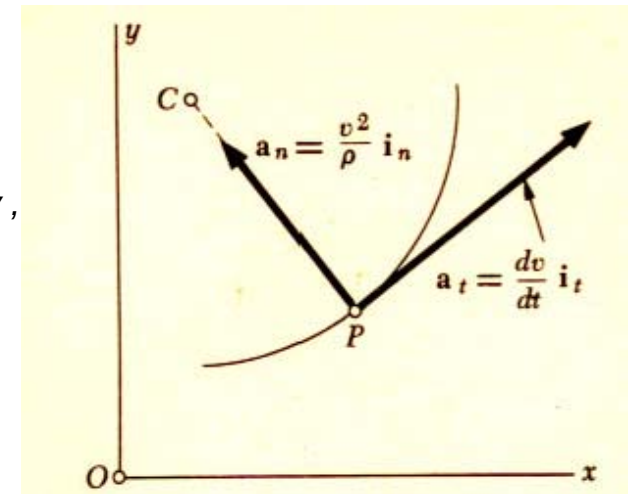
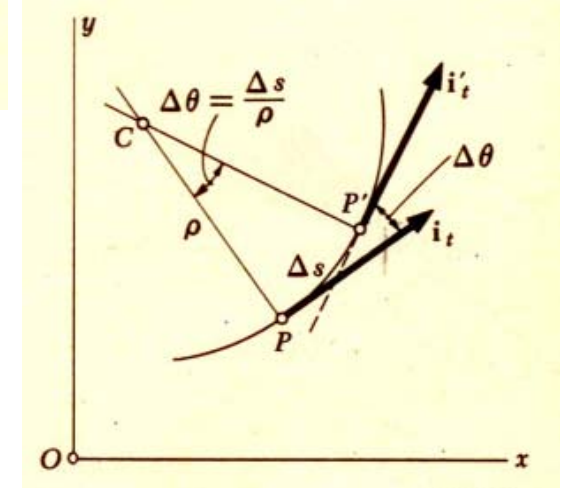
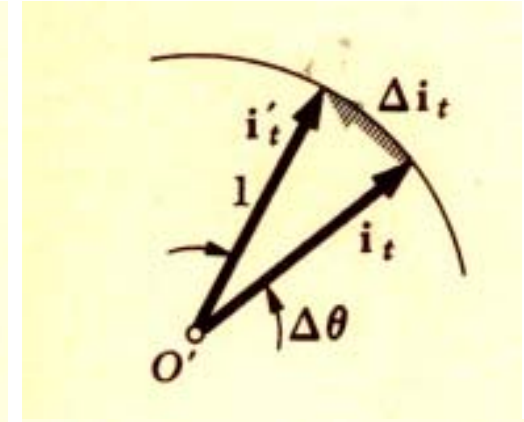
elde edilir. Türev işleminde zincir kuralı dikkate alınarak izleyen bağıntı elde edilir:

$$\frac{d\vec{i}_t}{dt} = \frac{d\vec{i}_t}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt}$$

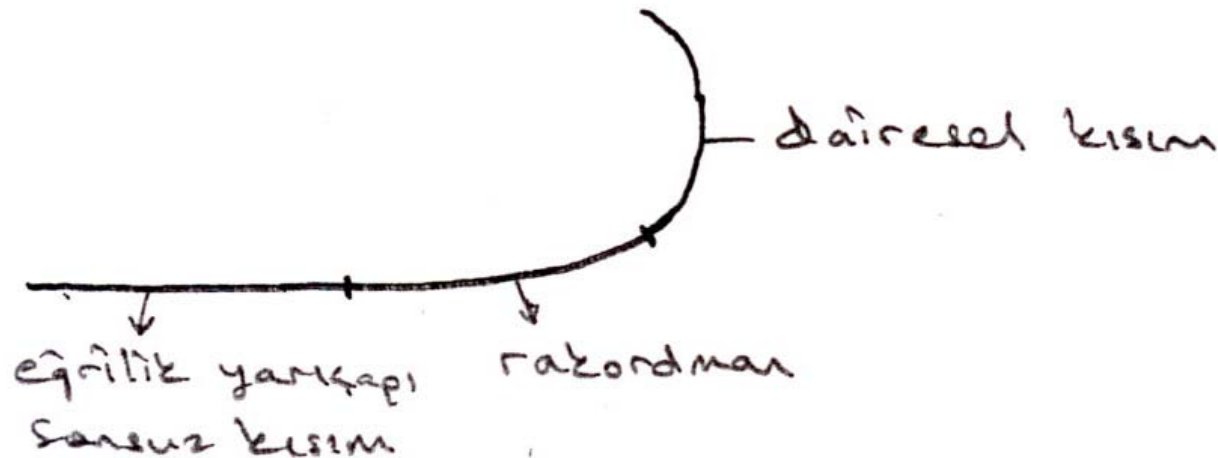
ρ Yörüngenin eğrilik yarıçapı olup $ds/dt=v$,

$d\vec{i}_t / d\theta = \vec{i}_n$ ile birlikte şekilden $d\theta / ds = 1 / \rho$ olduğu görülürse

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{i}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{i}_n = a_t \vec{i}_t + a_n \vec{i}_n \text{ olur.}$$



Elde edilen bu bağıntılar, ivmenin **teğetsel** bileşeninin maddesel noktanın hızının şiddetinin türevine, **normal** bileşeninin ise hızın karesinin yörüngenin eğrilik yarıçapına bölümüne eşit olduğunu ifade etmektedir. Hızın artması ya da azalmasına bağlı olarak a_t pozitif veya negatif olur ve a_n vektör bileşeni ise daima yörüngenin C eğrilik merkezine doğru yönlenmiştir. Yukarıdan anlaşılmaktadır ki ivmenin teğetsel bileşeni, maddesel noktanın hızının şiddetinin değişimini yansıtmakta, normal bileşeni ise, noktanın hızının doğrultusundaki değişimi yansıtmaktadır. Bir maddesel noktanın ivmesinin **sıfır** olması için bu iki bileşenin de sıfır olması gereklidir. O halde bir eğri üzerinde sabit hızla hareket eden bir maddesel noktanın ivmesinin sıfır olması ancak noktanın, eğrinin bir **büküm noktasından** geçmesi (büküm noktasında eğrilik yarıçapı sonsuzdur) ile veya eğrinin bir **doğru olması** ile mümkündür. İvmenin **normal** bileşeninin, maddesel noktanın izlediği yörüngeye bağlı olduğu gerçeği, uçak kanatları, demiryolu rayları gibi birbirinden çok değişik sistem ve mekanizmaların yapımında dikkate alınır. Bir kanadın yanından geçen hava zerreciklerinin ivmesindeki ani değişimlere engel olmak için, kanat profilleri eğrilik yarıçapında ani değişimler olmayacak şekilde yapılır. Demiryolu kurbalarını inşa ederken de vagonların ivmelerindeki ani değişimlerin önüne geçmek için benzer dikkat gösterilir (çünkü bu değişimler teçhizata sert etki yapar ve yolcuları rahatsız eder). Örneğin, yolun doğrusal kısmının hemen arkasından dairesel bir kısım yapılmaz. Doğru bölgedeki **sonsuz** eğrilik yarıçapından dairesel bölgedeki **sonlu** eğrilik yarıçapına düzgün olarak geçmeye yardımcı olmak için **özel geçiş bölgeleri** (rakordman) kullanılır.



1.6. Kutupsal Koordinatlarda Bileşenler

Düzlemsel hareketteki bazı problemlerde P maddesel noktasının yeri, r ve θ kutupsal koordinatları yardımıyla tanımlanır. O zaman maddesel noktanın hızını ve ivmesini, OP doğrusuna paralel ve dik bileşenlere ayırmak daha elverişli olur. Bu bileşenlere **radyal** ve **radyale dik (enine)** adı verilir.

P ye $\vec{i}_r$ ve $\vec{i}_\theta$ olmak üzere iki birim vektör konsun. $\vec{i}_r$ radyal doğrultuyu, $\vec{i}_\theta$ radyale dik doğrultuyu tanımlar.

$$\frac{d\vec{i}_r}{d\theta} = \vec{i}_\theta \quad \frac{d\vec{i}_\theta}{d\theta} = -\vec{i}_r$$

$$\vec{r} = r \vec{i}_r$$

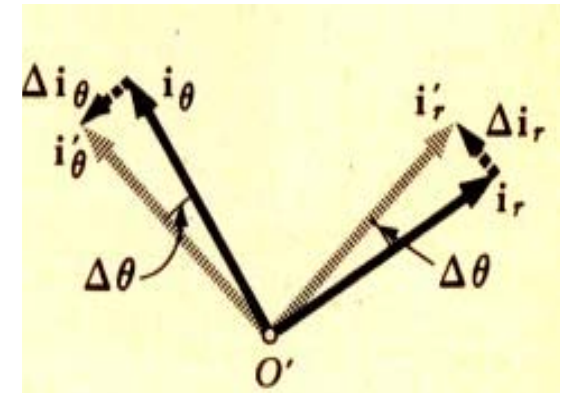
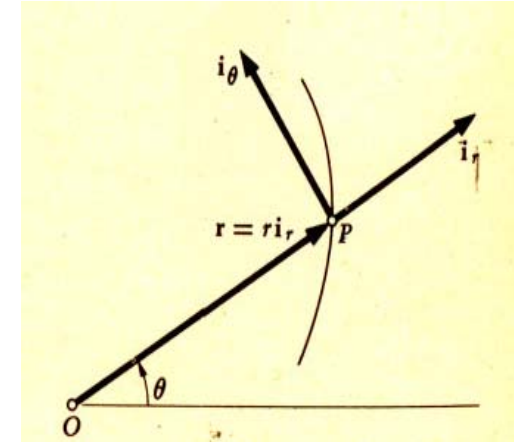
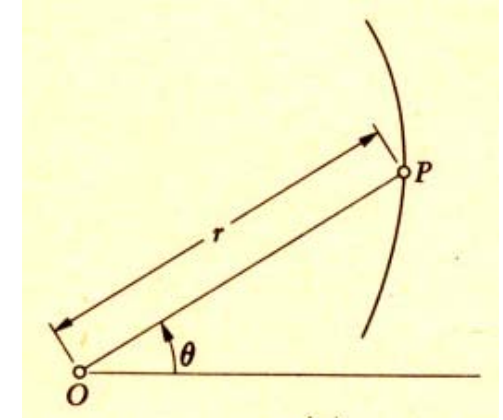
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{i}_r + r \frac{d\vec{i}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{i}_r + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{i}_r}{d\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{i}_r + r \dot{\theta} \vec{i}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \vec{i}_r + \dot{r} \frac{d\vec{i}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{i}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{i}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{i}_\theta}{dt}$$

$$d\vec{i}_r / dt = \dot{\theta} \vec{i}_\theta \text{ ve } d\vec{i}_\theta / dt = -\dot{\theta} \vec{i}_r$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{i}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \vec{i}_\theta$$



1.7. Maddesel noktanın uzay hareketine genişletme: Silindirik koordinatlar:

Bir P maddesel noktasının uzaydaki yeri bazen R , θ ve z silindirik koordinatları yardımıyla tanımlanır (Şekil 1.13a).

Bu durumda Şekil 1.13b de gösterilmiş olan $\vec{i}_R, \vec{i}_\theta$ ve $\vec{k}$ birim vektörlerini kullanmak uygun olur.

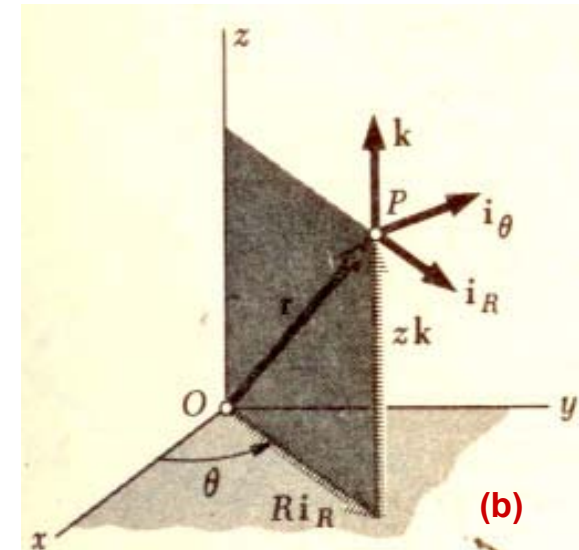
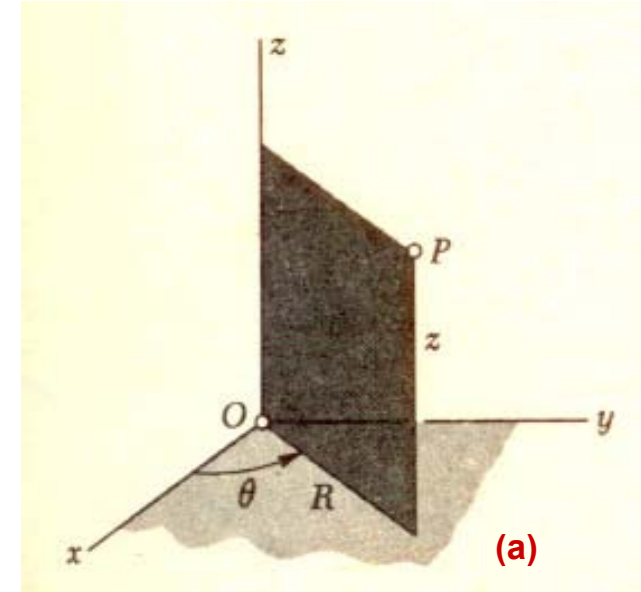
P noktasının $\vec{r}$ yer vektörü, vektörler doğrultusunda bileşenlerine ayrılarak izleyen şekilde yazılabilir:

$$\vec{r} = R\vec{i}_R + z\vec{k} \quad (1.36)$$

Şekil 1.13 den faydalanılarak P noktasının hız ve ivme değerleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{R}\vec{i}_R + R\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{z}\vec{k} \quad (1.37)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\vec{i}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\vec{i}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \quad (1.38)$$



Şekil 1.13

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MEKANİK ANABİLİM DALI**

DİNAMİK

2.BÖLÜM

**MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ :
KUVVET, KÜTLE VE İVME**

PROF. DR. TURGUT KOCATÜRK

2.1 Newton' un Üç Temel Kanunu ve Çekim Kanunu:

Birinci Kanun:

Bir maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvvet sıfırsa maddesel nokta (başlangıçta hareketsiz ise) hareketsiz kalır veya (başlangıçta harekette ise) bir doğru üzerinde sabit hızla hareketine devam eder.

İkinci Kanun:

Eğer bir maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvvet sıfır değilse, maddesel nokta bu bileşke kuvvetin şiddeti ile orantılı ve bileşke kuvvetin doğrultu ve yönünde bir ivme kazanır. Bu kanun

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

(2.1)

şeklinde ifade edilir.

Üçüncü Kanun:

Birbirine değen cisimler arasındaki etki ve tepki kuvvetleri aynı şiddettedir, aynı tesir çizgisi üzerindedir ve zıt yöndedir.

Newton' un çekim kanunu:

İki maddesel nokta karşılıklı olarak eşit ve zıt yönlü kuvvetleri ile birbirini çeker ; bu kuvvetlerin şiddeti şu formülle verilir :



$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

(2.2)

G: Çekim sabiti

r: İki maddesel nokta arasındaki uzaklık

M, m: Maddesel noktaların kütleleri

Özel Durum:

Kütlelerden birinin dünya olması durumunda $F = G \frac{Mm}{R^2}$ olur. Burada M dünyanın kütlesi, R dünyanın yarıçapı ve $g = \frac{GM}{R^2}$ alınır ve adına yerçekimi ivmesi denirse $\vec{W} = m \vec{g}$ olur. W ye cismin ağırlığı denir.

Yukarıdaki formüllerde R nin değeri göz önüne alınan noktanın yüksekliğine ve aynı zamanda enlemine de bağlıdır. Nokta yeryüzünde kaldığı sürece bir çok mühendislik hesaplarında g yi 9.81 m/s^2 ye eşit kabul etmek yeteri kadar doğrudur.

Maddesel nokta aynı anda birden fazla kuvvet etkirse bu durumda Newton'un 2. kanunu $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ şeklini alır. Burada $\sum \vec{F}$ maddesel noktaya etkiyen bütün kuvvetlerin vektörel toplamını veya bileşkesini göstermektedir.

Birimler:

Mekanikte kullanılan temel kavramlar **uzay, zaman, kütle ve kuvvettir.**

Uzay: P maddesel noktasının yeri kavramı ile yakından ilgilidir. P nin yeri, bir karşılaştırma noktası veya *başlangıçtan* itibaren verilen üç doğrultuda ölçülen üç uzunlukla tanımlanır. Bu uzunluklara P nin koordinatları adı verilir.

Zaman: Zamanla koordinatlar değiştiğinden zamanın bilinmesi gereklidir.

Kütle: Kütlesi aynı olan iki cismin dünya tarafından aynı şiddette çekim kuvveti etkisi altındadır.

Kuvvet: Bir cismin diğeri üzerine etkisini gösterir. Ya gerçek dokunma sonucunda veya çekim kuvveti, manyetik kuvvetlerde olduğu gibi uzaktan uygulanabilir.

Tablo 2.1. Birim sistemleri

Boyutlar	Metrik sistemler		İngiliz sistemleri
	Salt (MKS)	Salt (CGS)	Salt
Uzunluk Kütle Zaman Kuvvet, $F=ma$ dan	Metre (m) Kilogram (kg) Saniye (san) Newton (kg m/san ²)	Santimetre (cm) Gram (gr) Saniye (san) Din(gr cm/san ²)	Ayak (ft) Libre (lb) Saniye (san) Poundal (lb ft /san ²)
	Çekimsel		Çekimsel
Uzunluk Kuvvet Zaman Kütle, $F =ma$ dan	Metre (m) Kilogram (kg) Saniye (san) kg san ² /m		Ayak (ft) Libre (lb) Saniye (san) Slug (lb san ² / ft)

❑ Newton mekaniğinde uzay, zaman ve kütle birbirlerinden bağımsız, mutlak kavramlardır. Kuvvet kavramı ise diğer üçüne $F=ma$ bağıntısı ile bağlıdır. Birimler $F=ma$ bağıntısını sağlayacak şekilde seçildiklerinde kinetik açıdan uyuşurlar.

❑ Mekanikte temel büyüklükler uzunluk, zaman ve kuvvet seçildiğinde bu sisteme teknik sistem, mühendislik sistemi veya çekimsel sistem adı verilir ve bu sistem mühendisler tarafından kullanılır.

❑ Metrik sistemde uzunluk için metre, kuvvet için kilogram, zaman için saniye kullanılır. Bu sistemde türev büyüklük olan kütle Newton'un ikinci kanunundan kgfs^2/m olarak bulunur ve özel bir adı yoktur.

❑ Çekimsel sistemin mahzuru kuvvetin tanımının yerçekimine bağlı olmasıdır. Bu nedenle de noktadan noktaya az da olsa değişir.

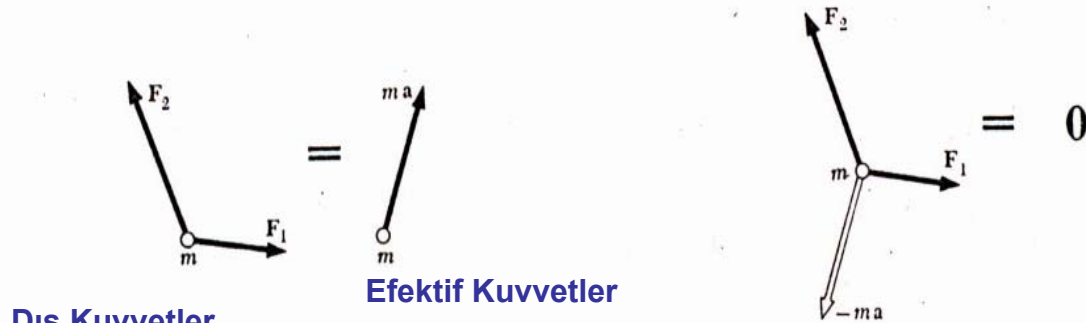
❑ Salt birimler sisteminde (MKS) kuvvet birimi olan Newton, 1kg kütlesindeki bir cisme 1 m/san² lik ivme veren bir kuvvet olarak tanımlanmaktadır. Çekimsel birimler sisteminde kuvvet olarak alınan Kilogram ise, kütlesi 1 kg olan bir cisme, deniz düzeyinde ve 45° enlemde yeryüzünün uyguladığı kuvvet olarak tanımlanmaktadır. Böyle bir yerde serbest düşen bir cismin ivmesi 9.81 m/san² olduğundan, 1kg kuvvetin, 1 kg lik kütleyle 9.81 m/san² lik bir ivme verdiğini görürüz. Bu tanımlara göre $1 \text{ kg kuvvet} \approx 9.81 \text{ N}$ olduğu görülmektedir.

Hareket Denklemleri: Dinamik Denge:

$$\sum (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = m(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})$$

Yandaki denklemin sol tarafına **dış kuvvetler**, sağ tarafına ise **efektif kuvvetler** denir.

Eğer sağ taraf sol tarafa geçirilirse: $\sum \vec{F} - m\vec{a} = 0$ denklemi elde edilir. Newton'un Newton'un ikinci hareket kanunu bu şekilde yazılınca maddesel **nokta dinamik dengededir** denir ve göz önüne alınan problem daha önce statikte kullanılan yöntemler yardımı ile çözülebilir (**Şekil 2.2b**).

