:

SORULAR

1. Aşağıda karakteristik denklemlerinin kökleri verilen sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin homojen kısımlarının çözümlerini (y_h) yazınız.

a. $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = \frac{2}{3}$, $r_4 = -\frac{2}{3}$, $r_5 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_6 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$y_h =$

b. $r_1 = r_2 = -1$, $r_3 = 1$, $r_4 = -i$, $r_5 = +i$, $r_6 = 0$.

$y_h =$

c. $r_1 = r_2 = -2i$, $r_3 = r_4 = +2i$, $r_5 = +3i$, $r_6 = -3i$.

$y_h =$

d. $r_1 = r_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $r_3 = +\frac{2}{5}i$, $r_4 = -\frac{2}{5}i$, $r_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$, $r_6 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

$y_h =$

e. $r_1 = 3i$, $r_2 = -3i$, $r_3 = 5i$, $r_4 = -5i$, $r_5 = -4i$, $r_6 = 4i$.

$y_h =$

f. $r_1 = 3 - i$, $r_2 = 3 + i$, $r_3 = 4 - 2i$, $r_4 = 4 + 2i$, $r_5 = -2 + 5i$, $r_6 = -2 - 5i$.

$y_h =$

g. $r_1 = 5$, $r_2 = -5$, $r_3 = -6 + 3i$, $r_4 = -6 - 3i$, $r_5 = \sqrt{3}\,i$, $r_6 = -\sqrt{3}\,i$.

$y_h =$

h. $r_1 = r_2 = 3i$, $r_3 = r_4 = -3i$, $r_5 = 2 - i$, $r_6 = 2 + i$.

$y_h =$

i. $r_1 = r_2 = r_3 = -4 + 3i$, $r_4 = r_5 = r_6 = -4 - 3i$.

$y_h =$

j. $r_1 = r_2 = \sqrt{2}$, $r_3 = r_4 = -\sqrt{2}$, $r_5 = -\sqrt{2}\,i$, $r_6 = \sqrt{2}\,i$.

$y_h =$

2. Aşağıda verilen sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin, sağ taraflarında yer alan sıfırdan farklı $Q(x) \neq 0$ fonksiyonlarından dolayı bulunacak $\mathbf{y_p}$ çözümleri için **Belirsiz Katsayılar Metodu**na göre gelmesi gereken belirsiz katsayılı çözüm fonksiyonlarını belirtiniz. Yani, homojen kısmının çözümüyle **rezonans (çakışma)** yapıp, yapmadığına dikkat ederek sağ tarafta yer alan her bir fonksiyondan dolayı getirilen belirsiz katsayılı modeli **sadece yazınız.** Belirsiz katsayılarını bulmak üzere işlem yapmayınız.

a. $y''' + 4y'' + 4y' + 16\,y = 5\,e^{4x} - 6\,Sin\,(2x) + 4\,x\,e^{-4x}$.

$y_{p_1} =$

$y_{p_2} =$

$y_{p_