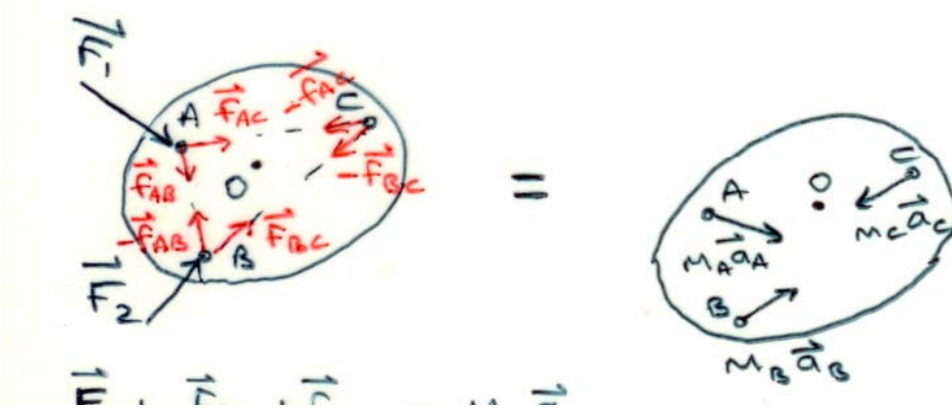


Şekil 2.2

$$-m\vec{a}$$

ifadesine **atalet vektörü** denir ve maddesel noktayı hareket ettirmek veya hareket koşullarını değiştirmek istediğimiz zaman maddesel noktanın gösterdiği direnişin ölçüsüdür. Bu nedenle çoğu zaman **atalet kuvveti** adını alır.

Maddesel Noktalar Sistemi: D' Alembert İlkesi:



Birden fazla maddesel noktanın hareketi söz konusu oluyorsa, Newton'un ikinci kanunu her bir maddesel nokta için ayrı ayrı yazılabilir.

Bununla beraber, rijit cisimde olduğu gibi çok sayıda maddesel noktadan oluşan bir sistem halinde, sistemi bir bütün olarak göz önüne almak genellikle daha kolay olur.

F_1, F_2 : Dış kuvvetler

F_{ij} : İç kuvvetler

$F_{ij} = -F_{ji}$

Bu durumda sistemdeki bir maddesel noktaya etkiyen kuvvetler şunlardan oluşur:

- 1) Sistemin dışındaki **dış kuvvetler**
- 2) Sistemin diğer maddesel noktalarının uyguladığı **iç kuvvetler**

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{f}_{AC} + \vec{f}_{AB} &= m_A \vec{a}_A \\ \vec{F}_2 + \vec{f}_{BC} + (-\vec{f}_{AB}) &= m_B \vec{a}_B \\ (-\vec{f}_{AC} + (-\vec{f}_{BC})) &= m_C \vec{a}_C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B + m_C \vec{a}_C \\ \text{Dış kuvvetlerin toplamı} &= \text{Efektif kuvvetlerin toplamı} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^m \vec{F}_{dış} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

(3)

D'Alembert İlkesi: Bir maddesel noktalar sistemine etkiyen dış kuvvetler, sistemin çeşitli noktalarına etkiyen efektif kuvvetlere eşdeğerdir. Buradan aynı zamanda şu sonuç çıkar:

$$\sum (\vec{M}_o)_{dış} = \sum (\vec{r} \times m \vec{a})$$

Yani, dış kuvvetlerin bir o noktasına göre momentlerinin toplamı, aynı o noktasına göre efektif kuvvetlerin momentlerinin toplamına eşittir.

Bir Maddesel Noktalar Sisteminin Kütle Merkezinin Hareketi:

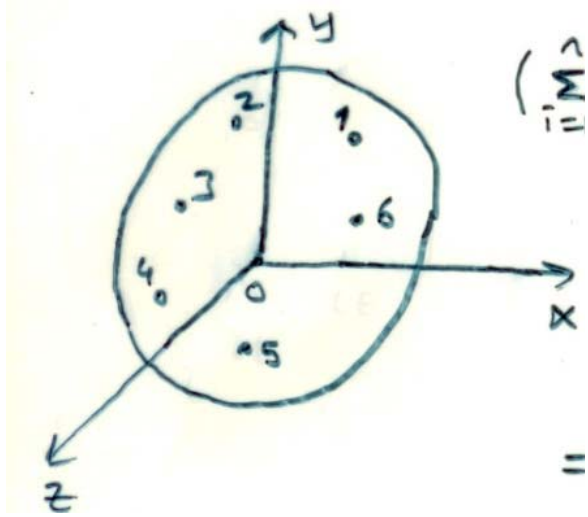
$$\sum_{i=1}^m \vec{F}_{dış} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

Denklemi maddesel noktalar sisteminin kütle merkezi göz önüne alınarak değişik bir şekilde yazılabilir. Sistemin kütle merkezi

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{r} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

$\vec{r}$: sistemin kütle merkezinin yeri

$$\vec{r} = \bar{x} \vec{i} + \bar{y} \vec{j} + \bar{z} \vec{k}$$



$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \right) (\bar{x} \vec{i} + \bar{y} \vec{j} + \bar{z} \vec{k}) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k})$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \bar{z} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{r} \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right] = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{v} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{a} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

$$\sum_{i=1}^m \vec{F}_{dış_i} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{a}$$

Bir maddesel noktalar sisteminin kütle merkezi, sistemin bütün kütlesi ve bütün dış kuvvetleri bu noktada toplanmış gibi hareket eder. Bu ilke en iyi şekilde, patlayan bir merminin hareketi ile canlandırılabilir. Mermi patladıktan sonra mermi parçalarının G kütle merkezi, aynı yörünge üzerinde harekete devam edecektir. Gerçekten, G noktası, parçaların kütle ve ağırlıkları G de toplanmış gibi hareket etmek zorundadır; şu halde bu nokta sanki mermi patlamamış gibi hareket edecektir.

Ortaya konan bu ilke, maddesel noktalar sisteminin kütle merkezi etrafındaki hareketi ile ilgilenilmiyorsa, sadece kütle merkezinin hareketi ile ilgileniliyorsa, maddesel noktalar sisteminin yerine, kütlesi sistemin kütlesine eşit bir maddesel nokta konulabileceğini gösterir. Bununla beraber efektif kuvvetler sistemi, genel olarak G kütle merkezine bağlanmış bir $(\sum m)\vec{a}$ vektörüne eşit olmaz. Çünkü efektif kuvvetlerin bileşkesi ve dolayısıyla dış kuvvetlerin bileşkesi, genel olarak maddesel noktalar sisteminin kütle merkezinden geçmez.

Maddesel Noktanın Eğrisel Hareketi:

Bir P maddesel noktası eğrisel bir yörünge üzerinde hareket ediyorsa ivmesinin dik bileşenlere, teğetsel ve normal bileşenlere veya radyal ve radyale dik bileşenlere ayrılabilirdiği görülmüştü. Şu halde Newton' un ikinci hareket kanununu ifade etmek için bu gösterim yöntemlerinden her hangi biri kullanılabilir.

Dik Bileşenler:

$$\sum F_x = m a_x; \quad \sum F_y = m a_y; \quad \sum F_z = m a_z$$

$$\sum F_x = m \ddot{x}; \quad \sum F_y = m \ddot{y}; \quad \sum F_z = m \ddot{z}$$

Teğetsel ve Normal Bileşenler:

$$\sum F_t = m a_t; \quad \sum F_n = m a_n$$

$$\sum F_t = m \frac{dv}{dt}; \quad \sum F_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

Kutupsal Koordinatlarda Bileşenler:

$$\sum F_r = m a_r; \quad \sum F_\theta = m a_\theta$$

$$\sum F_r = m (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2); \quad \sum F_\theta = m (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

3. MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ : İŞ VE ENERJİ

3.1. Giriş

$\vec{F} = m \vec{a}$ denklemi ile kinematiğin ilkeleri birleştirilirse iki yeni çözümleme yöntemi daha elde edilebilir :

•*iş ve enerji yöntemi*

•*impuls ve momentum yöntemi*

Bu yöntem üç önemli kavrama dayanır :

•*Bir kuvvetin işi kavramı*

•*potansiyel enerji kavramı*

•*maddesel noktanın kinetik enerjisi kavramı*

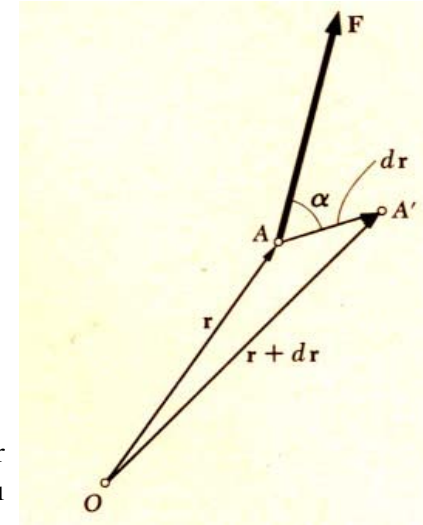
3.2. Bir Kuvvetin İş

•*Bir kuvvetin işi kavramı*

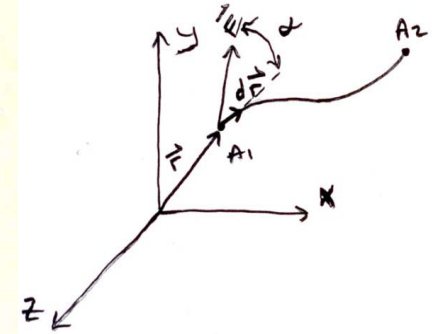
•*potansiyel enerji kavramı*

•*maddesel noktanın kinetik enerjisi kavramı*

Bir A noktasından yakınındaki A' noktasına hareket eden bir maddesel nokta göz önüne alalım (Şekil 3.1). A noktasına karşı gelen yer vektörü $\vec{r}$ ile gösterilirse, A ile A' yü birleştiren küçük vektör $d\vec{r}$ diferansiyeli ile gösterilir. $d\vec{r}$ vektörüne maddesel noktanın *yer değiştirmesi* adı verilir.

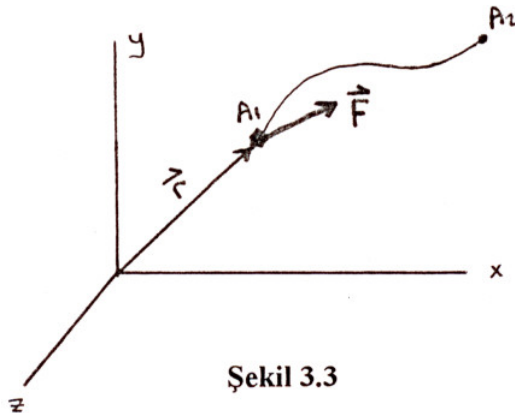


$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
$$dW = F dr \cos \alpha$$



$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

3.3. Maddesel Noktanın Kinetik Enerjisi



Şekil 3.3

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A_1}^{A_2} m \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{A_1}^{A_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} =$$
$$\int_{A_1}^{A_2} m \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

buradaki $(1/2)mv^2$ ifadesi *maddesel noktanın kinetik enerjisi* olarak adlandırılıp E_k ile gösterilir ve skaler bir büyüklüktür.

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{k2} - E_{k1}$$

3.4. Potansiyel Enerji

Potansiyel enerji, *bir cismin konumu sebebiyle iş yapma kapasitesi* olarak tanımlanmaktadır. ϕ skaler bir fonksiyon olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun değeri konum koordinatlarına bağlıdır. Bir $\vec{F}$ kuvvetini böylesi bir fonksiyonun gradyeni olarak ifade edelim:

$$\vec{F} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \quad \text{Bu kuvvetin yaptığı iş, işin tanımından}$$

$$(W_{1 \rightarrow 2})_k = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \phi_2 - \phi_1$$

olur. $(W_{1 \rightarrow 2})_k$ konservatif kuvvetin işi olarak adlandırılmaktadır. Burada ϕ ye iş fonksiyonu dersek, bunun değeri fonksiyonun ilk ve son değerlerine bağlıdır ve iki nokta arasında yapılan iş izlenen yoldan bağımsız kalmaktadır (Şekil 3.4a). Eğer kuvvet A_1 den A_2 ye gittiğinde kapalı bir yörünge çiziyorsa (A_1 ile A_2 üst üste düşer) işin sıfır ettiği görülür (Şekil 3.4b). Böylesi bir ϕ fonksiyonunun gradyeni olarak yazılabilen kuvvete de konservatif kuvvet denmektedir. Bu durumda $E_p = -\phi$ olarak tanımlanan ifadeye **potansiyel enerji fonksiyonu** adı verilir.

3.5. İş ve Enerji İlkesi

$$W_{1 \rightarrow 2} = (W_{1 \rightarrow 2})_o + (W_{1 \rightarrow 2})_k$$

Burada $(W_{1 \rightarrow 2})_k$ konservatif kuvvetlerin işi olduğuna göre $(W_{1 \rightarrow 2})_o$ konservatif olmayan kuvvetlerin işi olur. Konservatif olmayan kuvvetlerin işi maddesel noktanın aldığı yola bağımlı kalmaktadır. Böylesi kuvvetlere örnek olarak sürtünme kuvveti verilebilir.

$$(W_{1 \rightarrow 2})_o + E_{p1} - E_{p2} = E_{k2} - E_{k1} \rightarrow (W_{1 \rightarrow 2})_o = E_{p2} - E_{p1} + E_{k2} - E_{k1}$$

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}, \quad \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$$

$$(W_{1 \rightarrow 2})_o = \Delta E_p + \Delta E_k$$

Bu ifade, konservatif olmayan kuvvetlerin yaptığı işin, toplam potansiyel enerjideki değişim ile toplam kinetik enerjideki değişimin toplamına eşit olduğunu göstermektedir.

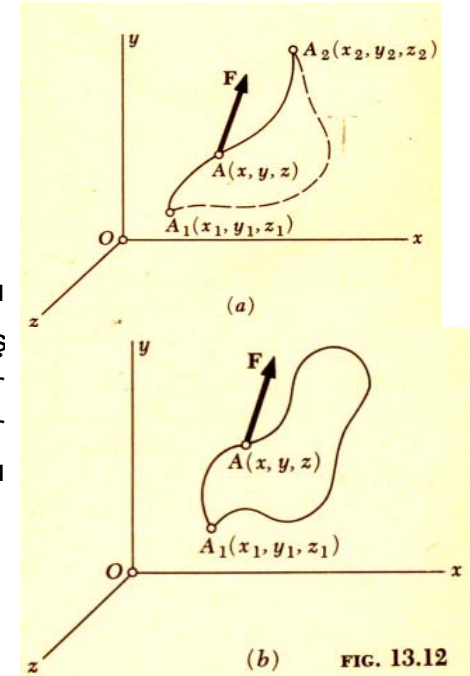


FIG. 13.12

3.6. Bazı Kuvvetler İçin Potansiyel Enerji İfadeleri

Sabit kuvvet: Sabit bir kuvvet $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ olarak verildiğine göre E_p potansiyel enerji fonksiyonunu bulalım:

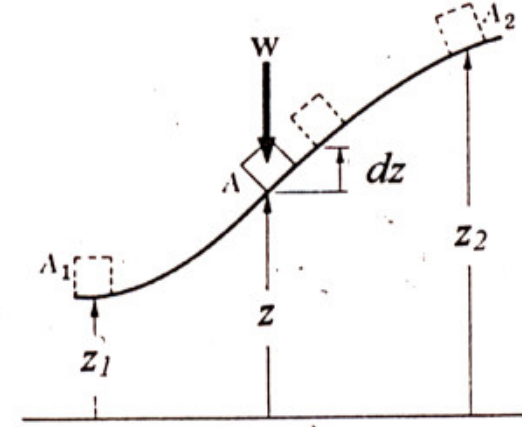
$$F_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; F_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}; F_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x = a \rightarrow \phi = \int a dx = ax + c_1 \quad c_1 \text{ y ve z değişkenlerine bağlı, x den bağımsız.}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y = b = c_{1y} \rightarrow c_1 = by + c_2 \quad c_2 \text{ z değişkenine bağlı, x ve y den bağımsız.}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi_z = c = c_{2z} \rightarrow c_2 = cz + c_3 \quad \phi = ax + by + cz + c_3 \quad c_3 \text{ sıfır alınabilir.}$$

Enerji fonksiyonu $E_p = -\phi$ de $E_p = -ax - by - cz$ olarak elde edilir.



Yerçekimi kuvveti: Şekil 3.5 de verilen eksen takımı için $\vec{F} = -mg\vec{k}$ olmaktadır. Böylesi bir kuvvetin potansiyel enerji fonksiyonu sabit kuvvet için izlenen işlem aşamaları tekrarlanarak elde edilir. Bu aşamalar aşağıda verilmiştir:

$$\vec{F} = -mg\vec{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{d\phi}{dz} = -mg \rightarrow \phi = -mg \int dz = -mgz + c$$

$$E_p = -\phi \quad E_p = -\phi = mgz - c \quad c = 0 \rightarrow E_p = mgz$$

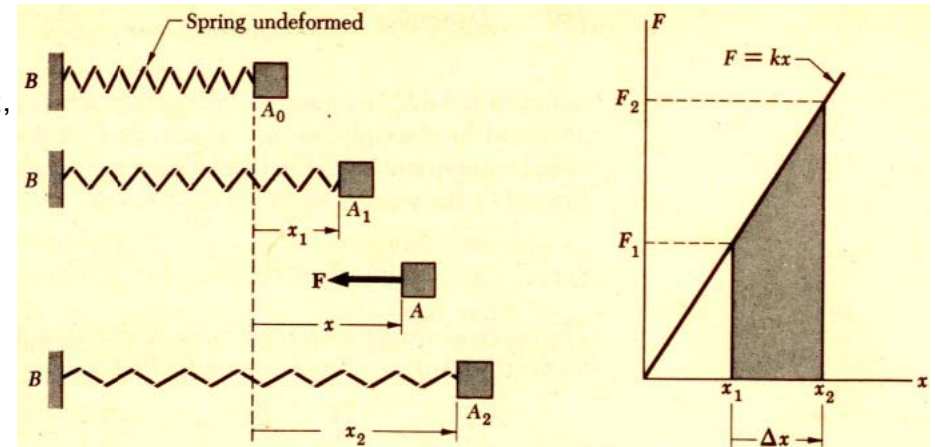
Yay kuvveti : Yay kuvveti durumunda, şekil 3.6 da seçilen eksen takımı için, yayın x ekseninin artı yönünde x kadar çekilmesi durumunda, yayın maddesel noktaya etki ettirdiği kuvvet $\vec{F} = -kx\vec{i}$ olmaktadır. Bu kuvvet, bir ϕ skaler fonksiyonunun gradyeni olarak

$$\vec{F} = -kx\vec{i} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \phi = -\frac{1}{2}kx^2 + c$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - c, \quad c = 0 \rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$



4.MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ:İMPULS VE MOMENTUM

4.1. İmpuls ve Momentum İlkesi

Bu yöntem impuls ve momentum ilkesine dayanır ve kuvvet, kütle, hız ve zamanla ilgili problemler için özellikle elverişlidir.

Bir $\vec{F}$ kuvvetinin etkisinde bulunan bir m maddesel noktası göz önüne alalım. Newton' un ikinci kanunu olan $\vec{F} = m\vec{a}$ da $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ koyarsak

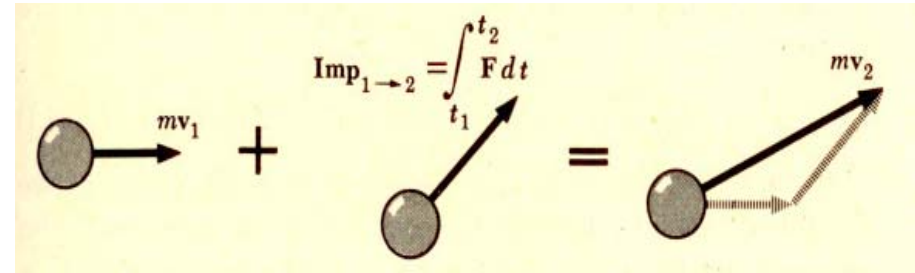
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$m\vec{v}$ vektörüne, maddesel noktanın **doğrusal momentumu** veya **momentumu** denir. Bu, maddesel noktanın hızı ile aynı doğrultudadır ve şiddeti $N \cdot s$ ile ölçülür. Buradaki denklem **maddesel noktaya etkiyen $\vec{F}$ kuvvetinin, maddesel noktanın momentumundaki değişim hızına eşit olduğunu** ifade etmektedir. Bu şekil, ikinci kanunun Newton tarafından ilk ifade edildiği şekildir.

$$\vec{F} dt = d(m\vec{v}) \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \rightarrow m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2$$

Buradaki integrale göz önüne alınan zaman aralığındaki doğrusal impuls veya sadece impuls adı verilir.

Kinetik enerji, potansiyel enerji ve iş skaler büyüklükler olduğu halde, momentum ve impulsun vektörel büyüklükler olduğuna dikkat edilmelidir.



$$(mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = (mv_x)_2, \quad (mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = (mv_y)_2, \quad (mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = (mv_z)_2$$

Maddesel noktaya birden fazla kuvvet etkiyorsa, her bir kuvvetin impulsu göz önüne alınmalıdır. O zaman

$$m\vec{v}_1 + \sum \vec{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\vec{v}_2$$

4.2. Maddesel Noktalar Sistemi

Her bir maddesel nokta için ayrı ayrı impuls-momentum denklemi yazılırsa

$$\sum m \vec{v}_1 + \sum \dot{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \sum m \vec{v}_2$$

Bu eşitlikte iç ve dış kuvvetlerin impulsları da işe girmektedir. Oysa iç kuvvetler birbirine eşit şiddette ve zıt yönde, aynı tesir çizgisi üzerinde bulunan ikişer kuvvet olarak meydana geldiklerinden, bunların impulslarının toplamı sıfır eder ve sadece dış kuvvetlerin impulslarını göz önüne almak yeterli olur.

$$\sum m \vec{v}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{dış} dt = \sum m \vec{v}_2$$

Maddesel noktalar sisteminin G kütle merkezi göz önüne alınırsa denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sum m \vec{r} = (\sum m) \vec{r} \rightarrow \sum m \vec{v} = (\sum m) \vec{v}$$

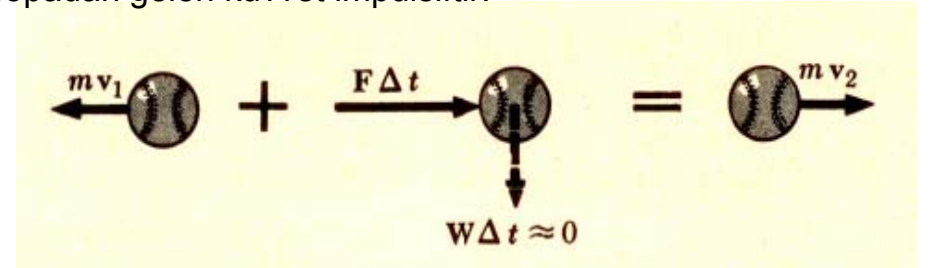
$$(\sum m) \vec{v}_1 + \sum Dış \dot{Imp}_{1 \rightarrow 2} = (\sum m) \vec{v}_2$$

Bulunan denklemin bütün dış kuvvetlerin kütlesi $\sum m$ olan bir tek maddesel noktaya etkimesi halinde elde edilecek denklemle özdeş olduğuna dikkat edilmelidir. Bununla beraber bu denklemin maddesel noktalardan oluşan sistemi tam olarak karakterize etmediğini belirtmekte yarar vardır.

4.3. İmpulsif Kuvvetler

İmpulsif kuvvet: Maddesel noktaya çok kısa bir zaman aralığında etkimesine karşın momentumunda belirgin bir değişim meydana getiren kuvvetlere denir. Örneğin bir beyzbol topuna sopadan gelen kuvvet impulsiftir.

Çarpışma süresinde impulsif olmayan bir kuvvetin impulsu ihmal edilebilir: Ağırlık kuvveti, yay kuvveti bilinen kuvvetler olup ihmal edilebilirler. Bilinmeyen reaksiyon kuvvetleri impulsif olabilir veya olmayabilirler. Bunların ihmal edilebilir olduğu gösterilmedikçe denklemlere katılmaları gereklidir.



$$m \vec{v}_1 + \sum \vec{F} \Delta t = m \vec{v}_2$$

4.4. Momentumun Korunumu

$$\sum m \vec{v}_1 + \sum Dış \dot{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \sum m \vec{v}_2$$

Bir maddesel noktalar sistemine etkiyen dış kuvvetlerin impulsları toplamı sıfır ise, sistemin toplam momentumu sabit kalır.

$$\sum m \vec{v}_1 = \sum m \vec{v}_2 \rightarrow \sum (m) \vec{v}_1 = \sum (m) \vec{v}_2 \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

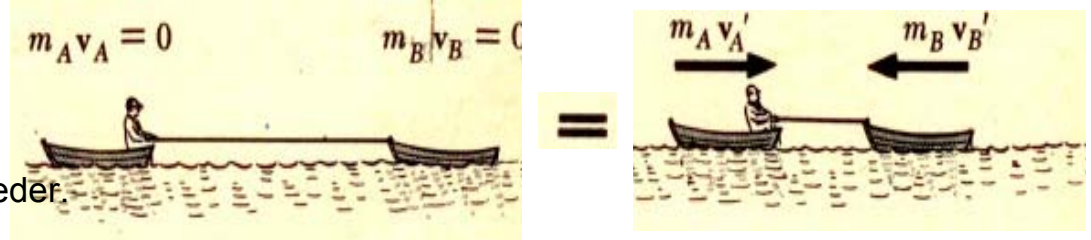
Bir maddesel noktalar sistemine etkiyen dış kuvvetlerin impulsları toplamı sıfır ise **sistemin kütle merkezi sabit hızla hareket eder.**

Momentumun korunumunda iki farklı hale sık sık rastlanır :

1. Sısteme etkiyen dış kuvvetler göz önüne alınan süre içerisinde birbirini dengelemektedir. Zaman aralığı ne kadar uzun olursa olsun $\sum Dış \dot{Imp}_{1 \rightarrow 2} = 0$ olur ve (4.11) formülü uygulanır.

$$\sum m \vec{v}_1 = \sum m \vec{v}_2 \rightarrow 0 = m_A v'_A + m_B v'_B \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = 0$$

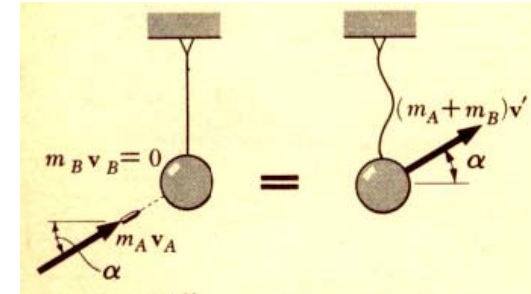
Kayık ağırlıkları ve kaldırma kuvvetleri birbirlerini dengelediklerinden bunların impulsları toplamı sıfır eder.



2. Gözönüne alınan zaman aralığı çok kısa olup tüm dış kuvvetler impulsif olmayan tiptendir. Bu durumda

$$\sum Dış \dot{Imp}_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \text{olur.}$$

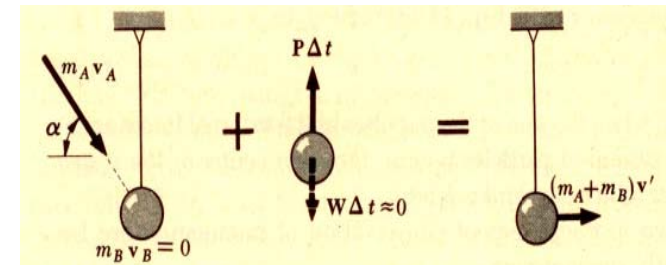
Mermi şeklindeki gibi küreye vurduğunda ipteki kuvvet sıfır olur ve küreyle merminin ağırlığı dengelenmemiş kalır. Fakat zaman çok kısa olduğundan ağırlığın impulsu ihmal edilebilir. Bu durumda $m_A v_A + 0 = (m_A + m_B) \vec{v}'$ olur.



Mermi şeklindeki gibi küreye aşağıya doğru hareket ederek saplansın.

$$\sum m \vec{v}_1 + \sum Dış \dot{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \sum m \vec{v}_2$$

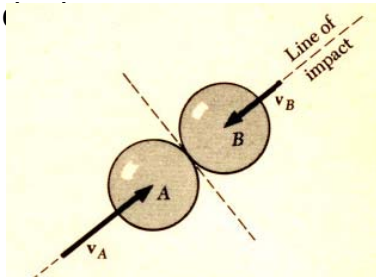
$$m_A v_A \cos \alpha + 0 = (m_A + m_B) v' \\ -m_A v_A \sin \alpha + P \Delta t = 0$$



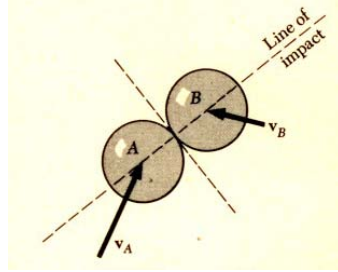
x doğrultusunda momentum korunur, y doğrultusunda korunmaz.

4.5. Çarpışma

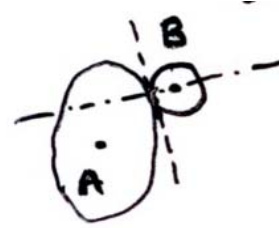
- İki maddesel noktanın çok kısa bir süre içinde birbirine dokunup, bu anda karşılıklı olarak birbirlerine oldukça büyük kuvvetler uygulamalarına **çarpışma** denir. Çarpışma süresindeki dokunma yüzeylerinin ortak normaline **çarpışma doğrusu** adı verilir. Çarpışan cisimlerin kütle merkezleri bu normal üzerinde ise, çarpışmaya **merkezzel çarpışma** denir. Aksi halde çarpışma, **merkezzel olmayan çarpışma** adını alır.
- İki cismin hızı, çarpışma doğrusu üzerinde ise çarpışmaya **doğru çarpışma** denir. Öte yandan cisimlerden biri veya her ikisi çarpışma doğrusundan farklı bir doğru üzerinde hareket ediyorsa, çarpışmaya **eğik çarpışma**



(a) Doğru merkezzel Çarpışma



(b) Eğik merkezzel çarpışma

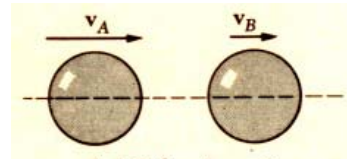


(c) Merkezi olmayan çarpışma

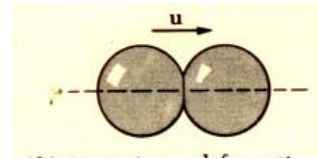
4.6. Doğru Merkezi Çarpışma

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v}'_A + m_B \vec{v}'_B$$

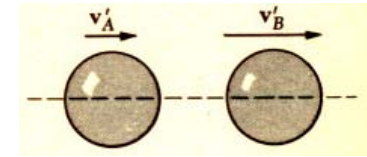
$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$



(a) Çarpışmadan önce

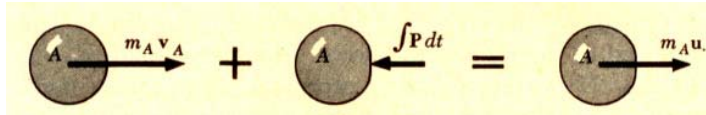


(b) Maksimum şekil değiştirme konumunda



(c) Çarpışmadan sonra

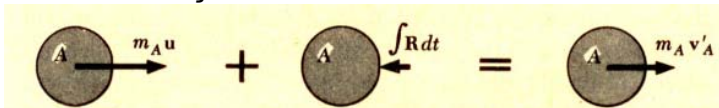
Şekil değiştirme süresi :



$$m_A v_A - \int P dt = m_A u$$

$$e = \frac{\int \vec{R} dt}{\int \vec{P} dt}$$

Geri dönüş süresi :



$$m_A u - \int R dt = m_A v'_A$$

A cismi için benzer şekilde B cismi için;

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B}$$

$$e = \frac{(u - v'_A) + (v'_B - u)}{(v_A - u) + (u - v_B)} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

Genel olarak geri dönüş süresinde etkiyen R kuvveti şekil değiştirme süresinde etkiyen P kuvvetinden farklıdır ve $\int \vec{R} dt$ impulsunun şiddeti $\int \vec{P} dt$ nin şiddetinden

küçüktür. e değeri daima 0 ile 1 arasındadır ve daha çok çarpışan cisimlerin yapıldığı malzemeye bağlıdır.

Özel haller:

1. $e = 0$, tam plastik çarpışma. İki cisim çarpıştıktan sonra birbirine bitişik kalır. Momentum korunur, enerji korunmaz

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v'$$

2. $e = 1$, tam elastik çarpışma, momentum ve enerji korunur.

$$v'_B - v'_A = v_A - v_B$$

Tam elastik çarpışma halinde sistemin momentumundan başka enerjisinin de korunduğuna dikkati çekmek yerinde olur.

$$m_A (v_A - v'_A) = m_B (v'_B - v_B)$$

$$v_A + v'_A = v_B + v'_B$$

$$m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B (v'_B - v_B)(v_B + v'_B)$$
$$m_A v_A^2 - m_A (v'_A)^2 = m_B (v'_B)^2 - m_B v_B^2$$

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A (v'_A)^2 + \frac{1}{2} m_B (v'_B)^2$$

Ancak unutulmamalıdır ki, **çarpışmanın genel halinde**, yani e nin 1'e eşit olmadığı halde, **sistemin mekanik enerjisi korunmaz**. Bu, her hangi verilen halde, çarpışmadan önce ve sonraki kinetik enerjileri karşılaştırarak gösterilebilir. Kaybolan kinetik enerji kısmen ısıya dönüşür, kısmen de çarpışan cisimlerde elastik dalgalar doğurmaya harcanır.

4.7. Eğik Merkezsel Çarpışma

Şimdi çarpışan cisimlerin hızlarının, çarpışma doğrultusunun üzerinde bulunmadığı hali göz önüne alınırsa, bu haldeki çarpışmaya **eğik** denir. Cisimlerin çarpışmadan sonraki v'_A ve v'_B hızları gerek şiddet, gerek doğrultu bakımından bilinmediği için, bunların belirtilmesi dört bağımsız denklem kullanılmasını gerektirecektir.

x eksenini çarpışma doğrultusunda, y eksenini ise değme yüzeylerinin ortak teğeti üzerinde seçelim. Cisimlerin tam **cilalı ve sürtünmesiz** olduğunu kabul edersek çarpışma sırasında cisimlere etkiyen impulsif kuvvetlerin, sadece x eksenini doğrultusundaki iç kuvvetler olduğunu görürüz. O halde şunları ifade edebiliriz:

1. A cisminin momentumunun y bileşeni korunur.

2. B cisminin momentumunun y bileşeni korunur.

3. Sistemin toplam momentumunun x bileşeni korunur.

4. İki cismin çarpıştıktan sonraki bağıl hızlarının x bileşeni, çarpışmadan önceki bağıl hızlarının x bileşenlerini, çarpışma katsayısı ile çarparak elde edilir.

x doğrultusunda

$$m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = m_A v'_{Ax} + m_B v'_{Bx};$$

$$e = \frac{v'_{Bx} - v'_{Ax}}{v_{Ax} - v_{Bx}}$$

y doğrultusunda

$$m_A v_{Ay} = m_A v'_{Ay} \quad I_{yA} = 0$$

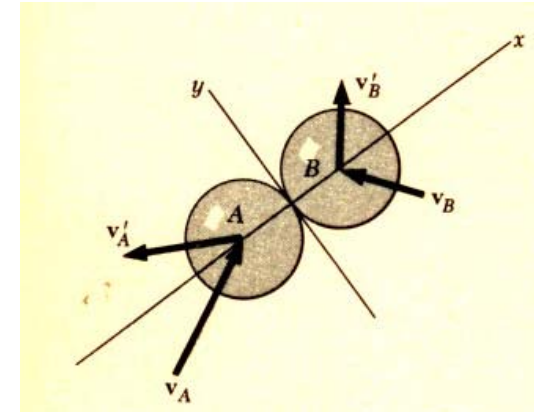
$$m_B v_{By} = m_B v'_{By} \quad I_{yB} = 0$$

$$m_A v_{Ay} + I_{yA}^0 = m_A v'_{Ay}$$

z doğrultusunda

$$m_A v_{Az} = m_A v'_{Az} \quad I_{zA} = 0$$

$$m_B v_{Bz} = m_B v'_{Bz} \quad I_{zB} = 0$$



4.8. Enerji ve Momentumla İlgili Problemler

- Kinetik problemlerin çözümü için artık elimizde üç farklı yöntem bulunmaktadır:
- $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ temel denklemini uygulamak,
- iş ve enerji yöntemi,
- impuls ve momentum yöntemi.
- İş ve enerji yönteminin, bir çok durumlarda $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ denkleminin doğrudan doğruya uygulanmasından daha çabuk sonuca götür. Ancak iş ve enerji yönteminin eksiklikleri vardı ve bu yöntemin bazen, denklemini kullanarak tamamlanması gerekli oluyordu. Örneğin, ivmeyi veya normal reaksiyonları hesaplamak isteyince bu durum ortaya çıkıyordu.
- İmpulsif kuvvetlerin bulunmadığı problemlerde impuls ve momentum yöntemini kullanmak genellikle büyük bir üstünlük sağlamaz. Normal olarak $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ denklemi, aynı çabuklukla çözümü verir ve hele iş ve enerji yöntemi uygulanabiliyorsa çözüm, daha çabuk ve kolay olur. Bununla birlikte impuls ve momentum yöntemi, çarpışma problemlerinde izlenmesi mümkün tek yoldur. $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ nın doğrudan doğruya uygulanmasına dayanan bir çözüm çok uzun olur, iş ve enerji yöntemi ise kullanılamaz, çünkü çarpışmada (tam elastik olmadıkça) mekanik enerjide kayıp vardır.
- Bir çok problemlerde, kısa bir çarpışma süresinde etkiyen impulsif kuvvetler dışında yalnız konservatif kuvvetler bulunur. Böyle problemlerin çözümü birkaç kısma ayrılabilir. Çarpışma süresi ile ilgili kısım impuls ve momentum yönteminin uygulanmasını ve çarpışma katsayısının kullanılmasını gerektirdiği halde, öteki kısımları iş ve enerji yöntemi yardımıyla çözülebilir. Bununla birlikte, eğer problemde bir normal kuvvetin hesabı isteniyorsa, $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ denkleminin kullanılması gerekli olacaktır.

4.9. Bir Maddesel Noktanın Açısal Momentumu veya Momentumun Momenti

$m \vec{v}$ vektörünün O ya göre momentine maddesel noktanın, o anda O ya göre, **momentumunun momenti** veya **açısal momentumu** adı verilir ve $\vec{h}_o$ ile gösterilir.

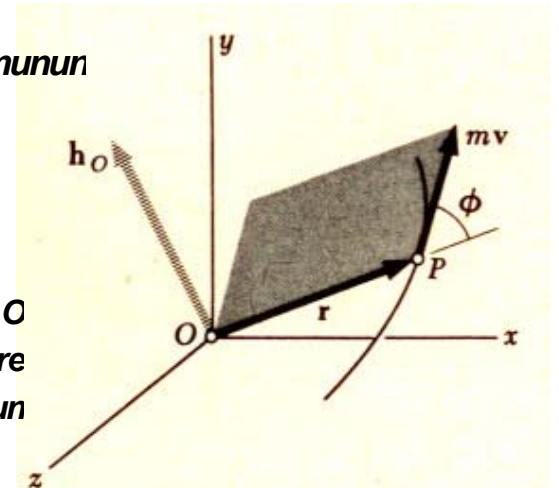
$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} \quad M_o = r.F.\sin\phi \quad \vec{h}_o = \vec{r} \times m \vec{v} \quad h_o = r.mv.\sin\phi$$

Uzayda hareket eden bir maddesel noktanın $\vec{h}_o$ açısal momentumunun, t ye göre türevi

$$\frac{d\vec{h}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m \vec{v} + \vec{r} \times m \vec{a}$$

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{h}_o}{dt}$$

Bir maddesel noktaya etkiyen $\vec{F}$ kuvvetinin O ya göre moment, maddesel noktanın O ya göre açısal momentumunun (momentumunun momentinin) değişim hızına eşittir.



4.10. Açısal Momentumun Korunumu

t nin her değeri için $\vec{M}_O$ sıfır ise bu durumda her t için $\frac{d\vec{h}_O}{dt} = 0$ olur ve t ye göre integre edilerek $\vec{h}_O = \text{sabit}$ sonucu elde edilir. O halde, bir maddesel noktaya etkiyen $\vec{F}$ kuvvetinin O ya göre momenti, t nin her değeri için sıfır ise, **maddesel noktanın O ya göre açısal momentumu korunur.**

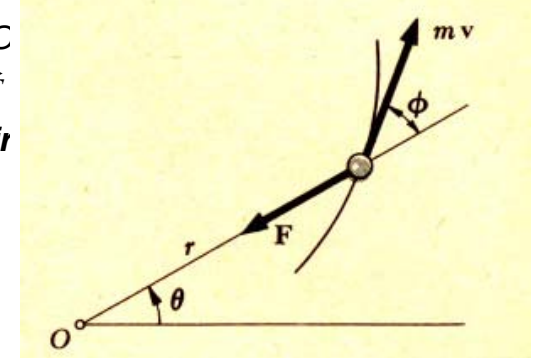
Bir maddesel noktaya etkiyen kuvvetlerin bileşkesi sıfır olursa, o maddesel noktanın, sabit bir C noktasına göre açısal momentumunun korunduğu açıktır. Fakat dengede olmayan bir $\vec{F}$ kuvvetinin etkisi altında bulunan bir maddesel noktanın açısal momentumu, $\vec{F}$ **kuvvetinin, tesir çizgisi sabit bir O noktasından geçen bir merkezsel kuvvet olması halinde** de korunur

$$\vec{h}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{sabit}$$

$$h_O = r(mv \sin \phi) = \text{sabit}$$

$v \sin \phi$ nin, hızın radyale dik bileşenini gösterdiğine ve onun da $r d\theta / dt$ ye eşit olduğuna dikkat

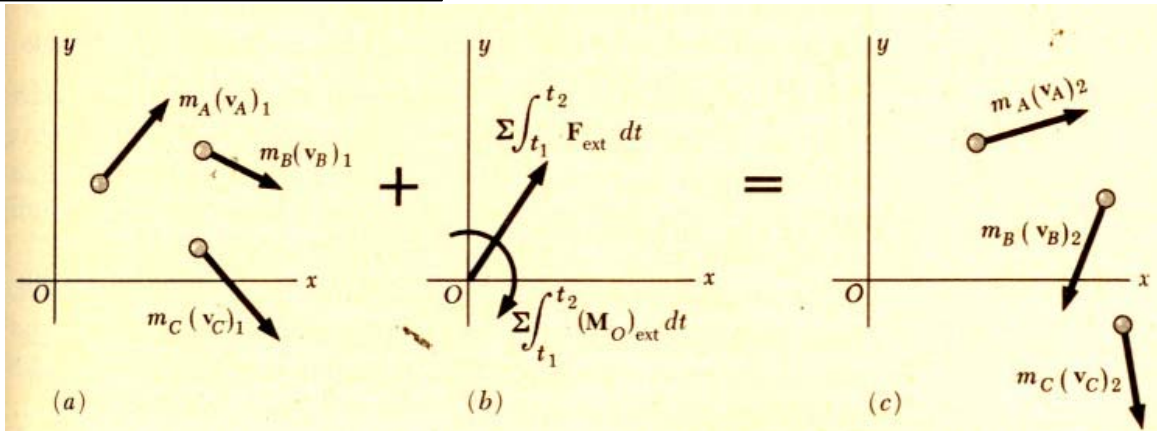
ederek $h_O = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{sabit}$ olduğu görülür. $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (açısal hız) olduğu dikkate alınır $h_O = mr^2 \omega = \text{sabit}$ olur.



4.11. Genelleştirilmiş İmpuls ve Momentum İlkesi

$\vec{F}$ kuvvetinin belirli bir zaman aralığındaki doğrusal impulsunu Kısım 4.1 de tanımlamıştık. Şimdi bir $\vec{F}$ kuvvetinin, t_1 den t_2 ye kadar olan bir zaman aralığında, O ya göre **açısal impulsunu**, $\vec{F}$ kuvvetinin O ya göre momentinin t_1, t_2 aralığındaki integrali olarak tanımlayacağız

$$Aç \dot{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{r} \times \vec{F}) dt$$



$$\sum m \vec{v}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{dış} dt = \sum m \vec{v}_2$$

$$(\vec{h}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} (\vec{M}_O)_{dış} dt = (\vec{h}_O)_2$$

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MEKANİK ANABİLİM DALI

DİNAMİK

4.BÖLÜM

RİJİT CİSİMLERİN KİNEMATİĞİ

PROF. DR. TURGUT KOCATÜRK

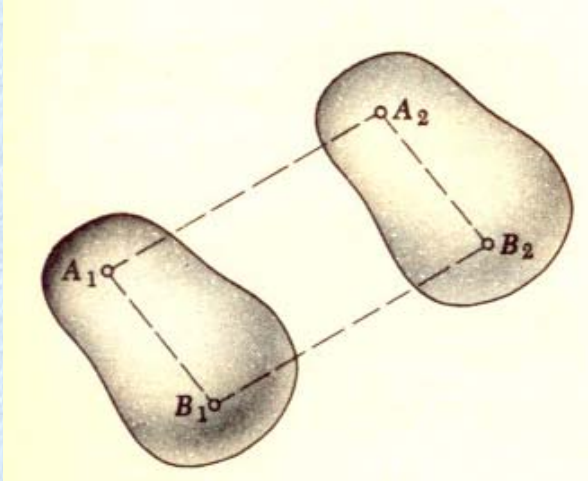
Rijit Cisimlerin Kinematiği

Rijit Cisim:

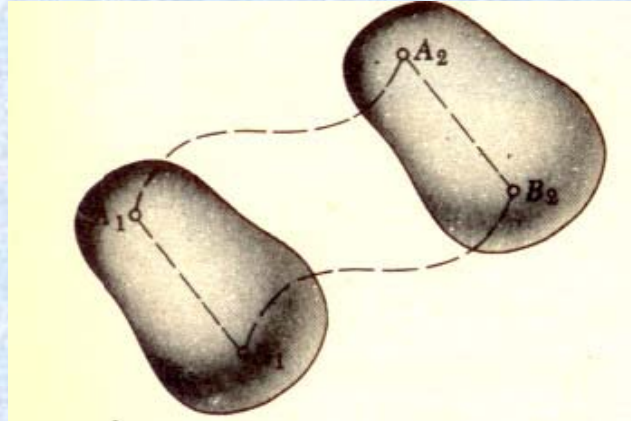
Çok sayıda maddesel noktadan oluşan ve maddesel noktaların birbirlerine göre yerleri değişmeyen cisme rijit cisim denmektedir. Böylesi bir cisimde zaman yer, hız ve ivme arasındaki bağıntılar araştırılacaktır. Buradaki incelemede sabit bir eksen etrafında dönme hariç tamamen rijit cisimlerin düzlemsel hareketleri incelenecektir.

Ötelenme:

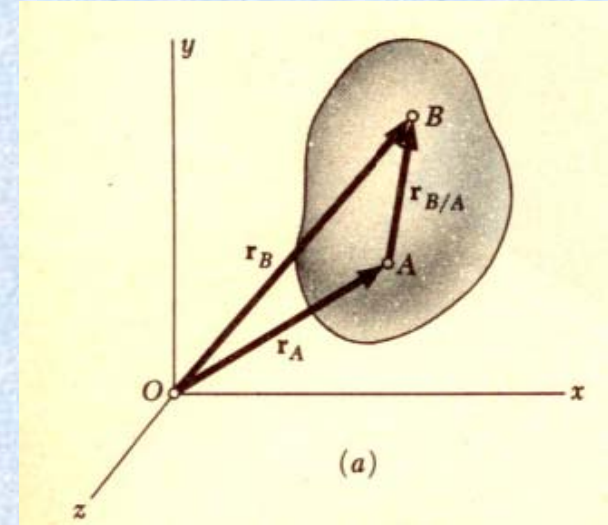
Cismin içinde bulunan herhangi bir doğru parçası hareket sırasında doğrultusunu koruyorsa cismin bu hareketine **ötelenme** denir.



Doğrusal Ötelenme



Eğrisel Ötelenme

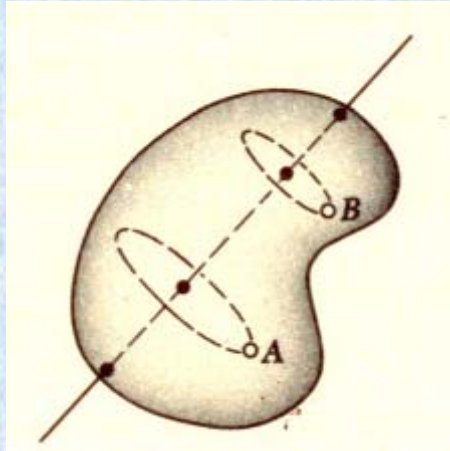


$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{0}, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{0}$$

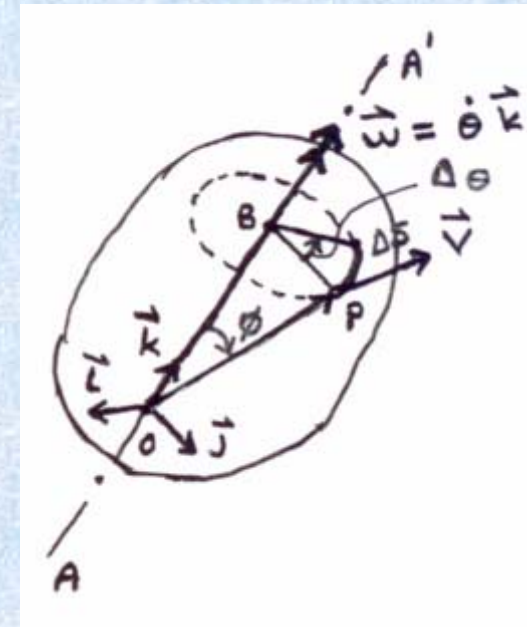
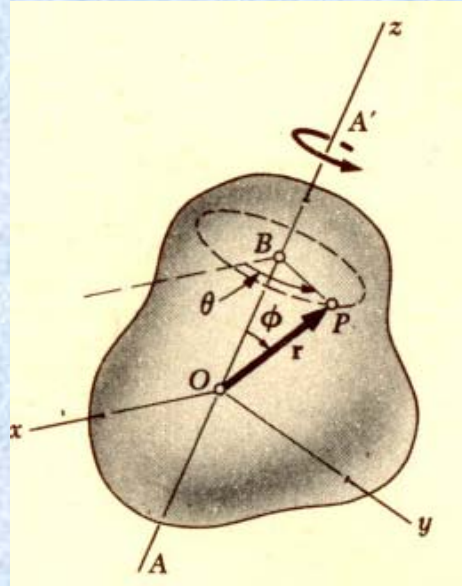
Bir rijit cisim ötelenme hareketi yapıyorsa herhangi bir anda cismin bütün noktalarının hızları ve ivmeleri, cismin noktaları arasındaki göreceli yer değiştirmenin zamanla değişimi sıfır olduğundan, yani şekilde görülen $\vec{r}_{B/A}$ yer vektörü sabit kaldığından, aynı olur.

Sabit bir eksen etrafında dönme:

Bu harekette *rijit cismi* oluşturan maddesel noktalar aynı bir sabit eksen merkez olmak üzere paralel düzlemlerde bulunan çemberler üzerinde hareket ederler. Dönme eksenini rijit cismi kesiyorsa, bu eksen üzerindeki noktalarda hız ve ivmeler sıfır olur.

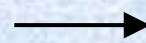


Dönme eksenini



$$\Delta s = r \sin \phi \Delta \theta = \overline{BP} \Delta \theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{r \sin \phi d\theta}{dt} = r \dot{\theta} \sin \phi$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

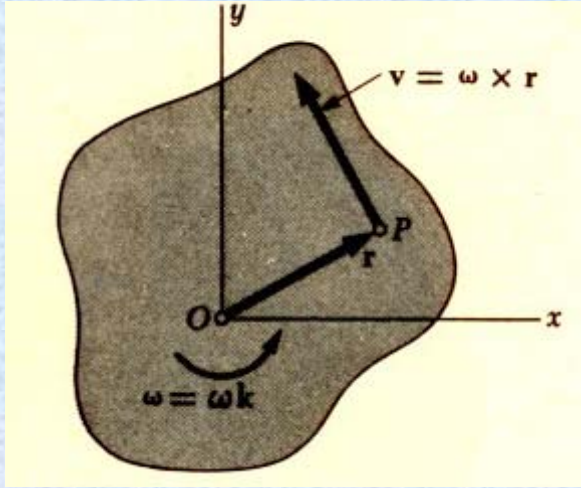
(1)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

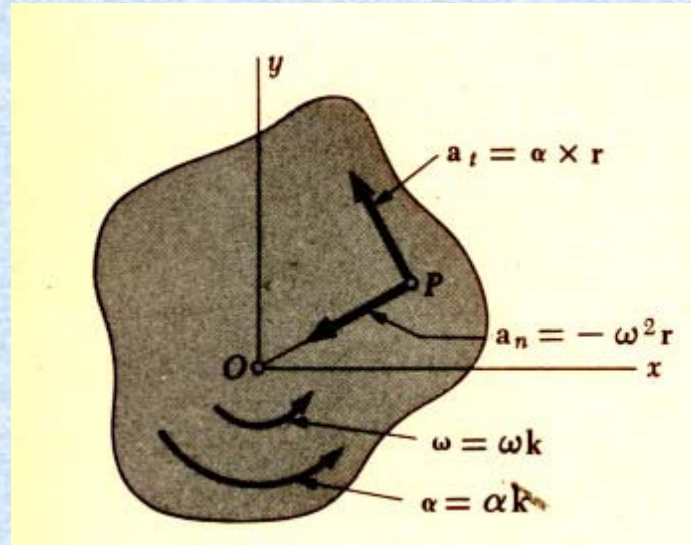
(2)

Ana Levha Hareketi:

xy karşılaştırma düzlemine göre simetrik ve düzgün kalınlıklı bir cisim **ana levha** olarak adlandırılmaktadır. **xy** düzlemi içinde olan bir O noktasından geçen ve **xy** düzlemine dik bir eksen etrafında dönme olması durumunda, (1) denklemi ile verilen hız vektörünün şiddeti



Ana Levha



$$v = r \omega \quad \text{olur.}$$

İvme vektörü ise

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

şeklini alır.

$$\begin{aligned} a_t &= \vec{\alpha} \times \vec{r} & a_t &= r \alpha \\ \vec{a}_n &= -\omega^2 \vec{r} & a_n &= \omega^2 r \end{aligned}$$

Bir Rijit Cismin Sabit Bir Eksen Etrafında Dönmesini Tanımlayan Denklemler :

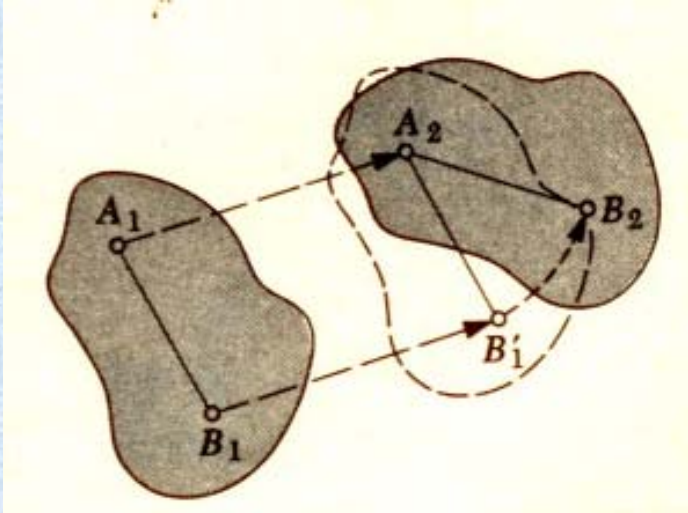
1.Düzgün Dönme: $\omega = \text{Sabit} \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \theta = \theta_o + \omega t$

2.Düzgün Değişen Dönme: $\alpha \neq 0 \rightarrow \alpha = \text{Sabit} \rightarrow$

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_o + \alpha t \\ \theta &= \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_o^2 + 2 \alpha (\theta - \theta_o) \end{aligned}$$

Genel Düzlemsel Hareket:

Genel düzlemsel hareket denildiğinde ötelenme ve dönme dışında bir hareket anlaşılmaktadır. Bununla birlikte şimdi görüleceği üzere bir **genel düzlemsel** hareket, daima bir **ötelenme** ile bir **dönmenin** toplamı olarak göz önüne alınabilir.



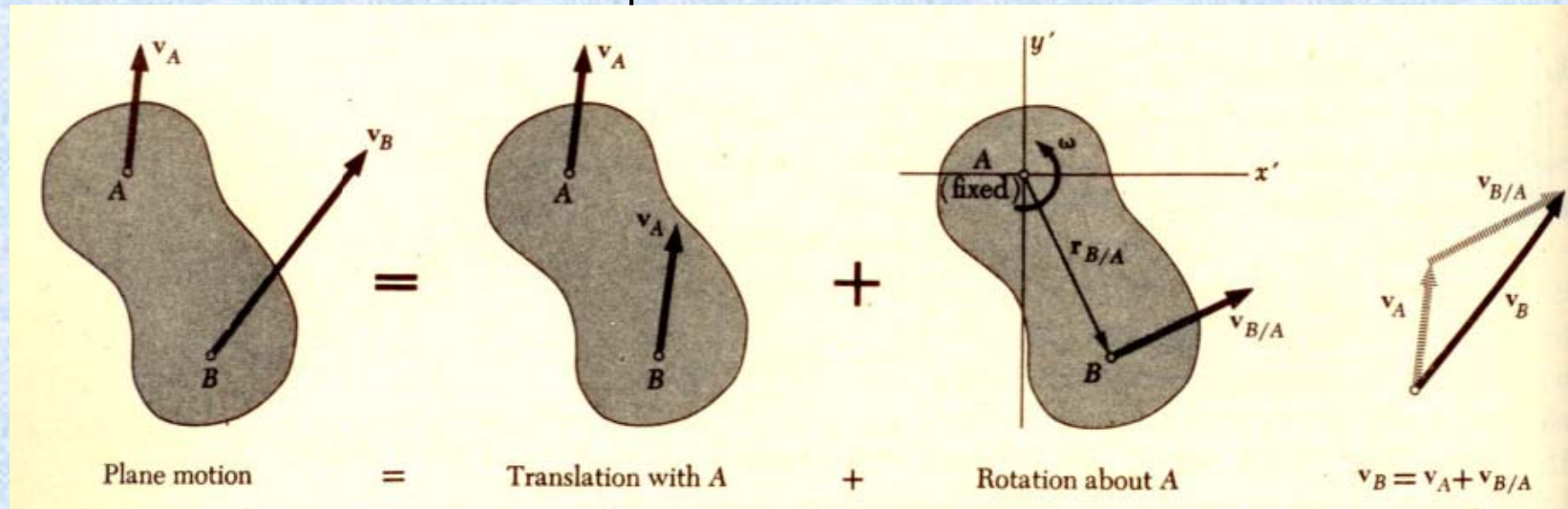
Düzlemsel Harekette Salt ve Bağlı hız:

Düzlemsel hareket = A'nın ötelenmesi + A etrafında dönme

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

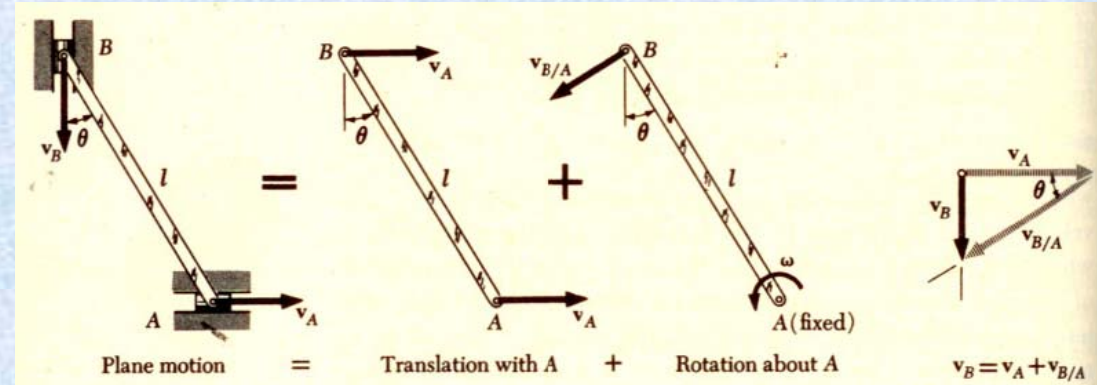
$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} \quad v_{B/A} = r \omega$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$



Örnek: 1. Durum

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{B/A} \quad (1) ;$$



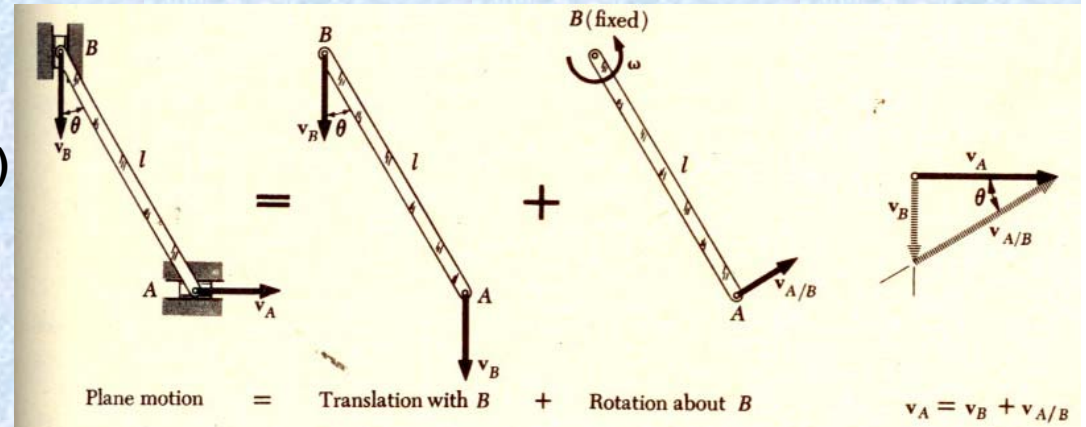
Örnek: 2. Durum

Düzlemsel hareket = A'nın ötelenmesi + A etrafında dönme

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times (-\vec{r}_{B/A}) \\ \vec{v}_A &= \vec{v}_B - \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{B/A} \rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{B/A} \end{aligned} \quad (2)$$

(1) ve (2) nin karşılaştırmasından

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{B/A} \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{B/A} \end{aligned} \right\} \vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A$$



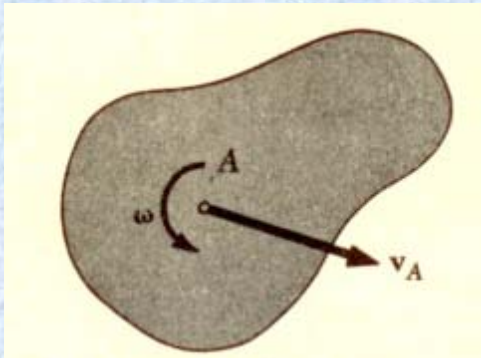
Düzlemsel hareket = B'nin ötelenmesi + B etrafında dönme

Bu sonuç geneldir, bu sebeple *bir rijit cismin düzlemsel hareketindeki açısal hızın karşılaştırma noktasından bağımsız* olduğu görülür.

Düzlemsel harekette ani dönme merkezi :

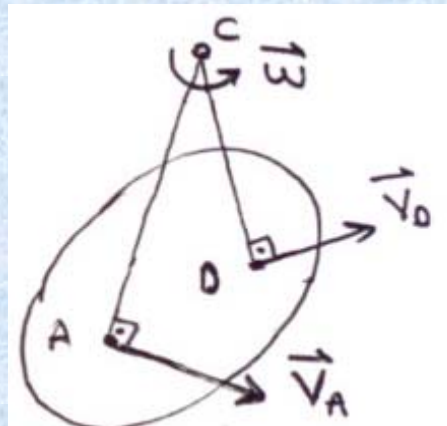
Bir levhanın genel hareketini göz önüne alalım. Verilen herhangi bir anda levhanın çeşitli noktalarının hızlarının, levhanın **ani dönme eksen**i adı verilen ve levha düzlemine dik olan bir eksen etrafında dönmesi ile aynı olduğu görülecektir. Bu eksen levha düzlemini, levhanın **ani dönme merkezi** adı verilen bir noktada keser.

Levhanın düzlemsel bir hareketi herhangi bir A karşılaştırma noktasının ötelenmesi ve A etrafında bir dönme şeklinde ikiye ayrılabilmekteydi. Hızlar söz konusu olduğu sürece, A noktasının ötelenme hızı $\vec{v}_A$, levhanın açısal hızı $\vec{\omega}$ verildiğinde, levhanın tüm diğer noktalarının hızları bunlara bağlı olarak belirlidir



$\vec{v}_A = \vec{0}$ ise A noktasının kendisi ani dönme merkezidir.

$\vec{\omega} = 0$ ise levha ötelenme yapmaktadır.



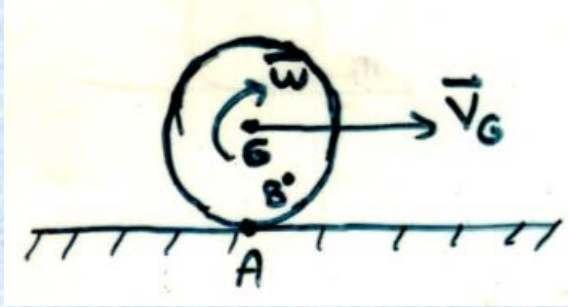
$$\vec{v}_A \neq 0; \vec{\omega} \neq 0$$

$$\vec{v}_C = 0 = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{C/A}$$

$$r_{C/A} = \frac{v_A}{\omega}$$

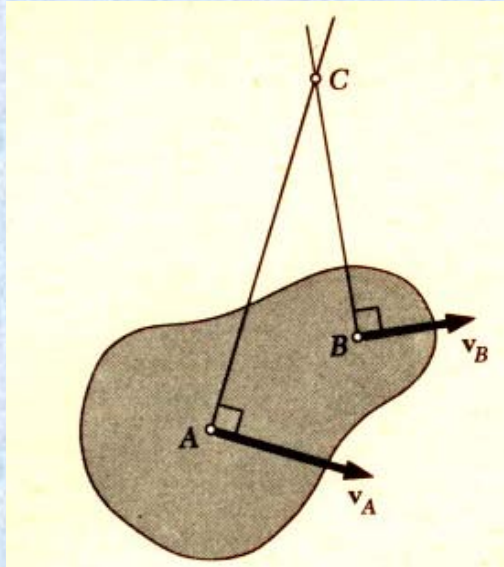
$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{D/C} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{D/C}$$

Örnek: Kaymadan yuvarlanan bir tekerin hareketi:

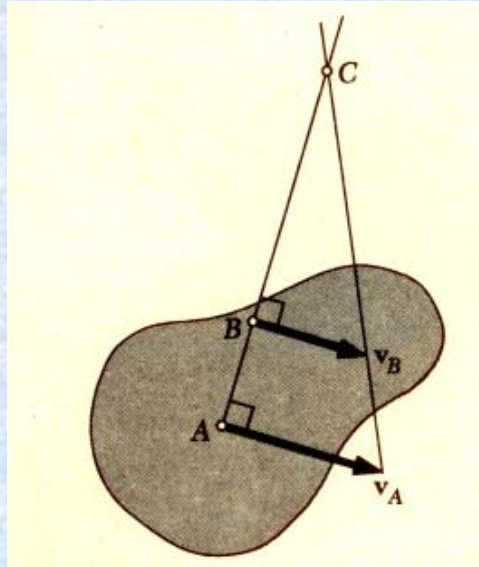


Şekilde görülen teker durumunda, yerle göz önüne alınan anda temas halinde olan bir A noktasının o anda yere göre hızı sıfırdır. Bu durumda bir B noktasının hızı $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ olur. Bu durumda A noktası göz önüne alınan anda ani dönme merkezi olup bu an için tekerin tüm noktalarının hızı, teker A etrafında dönüyormuş kabul edilerek hesaplanabilir.

Ani dönme merkezinin yeri başka iki şekilde daha tanımlanabilir. Bunun için levha üzerindeki iki noktanın hızı verilmelidir.



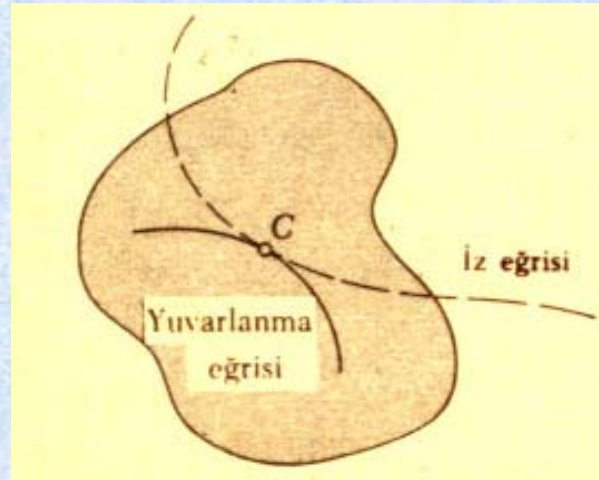
(a)



(b)

(a) şeklinde $\vec{v}_A$ ve $\vec{v}_B$ hızları paralel olursa veya (b) deki $\vec{v}_A$ ve $\vec{v}_B$ hızları aynı şiddette olursa C ani dönme merkezi sonsuza gider ve $\vec{\omega}$ sıfır olur; o zaman levha ötelenme yapıyor demektir.

Yuvarlanma ve İz Eğrisi

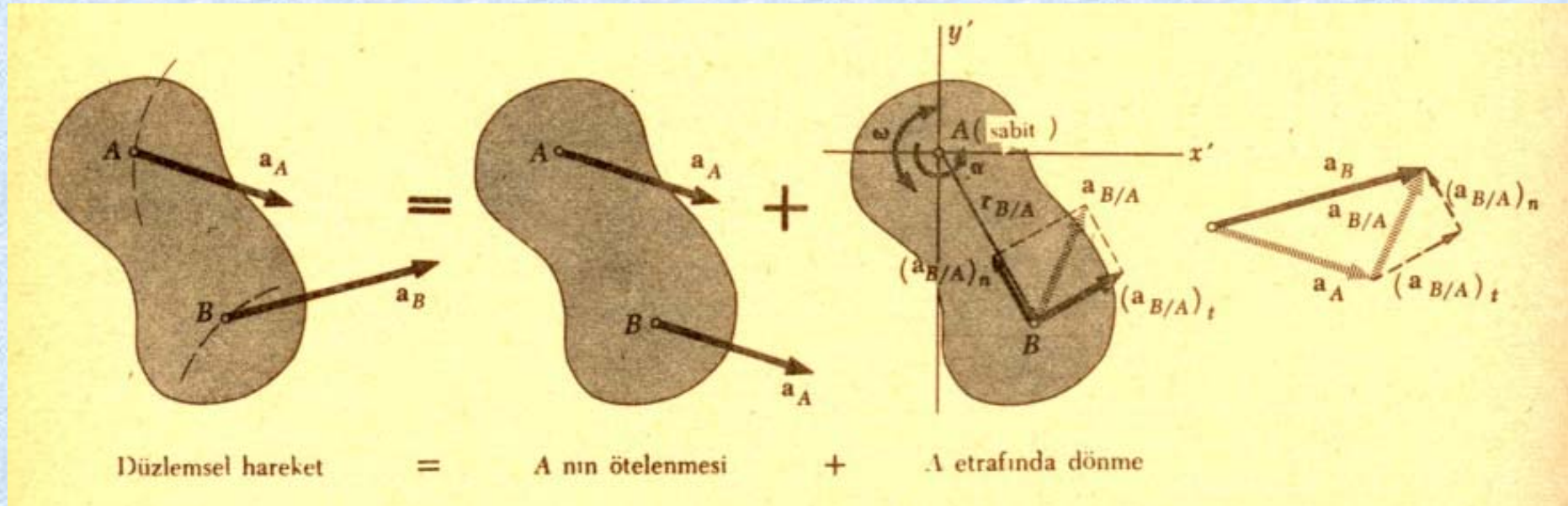


Düzlemsel hareket yapan bir levhanın ani dönme merkezi levhanın üstünde veya dışında bulunabilir. Eğer levhanın üstünde ise, verilen bir t anında ani dönme merkeziyle üst üste bulunan C noktasının o andaki hızı sıfır olmak zorundadır.

Ani dönme merkezi sadece verilen bir an için geçerlidir. Şu halde bir t anında levhenin ani dönme merkezi ile üst üste olan bir C noktası, genel olarak, $t + \Delta t$ anında ani dönme merkezi ile üst üste bulunmayacaktır; t anında hızı sıfır olduğu halde $t + \Delta t$ anında belki de sıfırdan farklı olacaktır. Bu demektir ki genel olarak C noktasının **ivmesi sıfır değildir**, şu halde levhanın çeşitli noktalarının ivmeleri, levha C etrafında dönüyormuş gibi belirtilemez.

Levha hareketine devam edince ani dönme merkezi uzayda hareket eder. Öte yandan biraz önce söylendiği gibi ani dönme merkezinin levha üzerindeki yeri de daima değişmektedir. Böylece ani dönme merkezi uzayda **iz eğrisi** adı verilen, levha üzerinde de **yuvarlanma eğrisi** denilen bir eğri çizer (Şekil 5.14). Gösterilebilir ki, herhangi bir anda bu iki eğri C de birbirine teğettir ve levha hareket ettikçe yuvarlanma eğrisi iz eğrisinin üzerinde yuvarlanıyormuş gibi görünür.

Düzlemsel harekette salt ve bağıl ivme:



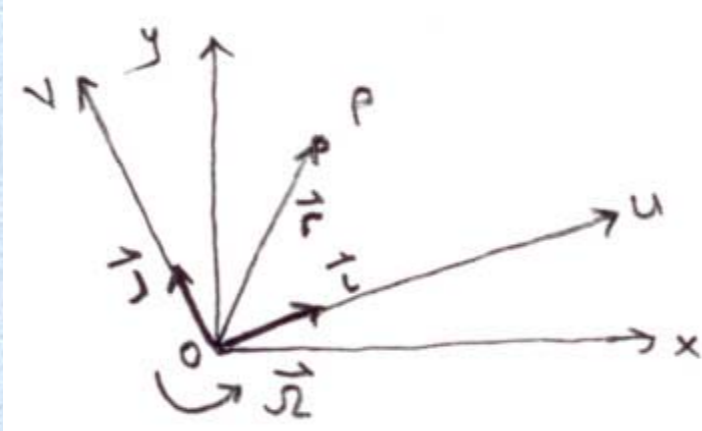
Düzlemsel hareket = A'nın ötelenmesi + A etrafında dönme

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a}_{B/A})_t &= \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} \quad ; \quad (a_{B/A})_t = r \alpha \\ (\vec{a}_{B/A})_n &= -\omega^2 \vec{r}_{B/A} \quad ; \quad (a_{B/A})_n = r \omega^2 \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A} \end{aligned}$$

Düzlemde Dönen Bir Takıma Göre Bir Vektörün Değişiminin Hızı:

Başlangıç noktaları aynı olan sabit bir OXY takımı ile, dönen bir Ouv karşılaştırma takımı göz önüne alınsın. P uzayda bir maddesel nokta olsun. P nin $\vec{r}$ yer vektörü her iki takımda aynı olduğu halde, bunun değişim hızı seçilen karşılaştırma takımına bağlıdır. Maddesel noktanın $\vec{v}_P$ salt hızı $\vec{r}$ nin sabit $Oxyz$ takımına göre $d\vec{r}/dt$ değişim hızı olarak tanımlanır. Bununla beraber $\vec{v}_P$ hızı hareketli takımdan gözlenen $\delta\vec{r}/\delta t$ değişim hızı cinsinden de belirlenebilir. Ouv hareketli takımının göz önüne alınan zamanda açısal hızı $\vec{\Omega}$ ile gösterilirse,



$$\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j}$$

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} + u\frac{d\vec{i}}{dt} + v\frac{d\vec{j}}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} \quad (2), \text{ olarak } P \text{ nin dönen takıma göre değişim hızı tanımlanırsa}$$

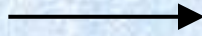
$$\vec{v}_P = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + u\frac{d\vec{i}}{dt} + v\frac{d\vec{j}}{dt} \quad (3)$$

Eğer P noktası Ouv takımına göre sabit olsaydı $\delta\vec{r}/\delta t = 0$ olacağından $d\vec{r}/dt$ değişim hızı (3) ifadesindeki son iki terime eşit olacaktı. Fakat bu durumda, $d\vec{P}/dt$ değişimi, Ouv ye rijit olarak bağlı bir cismin $\vec{r}$ nin ucuna rastlayan maddesel noktasının hızını gösterecekti. Buna göre göz önüne alınan anda Ouv takımının açısal hızı $\vec{\Omega}$ olduğundan, (3) son iki terim noktanın hızını belirler. Bu durumda

$$u \frac{d\vec{i}}{dt} + v \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (4)$$

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (5)$$

(2) ve (4), (3) de yerine konursa



$$\vec{v}_P = \vec{v}_F + \vec{v}_{P/F} \quad (6)$$

$\vec{v}_P = P$ maddesel noktasının salt hızı
 $\vec{v}_F$ = hareketli takımın P ile çakışan noktasının hızı
 $\vec{v}_{P/F}$ = P nin hareketli takıma göre hızıdır.

Maddesel noktanın $\vec{a}_P$ salt ivmesi $\vec{v}_P$ nin OXY ye göre değişiminin hızı olarak tanımlanır.

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \right) \quad (7)$$

(7) deki son terim, (5) ifadesi dikkate alınarak

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \right) = \vec{\Omega} \times \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \frac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2} \quad (8)$$

Yine (7) deki ikinci ifadede görülen $d\vec{r}/dt$ yerine (5) ifadesindeki eşdeğeri yazılıp (8) de dikkate alınırsa, (7) eşitliği

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} \quad (9) \quad \text{şeklinde elde edilir.}$$

(9) eşitliğin ilk iki teriminin toplamı, göz önüne alınan anda dönen takımın P ye çakışan noktasının $\vec{a}_F$ ivmesini verir. Diğer taraftan sonuncu terim ise P nin dönen takıma göre $\vec{a}_{P/F}$ ivmesini tanımlar. Üçüncü terim $\vec{a}_c$ ile gösterilecek ve bu terime tamamlayıcı ivme veya Fransız matematikçisi De Coriolis' e izafeten Coriolis ivmesi adı verilecektir. Böylece

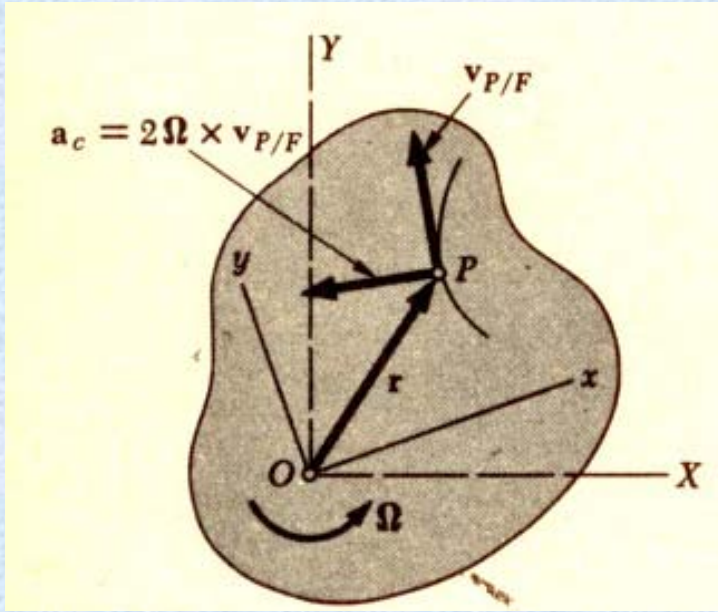
$$\vec{a}_P = \vec{a}_F + \vec{a}_{P/F} + \vec{a}_c \quad (10)$$

$\vec{a}_P = P$ maddesel noktasının salt ivmesi

$\vec{a}_F =$ hareketli takımın P ile çakışan noktasının ivmesi

$\vec{a}_{P/F} = P$ nin hareketli takıma göre ivmesi

$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \times \delta \vec{r} / \delta t = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{P/F} =$ tamamlayıcı ivme veya Coriolis ivmesi.



Coriolis ivmesi veya Tamamlayıcı ivme:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \times \delta \vec{r} / \delta t = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{P/F}$$

Şu da belirtilmelidir ki, Coriolis ivmesi $\vec{\Omega}$ ve $\vec{v}_{P/F}$ vektörlerine diktir ve eğer bu vektörler paralel veya ikisinden biri sıfır olursa bu ivme de sıfıra eşit olur.

Düzlemsel hareket göz önüne alındığından, $\vec{\Omega}$ vektörü hareket düzlemine ve böylece $\vec{v}_{P/F}$ dik olur. Bu durumda $\vec{a}_c$ nin şiddeti $2\Omega v_{P/F}$ ye eşittir ve doğrultusu ise $\vec{v}_{P/F}$ vektörünü hareketli takımın dönme yönünde 90° döndürerek elde edilir. Bu durum aşağıdaki şekilde görülmekte olup burada P maddesel noktası, O etrafında Oxy takımı ile birlikte dönen bir levha üzerinde bir yol çizer.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MEKANİK ANABİLİM DALI

DİNAMİK

5.BÖLÜM

RİJİT CİSİMLERİN KİNETİĞİ

PROF. DR. TURGUT KOCATÜRK

Rijit Cisimlerin Kinetiği

Bu bölümde, **rijit cisimlerin kinetiğini**, yani cisim üzerine etkiyen kuvvetler, cismin şekli ve kütlesi ile ortaya çıkan hareket arasındaki bağıntılar incelenecektir.

Daha önce cisim bir maddesel nokta olarak, yani cismin bütün kütlesinin bir noktada toplandığı ve kuvvetlerin bu noktaya etkidiği kabul edilerek benzer bağıntılar incelenmişti. Şimdi cismin şeklini ve kuvvetlerin etki noktalarının doğru konumları tam olarak göz önüne alınacaktır.

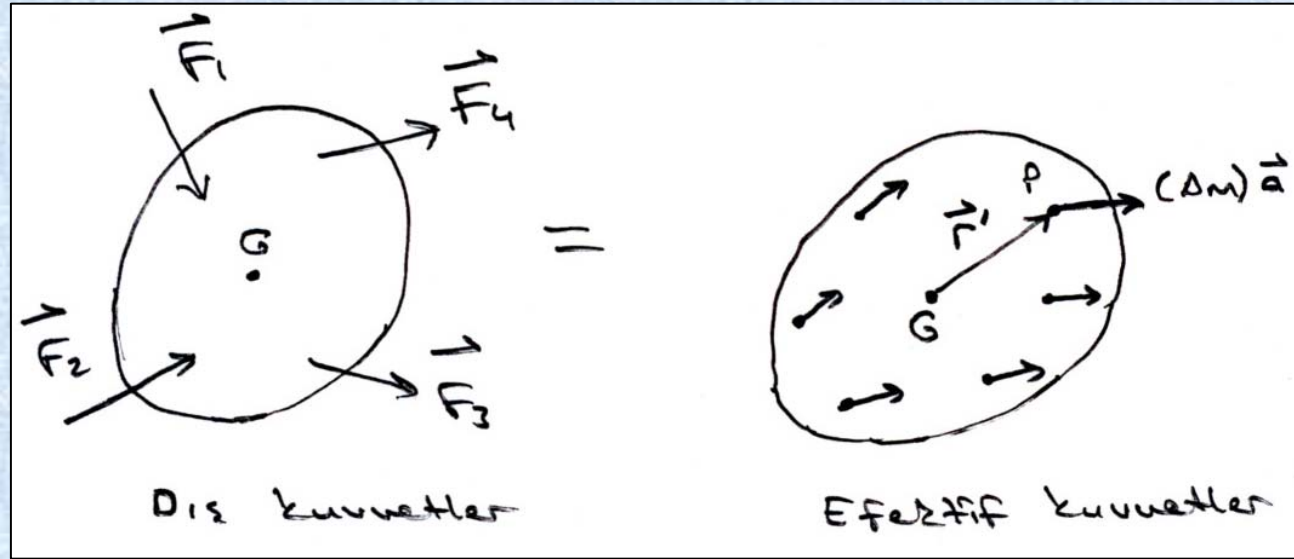
Bu bölümdeki inceleme doğrudan $\vec{F} = m \vec{a}$ denkleminde dayanacak ve iki bakımdan kısıtlandırılacaktır:

(1) Rijit cismin sadece *düzlemsel hareket* yaptığı, yani cismin her noktasının sabit bir karşılaştırma düzlemine olan uzaklıklarının değişmediği kabul edilecektir.

(2) Rijit cisimler sadece düzlem levhalardan ve karşılaştırma düzlemine göre simetrik cisimlerden oluşacaktır.

Rijit bir cismin düzlemsel hareketi:

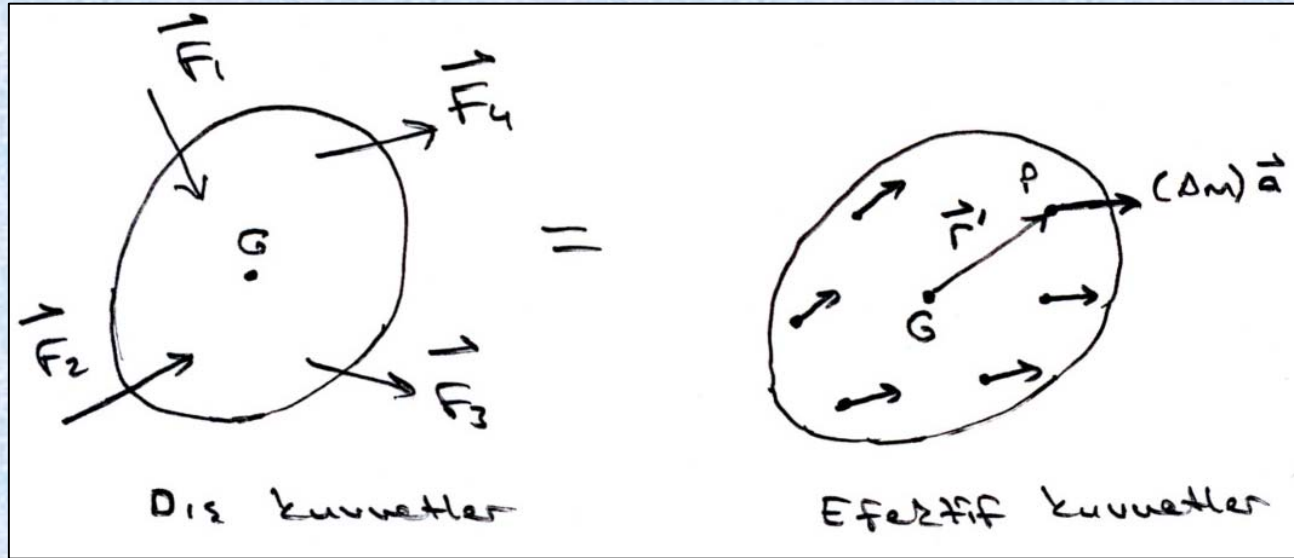
Çeşitli $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots$ kuvvetlerinin etkisi altında kendi düzleminde hareket eden ve kütlesi ***m*** olan bir rijit levha ele alınsın. D' Alembert ilkesi gereğince, levha üzerine etkiyen dış kuvvetler, levhayı oluşturan çeşitli maddesel noktaların efektif kuvvetlerine eşdeğer olmalıdır.



Δm kütleli bir maddesel noktanın efektif kuvvetinin $(\Delta m)\vec{a}$ olduğu bilinmektedir.

Eğer efektif kuvvetler sistemi levhanın G kütle merkezine etkiyen eşdeğer bir vektör ile bir vektör çiftine indirgenirse daha kullanışlı bir ifade elde edilir.

G kütle merkezi karşılaştırma noktası olarak seçilirse levhanın bir P maddesel noktasının $\vec{a}$ ivmesi, G nin $\vec{a}$ ivmesi ile, P nin G ye bağlı ve sabit doğrultudaki bir takıma göre $\vec{a}'$ ivmesinin toplamı olarak belirlenebilir.



$\vec{\ddot{a}}$ = Ağırlık Merkezinin İvmesi

$\vec{a}$ = Herhangi bir noktanın ivmesi

$\vec{a}'$ = Gözönüne alınan bir noktanın G ye göre bağıl ivmesi

$\vec{\alpha}$ = Levhanın açısal ivmesi

$\vec{\omega}$ = Levhanın açısal hızı

$$\vec{a} = \vec{\ddot{a}} + \vec{a}' = \vec{\ddot{a}} + \vec{a}'_t + \vec{a}'_n$$

$$\vec{a} = \vec{\ddot{a}} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' - \omega^2 \vec{r}'$$

$$(\Delta m) \vec{a} = (\Delta m) \vec{\ddot{a}} + \Delta m (\vec{\alpha} \times \vec{r}') - (\Delta m) \omega^2 \vec{r}'$$

$$\begin{aligned} \sum \vec{a} \Delta m &= \sum \vec{\ddot{a}} \Delta m + \sum (\vec{\alpha} \times \vec{r}') \Delta m - \sum \omega^2 \vec{r}' \Delta m \\ &= \vec{\ddot{a}} \sum \Delta m + \vec{\alpha} \times \sum \vec{r}' \Delta m - \omega^2 \sum \vec{r}' \Delta m \end{aligned}$$

$$\sum \vec{F} = \sum \Delta m \vec{a} = m \vec{\ddot{a}} \quad \text{D'Alembert İlkesi}$$

Efektif kuvvetlerin ağırlık merkezine göre momenti

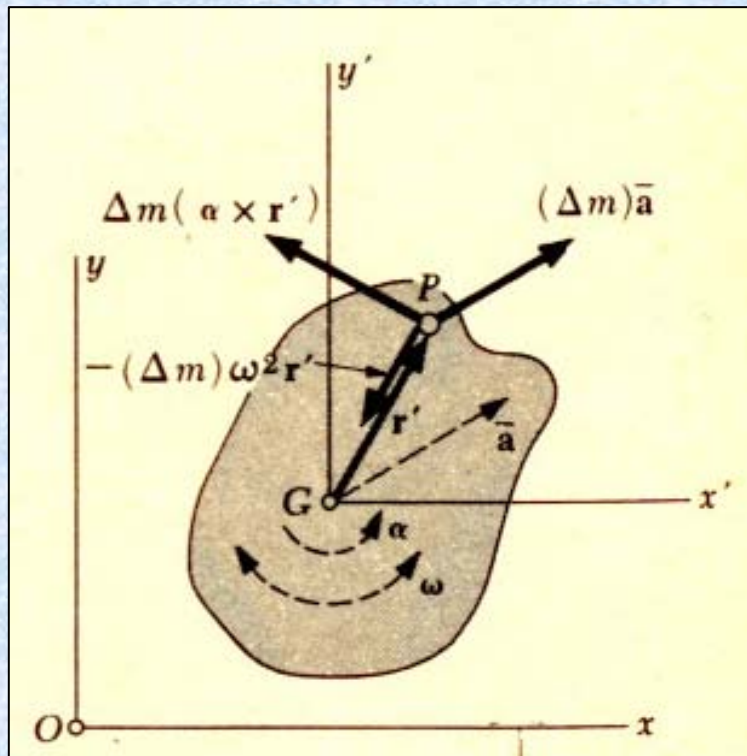
$$\vec{M}_G = \vec{r}_{P/G} \times \Delta m \vec{a}$$

$$\sum \vec{r}' \times \Delta m \cdot \vec{\ddot{a}} + \sum \vec{r}' \times (\Delta m \cdot \vec{\alpha} \times \vec{r}') - \sum \vec{r}' \times (\Delta m \omega^2 \vec{r}')$$

$$\sum \vec{r}' \times \Delta m \cdot \vec{\ddot{a}} = \sum \vec{r}' \times \Delta m \cdot \vec{\ddot{a}} + \sum \vec{r}' \times (\Delta m \cdot \vec{\alpha} \times \vec{r}') - \cancel{\Delta m \omega^2 \cdot \vec{r}' \times \vec{r}'}$$

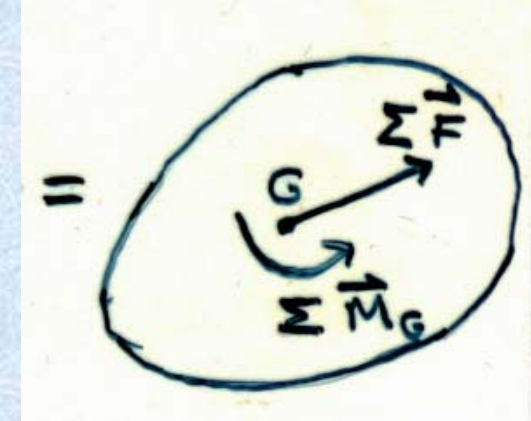
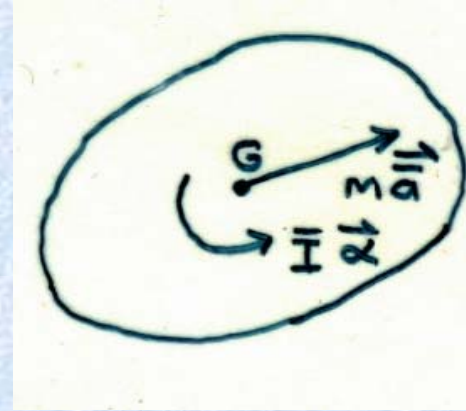
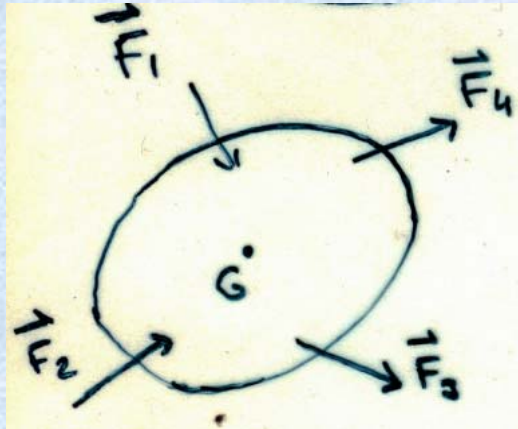
$$\sum \vec{r}' \times \Delta m \cdot \vec{\ddot{a}} = \left(\cancel{\sum \vec{r}' \Delta m} \right) \times \vec{\ddot{a}} + \sum \vec{r}' \times (\Delta m \cdot \vec{\alpha} \times \vec{r}')$$

$$\sum \vec{r}' \times \Delta m \cdot \vec{\ddot{a}} = \sum \vec{r}' \times (\Delta m \cdot \vec{\alpha} \times \vec{r}') = \underbrace{\sum \Delta m (r')^2}_{\bar{I}} \cdot \vec{\alpha}$$



$$\sum (\vec{r}' \times \Delta m \vec{a}) = \bar{I} \vec{\alpha}$$

$\bar{I}$ = Kütle merkezine göre kütle
atalet momenti



$$\text{Dış Kuvvetler} = \text{Efektif Kuvvet} + \text{Efektif Kuvvet Çifti}$$

Bağlı düzlemsel hareket:

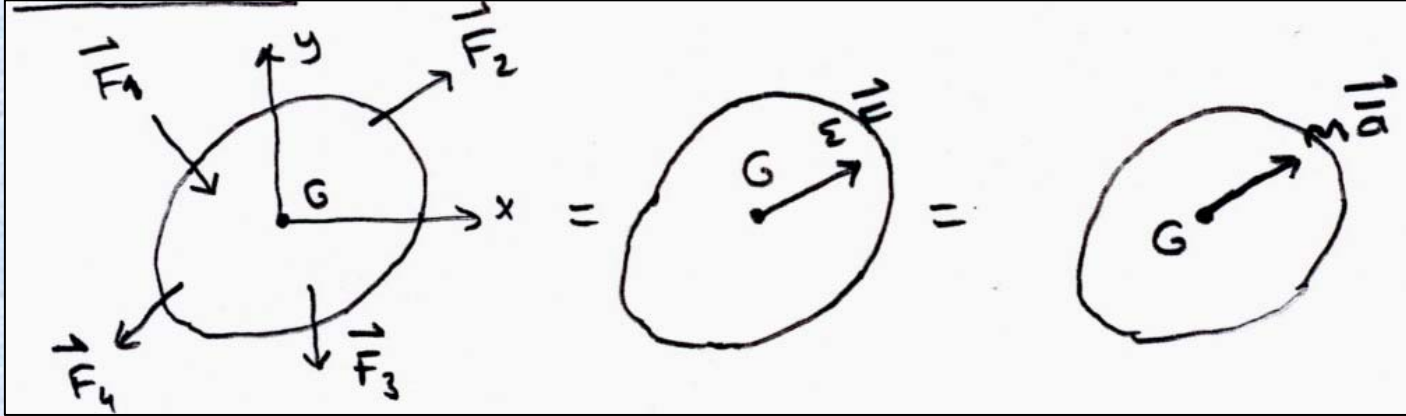
Birçok mühendislik problemleri rijit cisimlerin, verilen çeşitli bağların etkisi altındaki hareketi ile uğraşır.

Örneğin, kranklar sabit bir mil etrafında dönmeye, tekerlekler kaymaksızın yuvarlanmaya, biyeller önceden belirlenen birtakım hareketler yapmaya zorlanırlar.

Bütün bu hallerde söz konusu olan cismin G kütle merkezinin $\vec{a}$ ivmesinin bileşenleri ile $\vec{\alpha}$ açısal ivmesi arasında belirli bağıntılar mevcuttur. Bu tür bir harekete bağlı hareket adı verilir.

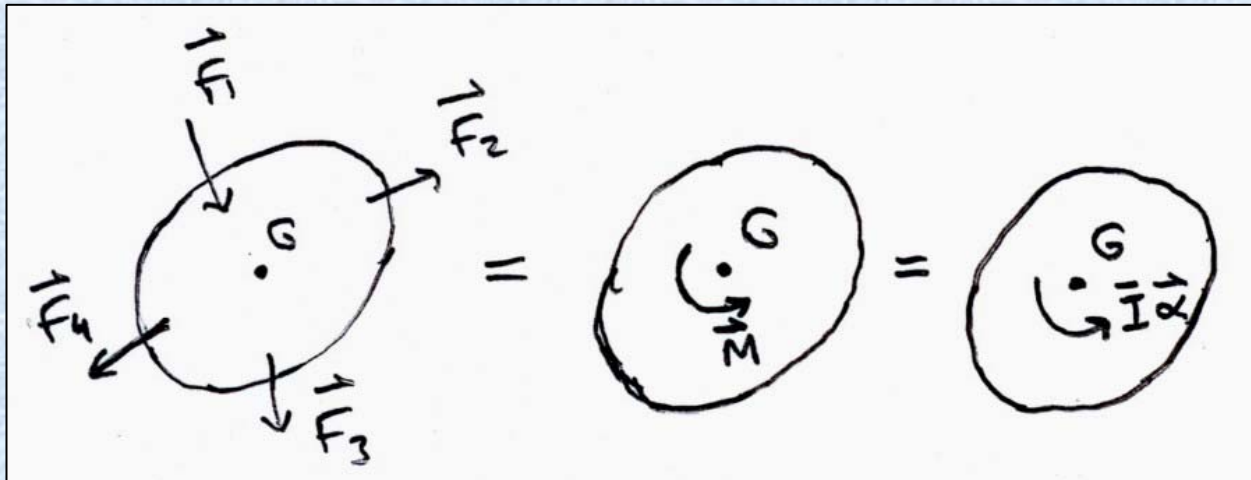
Bağlı bir düzlemsel hareketle ilgili bir problemin çözümünde önce problemin kinematik çözümlenmesi yapılmalıdır. Aşağıda bazı bağlı hareket türleri verilmiştir.

Ötelenme:



Bu durumda $\alpha = 0$ olur ve efektif kuvvetler ise G den geçen bir $m\vec{a}$ vektörüne indirgenir

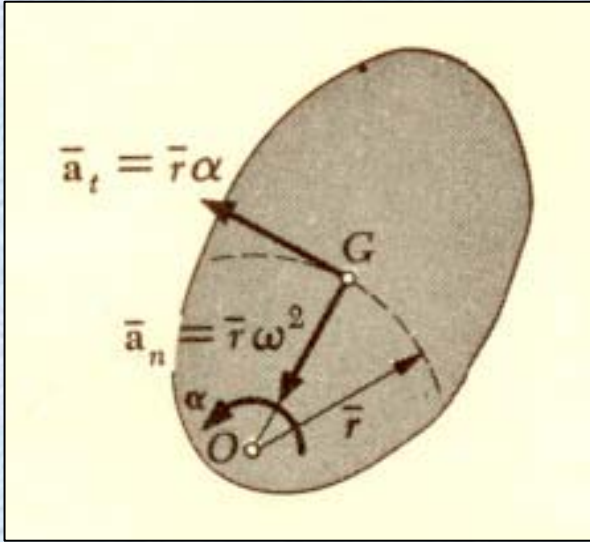
Ağırlık merkezi etrafında dönme:



$$\sum \vec{F} = 0 \longrightarrow \vec{a} = 0$$

olur. Bu durumda dış kuvvetler bir kuvvet çiftine indirgenir, aynı zamanda efektif kuvvetler de bir kuvvet çiftine indirgenir.

Keyfi bir nokta etrafında dönme:

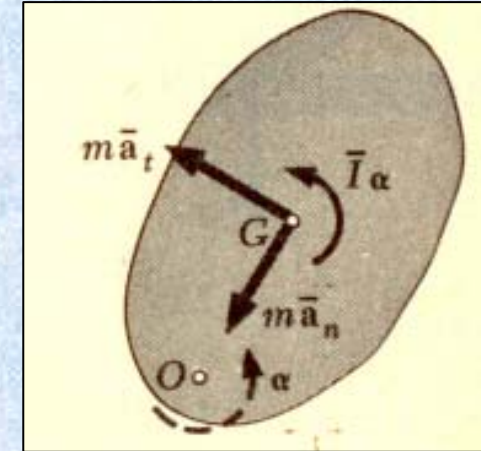
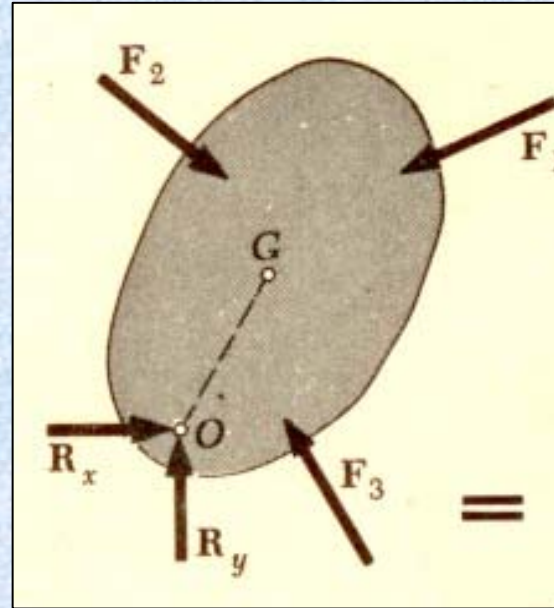


Bu hareket rijit bir cismin kütle merkezinden geçmeyen bir eksen etrafında dönmeye zorlanmasından meydana gelir. Böyle bir harekette cismin G kütle merkezi dönme ekseninin karşılaştırma düzlemini kestiği O noktası etrafında $\bar{r}$ yarıçaplı bir çember çizer.

$$\sum M_O = \bar{I} \alpha + m \alpha \bar{r}^2 = \alpha (\bar{I} + m \bar{r}^2) = \alpha I_O$$

Bu formül dış kuvvetler sisteminin, $I_O \alpha$ şiddetinde bir vektör çiftine eşdeğer olduğu anlamına gelmez.

Efektif kuvvetler sistemi, dolayısıyla dış kuvvetler sistemi, sadece O ile G çakıştığı, yani *hareket sadece ağırlık merkezi etrafında bir dönme hareketi olduğu zaman*, bir vektör çiftine indirgenir.

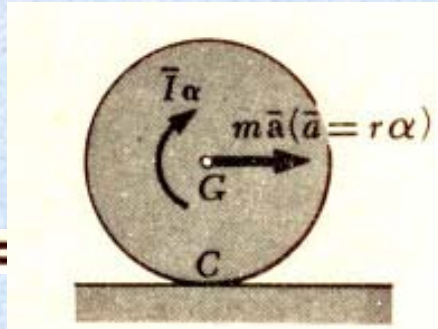
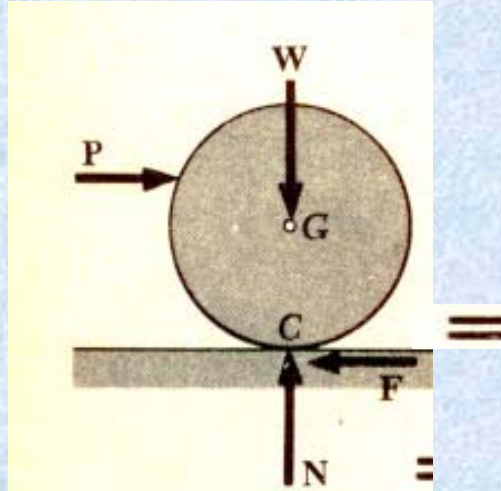


Daha genel hal olan keyfi bir nokta etrafındaki dönme hareketi halinde dış kuvvetler sistemi bir vektör çiftine indirgenmez.

Keyfi bir nokta etrafındaki dönme hareketinin özel bir hali ilginçtir; bu, $\vec{\omega}$ açısal hızının sabit olduğu *düzgün dönme* hareketidir. Bu durumda $\vec{\alpha}$ sıfır olduğundan vektör çifti ortadan kalkar ve sadece normal bileşen kalır. Bu bileşen (buna merkezci kuvvet de denir) rijit cismi dönme eksenini etrafında tutan bileşendir.

Yuvarlanma hareketi:

Düzlemsel hareketin diğer önemli bir tipi de bir disk veya tekerleğin bir düzlem üzerindeki yuvarlanma hareketidir.



Kaymasız bir yuvarlanma için, G nin aldığı $\bar{s}$ yolu $\bar{s} = r\theta$ dir, burada r disk yarıçapıdır.

C nin sonsuz yakın sağındaki nokta yere değdiğinde C noktası düşey doğrultuda yerden ayrılır. Bu durumda C ye düşey doğrultuda hareket veren ivme düşey doğrultudadır sonucuna varılır. Öyleyse

$$\vec{a}_C = \vec{a} + \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \rightarrow a_C \vec{j} = \bar{a} \vec{i} + \alpha (-\vec{k}) \times r (-\vec{j}) - \omega^2 r (-\vec{j}) \rightarrow a_C = \omega^2 r$$

$$\bar{a} \vec{i} + \alpha \vec{k} \times r \vec{j} = 0 \rightarrow \bar{a} \vec{i} - \alpha r \vec{i} = 0 \rightarrow \bar{a} = \alpha r$$

Disk hareketinin olası üç farklı hareketi, F sürtünme kuvveti, μ_s ve μ_k sırasıyla statik ve kinetik sürtünme katsayıları olmak üzere, aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Yuvarlanma, kayma yok : $F \leq \mu_s N$, $\bar{a} = r \alpha$

Yuvarlanma, kayma başlıyor : $F = \mu_s N$, $\bar{a} = r \alpha$

Yuvarlanma, kayma var : $F = \mu_k N$, $\bar{a}$ ve α bağımsız

Eğer bir diskin kayıp kaymadığı bilinmiyorsa önce diskin kaymadan yuvarlandığı kabul edilir. Böylesi bir hareket için gerekli olan F kuvveti eğer $\mu_s N$ den büyük bulunursa kabul doğru değildir ve probleme kaymalı bir yuvarlanma kabulü ile yeniden başlanmalıdır.

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MEKANİK ANABİLİM DALI**

DİNAMİK

7.BÖLÜM

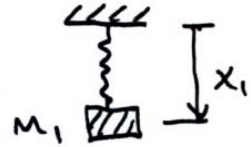
MEKANİK TİTREŞİMLER

PROF. DR. TURGUT KOCATÜRK

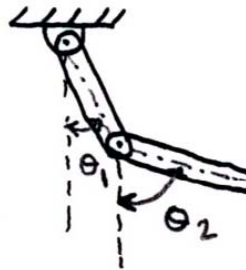
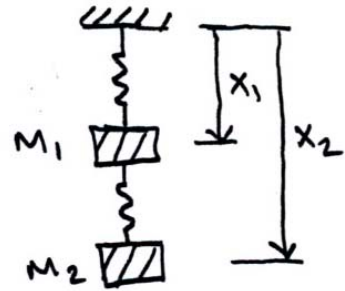
MEKANİK TİTREŞİMLER

Mekanik titreşimler bir maddesel noktanın veya bir cismin denge konumu etrafındaki salınımıdır. Titreşimler gerilme artımı ve enerji kaybına sebep olduklarından ortadan kaldırılmaları veya uygun bir tertiple azaltılmaları gerekir.

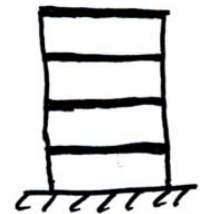
Son yıllarda yüksek hızlı makine ve hafif yapıların yapımı titreşimlerin incelenmesini önemli kılmaktadır. Burada sadece bir serbestlik dereceli sistemler incelenecektir.



Bir serbestlik
dereceli sistem



İki serbestlik derece-
li sistem



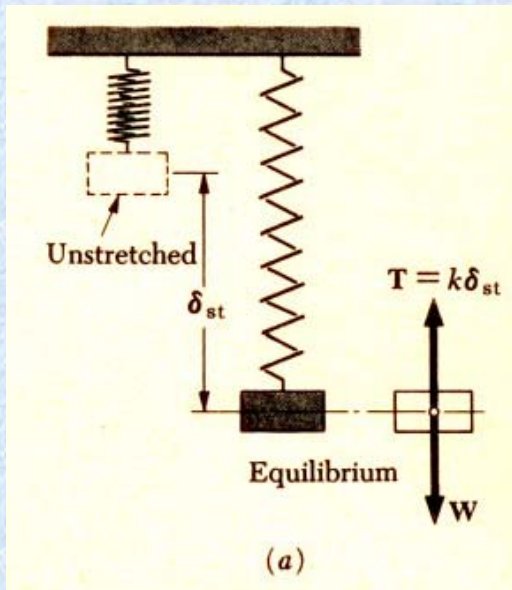
Dört serbestlik dereceli
sistem

Mekanik titreşim sistemin kararlı durumdan saptırılması halinde ortaya çıkar. Sistem kararlı durumdan saptırılınca ilk konumuna dönmeye çalışır.

Fakat bu ilk konuma genellikle belirli bir hız ile döner. Bu hız sistemi yeniden denge konumu dışına çıkarır. Eğer sürtünme etkisi yoksa hareket sürekli devam eder.

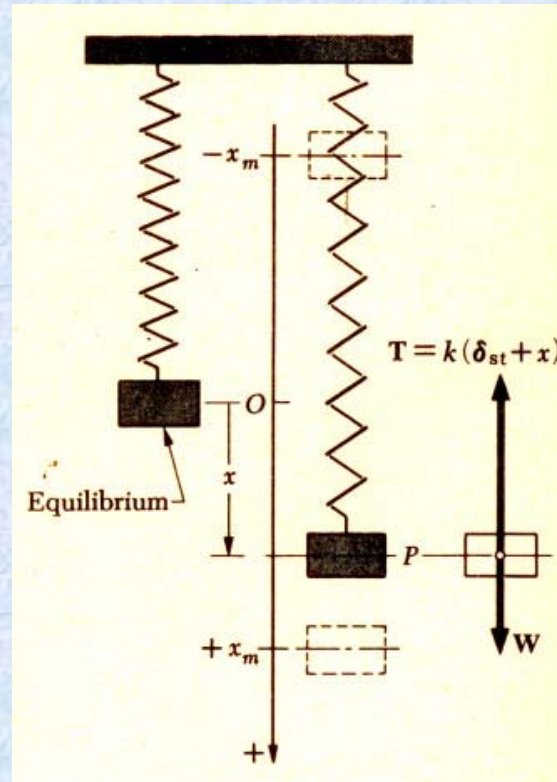
- Hareketin bir tüm devrini tamamlaması için geçen zamana titreşimin periyodu adı verilir.
- Birim zamandaki devir sayısına frekans denir.
- Sistemin denge konumuna göre maksimum yer değiştirmesine de titreşimin genliği adı verilir.

Maddesel Noktaların Serbest Titreşimleri: Basit Harmonik Hareket:



$$\sum F = 0 \rightarrow W = k \delta_{st}$$

$$\lambda^2 + p^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i p \quad i = \sqrt{-1}$$



$$F = W - k(\delta_{st} + x) = -kx$$

$$-kx = m a = m \ddot{x} \rightarrow m \ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 ; \quad p^2 = \frac{k}{m} \quad \text{alınırsa}$$

$$\ddot{x} + p^2x = 0 \quad (1) \quad \text{elde edilir.}$$

(1) denklemiyle tanımlanan harekete, basit harmonik hareket adı verilir. Bu hareket *ivmenin, yer değiştirme ile orantılı ve ters yönde olduğunu* gösterir. (1) in karakteristik denklemi

olur. Bu durumda diferansiyel denklemin çözümü³

$$x = C_1 e^{ipt} + C_2 e^{-ipt} = C_1 (\cos pt + i \sin pt) + C_2 (\cos pt - i \sin pt) \quad (2) \quad \text{olur.}$$

Gerçel ve sanal kısımları ayırtmak için

$$C_1 = (m_1 + in_1) ; \quad C_2 = (m_2 + in_2) \quad \text{alınarak (2) de yerine konursa}$$

$$x = (m_1 + in_1)(\cos pt + i \sin pt) + (m_2 + in_2)(\cos pt - i \sin pt) \quad \text{elde edilir. Buradan}$$

$$x = (m_1 + m_2) \cos pt + (-n_1 + n_2) \sin pt + i(n_1 + n_2) \cos pt + i(m_1 - m_2) \sin pt \quad (3)$$

olur. (3) denkleminin gerçel kısmı

$$A = (-n_1 + n_2) \quad \text{ve} \quad B = (m_1 + m_2) \quad \text{alınarak}$$

$$x = A \sin pt + B \cos pt \quad (4) \quad \text{şeklinde elde edilir. Türev alınarak, sırasıyla, } t \text{ anındaki hız ve ivme elde edilir :}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A p \cos pt - B p \sin pt \quad (5)$$

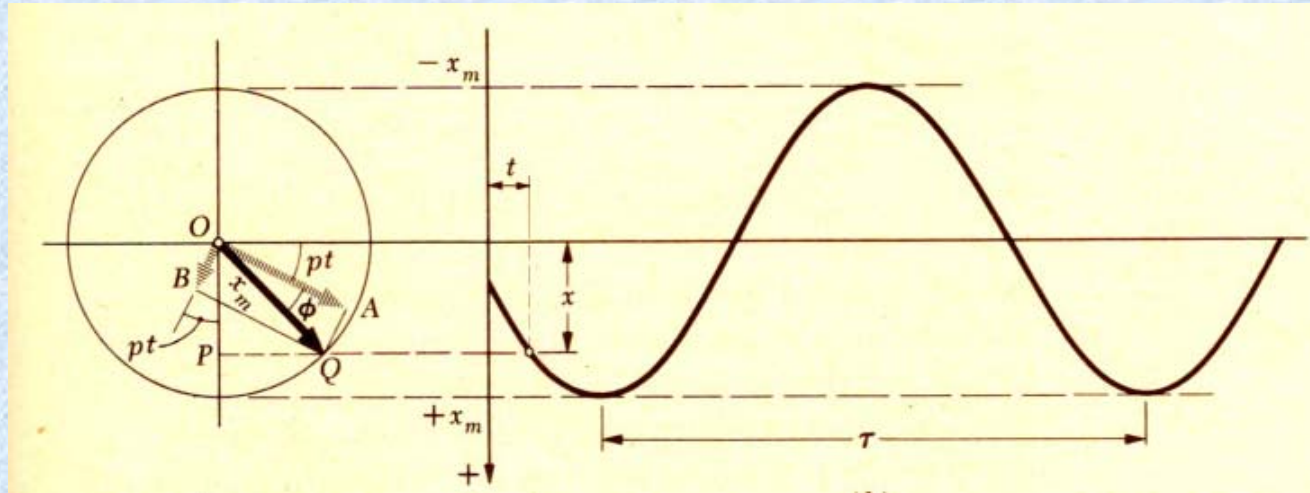
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A p^2 \sin pt - B p^2 \cos pt \quad (6)$$

Bu ifadelerde keyfi iki sabit olduğundan elde edilen çözüm diferansiyel denklemin genel çözümüdür. A ve B sabitlerinin değerleri hareketin *başlangıç şartlarına* bağlıdır.

$$\left. \begin{matrix} x = x_o \\ v = v_o \end{matrix} \right\} t = 0 \text{ da} \longrightarrow \begin{matrix} x_o = A \sin 0 + B \cos 0 \rightarrow B = x_o \\ v_o = A p \cos 0 + B p \sin 0 \rightarrow A = v_o / p \end{matrix} \longrightarrow x = \frac{v_o}{p} \sin pt + x_o \cos pt \quad (7)$$

Maddesel noktaların yer değiştirmesi, hızı ve ivmesi için elde edilmiş olan ifadeler daha kısa ve toplu bir şekilde yazılabilir; bunun için (4) ile tanımlanan $x=OP$ yer değiştirmesinin, şiddetleri A ve B olan $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ gibi iki vektörün x doğrultusundaki bileşenlerinin toplamı olarak yazılabileceği düşünülmelidir. t değiştikçe iki vektör de saat ibreleri yönünde döner.

$\vec{OQ}$ bileşkesinin şiddeti de maksimum x_m yer değiştirmesine eşit olur. Böylece P nin x eksenı boyunca yaptığı basit harmonik hareket, Q noktasının x_m yarıçaplı bir yardımcı çember üzerinde sabit p açısal hızı ile yaptığı hareketin, x eksenı üzerindeki izdüşümü olarak elde edilebilir.



$\vec{OQ}$ vektörlerinin A ile yaptığı açı ϕ ile gösterilirse

$$OP = OQ \sin(pt + \phi) \quad (8)$$

olur. Buradan

$$x = x_m \sin(pt + \phi) \quad (9)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = x_m p \cos(pt + \phi) \quad (10)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_m p^2 \sin(pt + \phi) \quad (11)$$

Yardımcı çemberi çizen Q noktasının p açısal hızına, **titreşimin dairesel frekansı** denir ve radyan/san ile ölçülür; Q nun çember üzerindeki ilk konumunu belirleyen ϕ açısı ise **faz açısı** adını alır.

pt açısı 2π radyan kadar artacak olursa bir tam **çevrim** tanımlanmış olur. Buna karşı gelen t değeri τ ile gösterilir ve titreşimin periyodu adını alır ve saniye ile ölçülür.

Birim zamanda tamamlanan çevrim sayısı f ile gösterilir ve titreşimin **frekansı** olarak isimlendirilir. Frekanslar, *çevrim/san* veya çevrimler boyutsuz olduğu için san^{-1} ile ölçülür.

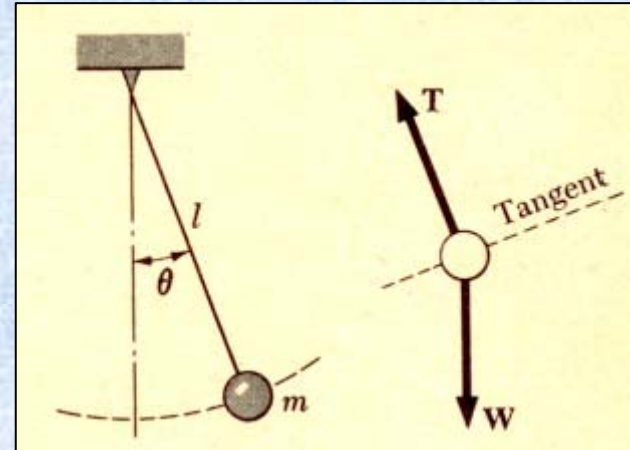
$$\text{Periyot} = \tau = \frac{2\pi}{p} \quad (12)$$

$$\text{frekans} = f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi} \quad (13)$$

p nin, k yay katsayısı ve maddesel noktanın m kütlesi cinsinden tanımlandığı hatırlanırsa, periyot ve frekansın, titreşimin başlangıç şartlarından ve genliğinden bağımsız olduğu görülür. τ ve f nin, maddesel noktanın **kütlesine** bağlı olup, **ağırlığına** bağlı olmadığı ve bu sebeple bunların g den bağımsız olduğu görülmektedir.

Basit Sarkaç (yaklaşık çözüm):

Mühendislik uygulamalarında en çok karşılaşılan titreşimler, basit harmonik hareket yardımı ile gösterilebilirler. Diğer birçok hareketler, farklı türden olmakla birlikte, genlikleri küçük kalmak şartıyla, **yaklaşık olarak**, basit harmonik hareket gibi kabul edilebilirler. Örneğin l boyunda bir ipin ucuna asılı bir m kütlesinden oluşan ve düşey düzlemde salınım yapan bir **basit sarkaç** göz önüne alınsın.



$$\begin{aligned} F_t &= ma_t \\ -W \sin \phi &= ma_t \\ -mg \sin \phi &= ma_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -mg \sin \phi &= ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = ml\ddot{\phi} \\ ml\ddot{\phi} + mg \sin \phi &= 0 \end{aligned}$$

Eğer ϕ açısı çok küçükse $\phi = \sin \phi$ olur. Bu durumda

$$m l \ddot{\phi} + m g \phi = 0 \longrightarrow \ddot{\phi} + \frac{g}{l} \phi = 0 \quad (14) , \quad p^2 = \frac{g}{l} \text{ alınırsa } \longrightarrow \ddot{\phi} + p^2 \phi = 0 \quad (15) \text{ olur.}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} ; \quad f = \frac{1}{\tau} \quad \text{olur.}$$

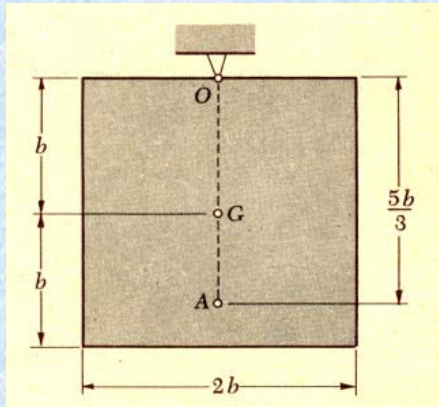
Rijit Cisimlerin Serbest Titreşimleri:

Tek serbestlik dereceli rijit bir cismin veya bir rijit cisimler sisteminin titreşimlerinin çözümlenmesi, maddesel bir noktanın titreşimlerinin çözümlenmesine benzer. Cismin veya cisimler sisteminin konumunu tanımlamak amacıyla, x aralığı veya θ açısı gibi uygun bir değişken seçilir, ve bu değişken ile bunun t ye göre ikinci türevini bağlayan bir denklem

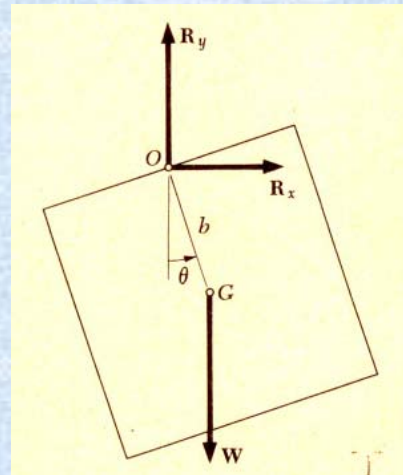
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p^2 x = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + p^2 \theta = 0$$

şeklinde ise göz önüne alınan titreşim basit harmonik bir hareket olur. Bu durumda titreşimin periyot ve frekansı, p nin eşdeğerini $\tau = 2\pi / p$ ve $f = p / 2\pi$ denklemlerinde yerine konulmasıyla elde edilebilir.

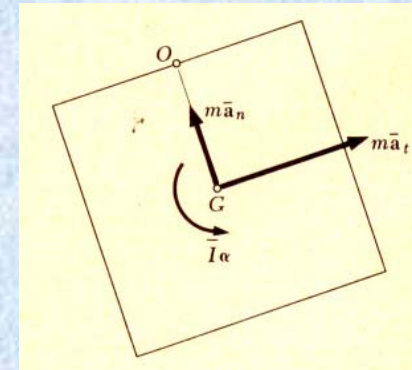
Basit harmonik hareket denklemlerinden birisini elde etmek için en basit yol, değişkenin herhangi bir değeri için serbest cisim diyagramını çizip uygun hareket denklemini yazarak dış kuvvetler sisteminin efektif kuvvetler sistemine eşit olduğunu ifade etmektir. Burada amaç, değişkenin doğrudan doğruya kendisini veya zamana göre birinci ve ikinci türevlerini belirlemek olmayıp, x veya θ değişkeninin katsayısını belirlemek olmalıdır. Bu katsayıyı p^2 ye eşitleyerek, τ ve f nin hesaplanabileceği p dairesel frekansı elde edilmiş olur.



$$\bar{I} = \frac{1}{12}m[(2b)^2 + (2b)^2] = \frac{2}{3}mb^2$$



=



$$(\sum M_{dis})_O = (\sum M_{ef})_O \longrightarrow$$

$$-W(b \sin \theta) = \left(\frac{2}{3}mb^2 + mb^2 \right) \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} \left(\frac{5}{3}mb^2 \right) + mgb \sin \theta = 0$$

Eğer θ açısı çok küçükse $\theta \cong \sin \theta$ alınabilir. Bu durumda

$$\ddot{\theta} \left(\frac{5}{3}mb^2 \right) + mgb \theta = 0 \longrightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{5b} \theta = 0$$

(16) olur.

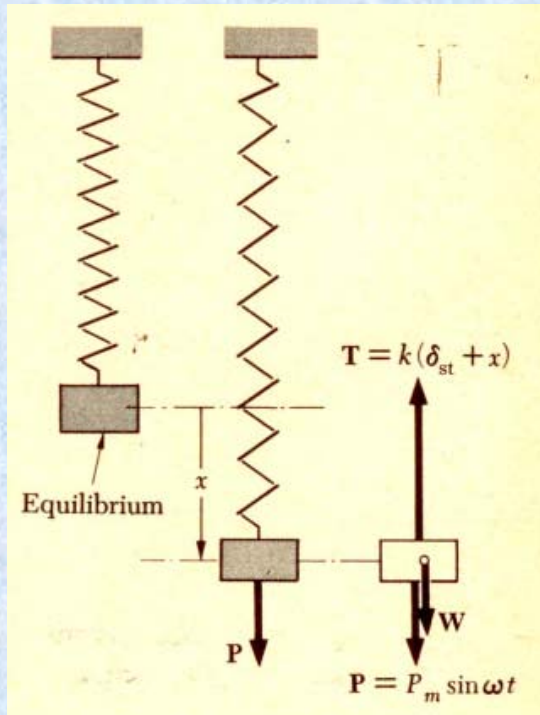
$$p^2 = \frac{3g}{5b}$$

ve

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{5b}{3g}}$$

Sönümsüz Zorlanmış Titreşimler:

Mühendislik uygulamaları bakımından en önemli titreşimler, bir sistemin zorlanmış titreşimleridir. Bir sistem, periyodik bir kuvvetin etkisi altında kalır veya alternatif olarak hareket eden bir mesnede elastik olarak bağlanırsa, bu tür bir titreşim ortaya çıkar. Birinci hal olarak şiddeti $P = P_m \sin \omega t$ şeklinde değişen periyodik bir $\vec{P}$ kuvvetinin etkisi altında, yaya asılı m kütlesi göz önüne alınsın. Bu kuvvet, cisme doğrudan doğruya etkiyen bir dış kuvvet olabildiği gibi, cismin dengede olmayan bir parçasının dönmesinden meydana gelen merkezkaç bir kuvvet de olabilir.



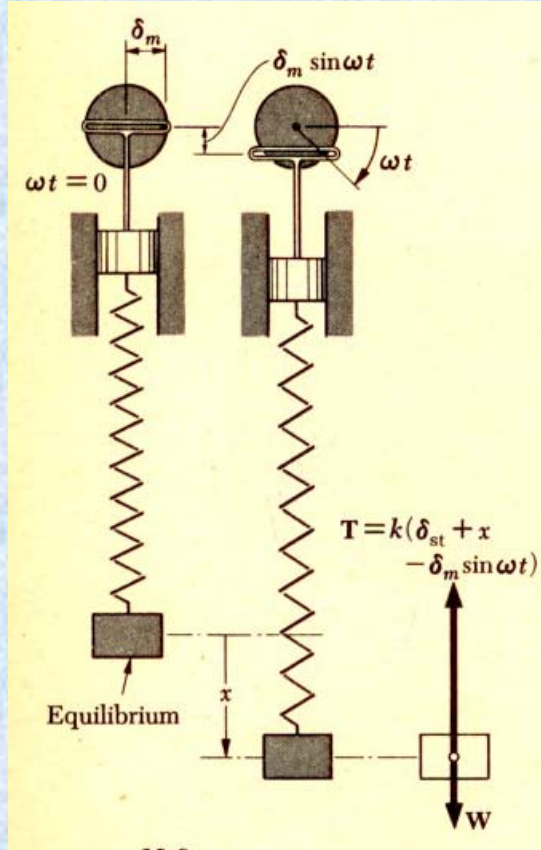
$$+\downarrow \sum F = ma: \quad P_m \sin \omega t + W - k(\delta_{st} + x) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$W = k \delta_{st}$$

olduğu hatırlanırsa

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = P_m \sin \omega t$$

(17) Sönümsüz
zorlanmış titreşim



Mesnet hareketi durumunda ise

$$\bar{x}_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega / p)^2} \quad (21)$$

$$+\downarrow \sum F = ma: \quad W - k(\delta_{st} + x - \delta_m \sin \omega t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = k\delta_m \sin \omega t$$

(18) Sönümsüz zorlanmış titreşim

$$x_{\text{özel}} = \bar{x}_m \sin \omega t \quad (19)$$

(19), (18) de yerine konursa

$$-m\omega^2 \bar{x}_m \sin \omega t + k \bar{x}_m \sin \omega t = P_m \sin \omega t \quad \text{Buradan}$$

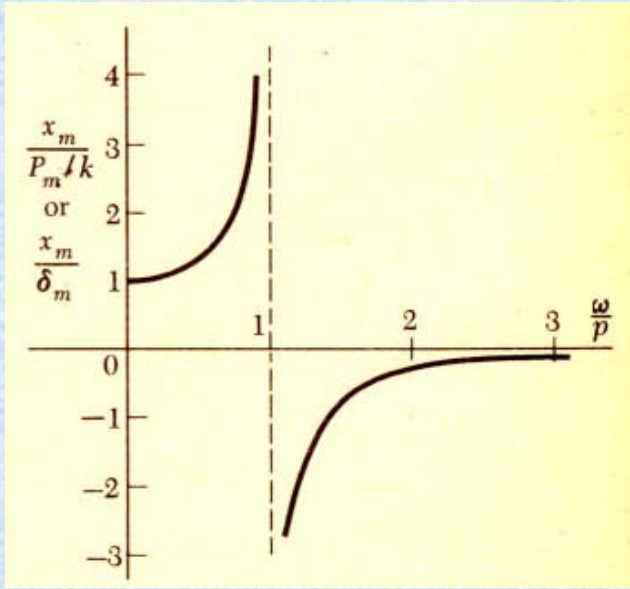
$$\bar{x}_m = \frac{P_m}{k - m\omega^2} \rightarrow \bar{x}_m = \frac{P_m / k}{1 - (\omega / p)^2} \quad (20)$$

$$x_{\text{tamam}} = A \sin pt + B \cos pt \quad (22)$$

$$x = A \sin pt + B \cos pt + \bar{x}_m \sin \omega t \quad (23)$$

(23) ün ilk iki terimi, sistemin serbest titreşimini gösterir. Bu titreşimin frekansı, sistemin doğal frekansı adını alır ve sadece k yay katsayısı ile cismin kütlesine bağlıdır; A ve B sabitleri başlangıç şartlarından belirlenir. Bu serbest titreşime, pratikte sürtünme kuvvetleri ile hemen söndürüldüğü için, geçici titreşim adı da verilir.

Bu nedenle bundan sonra $x_m \cong x_m$ olarak alınacaktır.



$$x = A \sin pt + B \cos pt + \bar{x}_m \sin \omega t \quad (23)$$

(23) deki son terimin belirlediği, ve etkiyen kuvvet veya mesnet hareketi ile meydana gelen ve beslenen titreşime, **devamlı titreşim** adı verilir. Bu titreşimin, söz konusu kuvvet veya mesnet hareketi tarafından ortaya çıkarılan frekansı, **zorlanmış frekanstır** ve x_m genliği ise (20) veya (21) tarafından belirlenir ve ω/p **frekans oranına** bağlıdır. Devamlı titreşimin x_m genliğinin, P_m kuvvetinden meydana gelen statik P_m/k yer değişimine veya mesnet hareketinin δ_m genliğine oranı, **büyütme çarpanı** adını alır.

$$\bar{x}_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega/p)^2} \quad (20)$$

$$\bar{x}_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega/p)^2} \quad (21)$$

(20) ve (21) den

$$\text{Büyütme çarpanı} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega/P)^2} \quad (24)$$

bulunur. $\omega = p$ için $x_m = \infty$ olmaktadır. Bu durumda, etkiyen kuvvet veya mesnet hareketi, verilen sistem ile **rezonans** haline gelir. Gerçekte, titreşimin genliği, söndürücü kuvvetler sebebiyle sonlu kalır. Bununla beraber böyle bir durumdan sakınmalı ve zorlanmış frekans, sistemin doğal frekansına çok yakın seçilmemelidir.

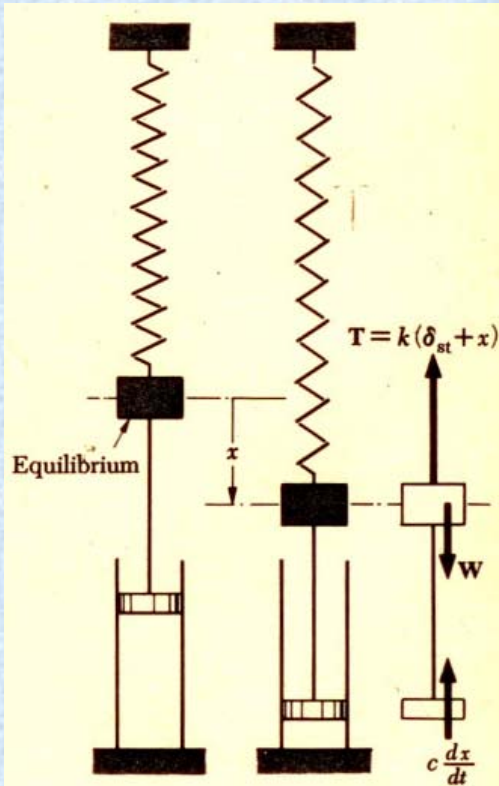
Ayrıca görülüyor ki, (23) de, $\sin \omega t$ nin katsayısı $\omega < p$ için pozitifken, $\omega > p$ için negatiftir. Birinci halde zorlanmış titreşim, etkiyen kuvvet veya hareketli mesnet ile **aynı fazda** iken, ikinci halde bu 180° **faz dışıdır**.

Sönümlü Serbest Titreşimler:

Gerçekte bütün titreşimler bir ölçüde sürtünme kuvvetleri tarafından söndürülürler. Bu kuvvetler iki cisim arasındaki *kuru sürtünme* veya *Coulomb sürtünmesinden*, rijit bir cismin bir akışkan içerisindeki hareketinden ortaya çıkan *sıvı sürtünmesinden*, veya görünüşte elastik olan bir cismin molekülleri arasındaki *iç sürtünmeden* meydana gelir.

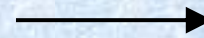
Özel olarak ilginç bir sönüm türü, az ve orta hızlarda, sıvı sürtünmesinden ortaya çıkan *viskoz sönümdür*. Viskoz sönümün en belirli özelliği, sürtünme kuvvetinin, hareket eden cismin hızı ile *doğru orantılı* olmasıdır.

Örnek olarak katsayısı k olan bir yaya asılı bir m kütleinin, bir direnç kutusunun (daşpot) silindrine bağlı olduğu durum göz önüne alınsın.



$$+\downarrow \sum F = ma: \quad W - k(\delta_{st} + x) - c \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx - c \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$



$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (25)$$

(25) de $x = e^{\lambda t}$ konulursa karakteristik denklem elde edilir :

$$m \lambda^2 + c \lambda + k = 0$$

(26)

olur. Bunun kökleri

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (27)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (27)$$

olur. (27) de karekökün içini sıfır yapan c değeri c_c **kritik sönüm katsayısı** olarak tanımlanırsa

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \longrightarrow c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2mp \quad (28)$$

yazılır; burada p , sönüm olmaması halinde, sistemin doğal frekansıdır. c katsayısının değerine göre üç farklı sönüm hali ortaya çıkar :

1. Kuvvetli sönüm: $c > c_c$

(27) karakteristik denkleminin λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve ayrıktır, ve (25) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (29)$$

olur. Bu çözüm, titreşimsiz bir harekete karşı gelir. λ_1 ve λ_2 nin her ikisi de negatif olduklarından t sonsuza giderken x sıfıra yaklaşır. Bununla birlikte gerçekte sistem, sonlu bir zaman geçtikten sonra yeniden dengesini kazanır.

2. Kritik sönüm: $c = c_c$

Karakteristik denklemin $\lambda = -c_c / 2m = -p$ şiddetinde çift katlı bir kökü vardır ve (25) in genel çözümü

$$x = (A + Bt)e^{-pt} \quad (30)$$

dir. Elde edilen hareket yine titreşimsizdir. Kritik sönümlü sistemlerin, salınım yapmaksızın, en kısa zamanda tekrar denge konumlarına döndüklerinden, mühendislik uygulamalarında özel bir önemi vardır.

3. Zayıf sönüm: $c < c_c$:

(27) karakteristik denkleminin λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve ayırıktır, ve (25) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$x = e^{-(c/2m)t} (A \sin qt + B \cos qt) \quad (31)$$

şeklindedir; burada q aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır :

$$q^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2$$

$k/m = p^2$ konur ve (28) göz önünde tutulursa

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2mp \quad (28)$$

$$q = p\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \quad (32)$$

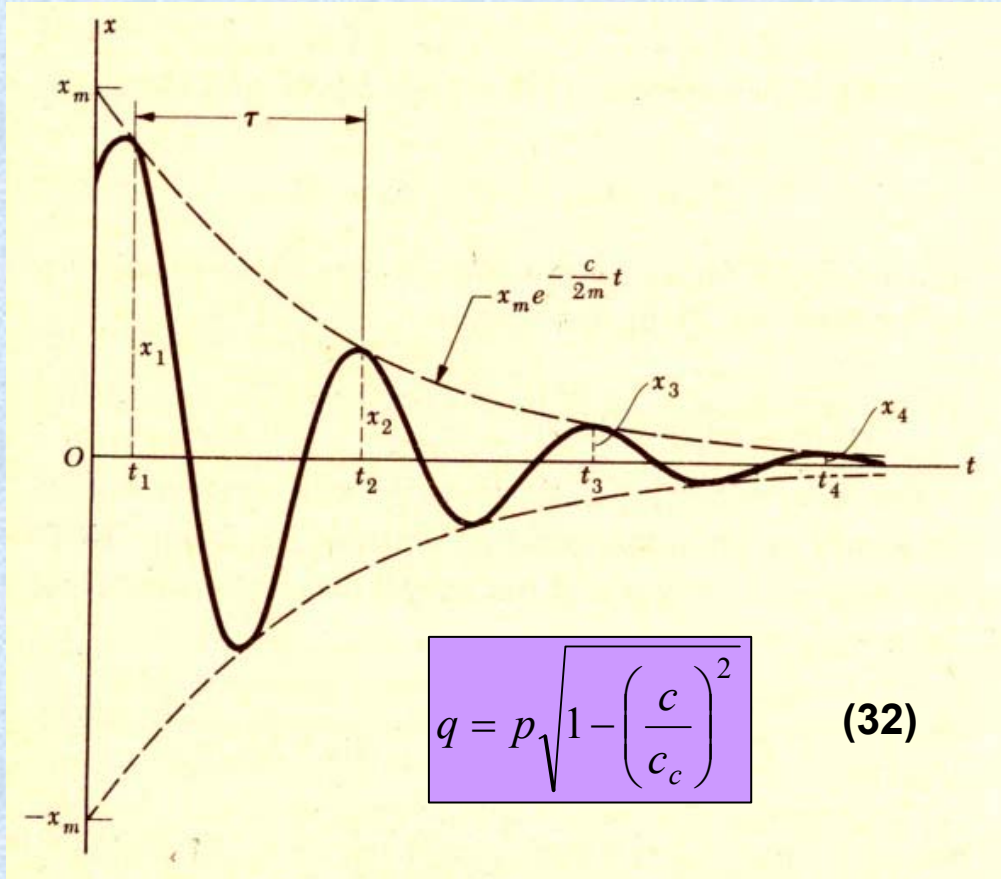
yazılır; burada c/c_c sönüm çarpanı adını alır. Bu durumda (25) in genel çözümü aşağıdaki formda yazılabilir :

$$x = x_m e^{-(c/2m)t} \sin(qt + \phi) \quad (33)$$

$$x = x_m e^{-(c/2m)t} \sin(qt + \phi)$$

(33)

(33) ün tanımladığı hareket, genliği azalan bir titreşim hareketidir.



$$q = p \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \quad (32)$$

Her ne kadar bu hareket, gerçekte, aynı biçimde tekrarlanmazsa da, aşağıdaki şekilde görülen ve (33) eğrisinin değdiği iki limit eğriden biri üzerindeki ardışık iki noktaya karşılık gelen $\tau = 2\pi / q$ zaman aralığı, genellikle sönümlü titreşimin periyodu olarak gösterilir.

(32) ye bakılarak τ nun karşıt sönümsüz titreşimin periyodundan daha büyük olduğu görülür.

Sönümlü Zorlanmış Titreşimler:

Bir önceki kısımda göz önüne alınan sistem, $P = P_m \sin \omega t$ olarak değişen periyodik bir $\vec{P}$ kuvveti etkisinde kalırsa, hareket denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = P_m \sin \omega t \quad (34)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (25)$$

(34) ün genel çözümü, (34) ün bir özel çözümüne bir tamamlayıcı fonksiyon veya (25) homojen denkleminin genel çözümünü eklemekle elde edilir. Tamamlayıcı fonksiyon, göz önüne alınmış olan sönümün tipine bağlı olarak (29), (30) ve (31) de verilmiştir. Bu, en sonunda sönen **geçici** bir hareket gösterir.

Bu kısımda (34) denkleminin

$$x_{\text{özel}} = x_m \sin(\omega t - \varphi) \quad (35)$$

formundaki özel bir çözümü ile belirlenen, sürekli titreşim ile ilgileneceğiz. (34) de x yerine $x_{\text{özel}}$ konularak

$$-m\omega^2 x_m \sin(\omega t - \varphi) + c\omega x_m \cos(\omega t - \varphi) + kx_m \sin(\omega t - \varphi) = P_m \sin \omega t \quad \text{elde edilir.}$$

x_m ve φ yi bulabilmek için, $\omega t - \varphi$ yi sırayla, 0 ve $\pi/2$ ye eşitlersek

$$c \omega x_m = P_m \sin \varphi \quad (36)$$

$$(k - m \omega^2) x_m = P_m \cos \varphi \quad (37)$$

bulunur. (36) ve (37) nin her iki tarafının kareleri alınıp toplanırsa

$$\left[(k - m \omega^2)^2 + (c \omega)^2 \right] x_m^2 = P_m^2 \quad (38)$$

elde edilir. (38) eşitliği x_m ye göre çözülür, ve ayrıca (36) ve (37) taraf tarafa bölünürse

$$x_m = \frac{P_m}{\sqrt{(k - m \omega^2)^2 + (c \omega)^2}} \quad \text{tg } \varphi = \frac{c \omega}{k - m \omega^2} \quad (39)$$

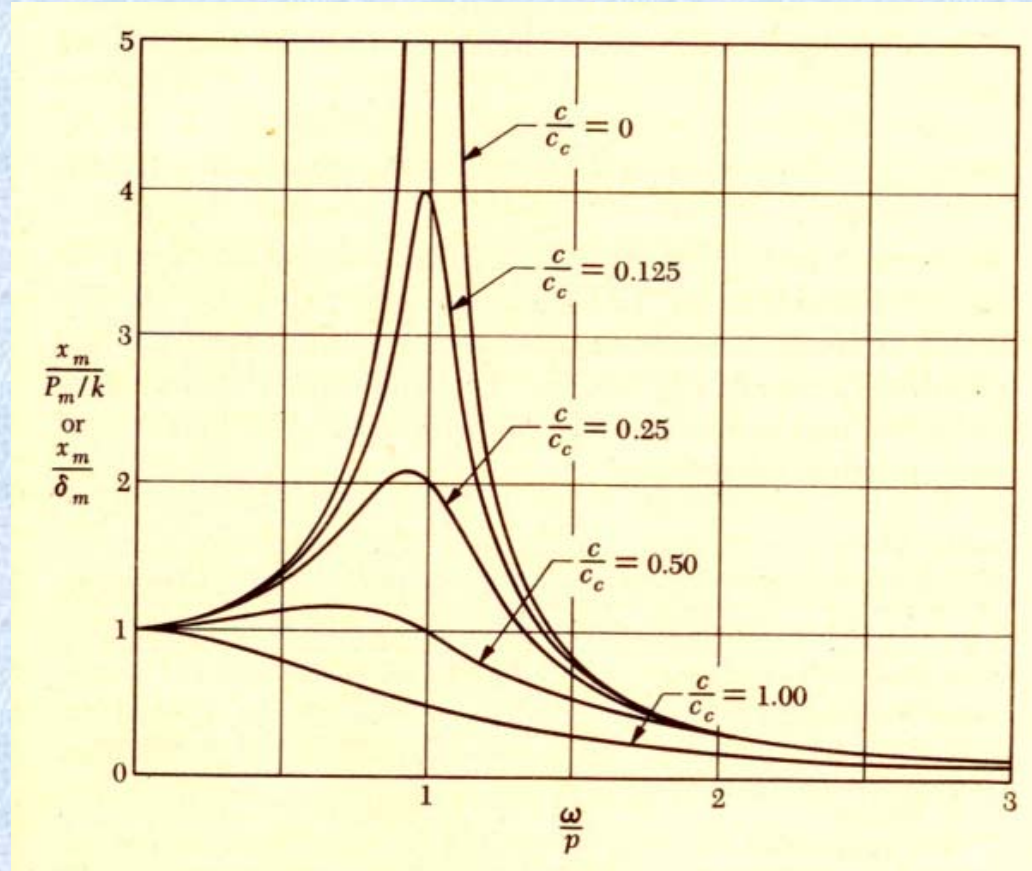
bulunur. p sönümsüz serbest titreşimin dairesel frekansı olmak üzere $k/m=p^2$ ve sistemin kritik sönüm katsayısı c_c olmak üzere, $2mp=c_c$ olduğu hatırlanırsa

$$\frac{x_m}{P_m / k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega / p)^2]^2 + [2(c / c_c)(\omega / p)]^2}} \quad (40)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{2(c / c_c)(\omega / p)}{1 - (\omega / p)^2} \quad (41)$$

Burada ω/p frekanslar oranı ve c/c_c sönüm çarpanıdır.

Sönüm çarpanının çeşitli değerlerine karşı gelen frekanslar oranına göre, büyütme çarpanının değişimi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Buradan görülmektedir ki, zorlanmış titreşimin genliğinin küçük olabilmesi için, c viskoz sönüm katsayısını büyütme, veya doğal ve zorlanmış frekansları birbirlerinden uzak tutmak gerekir.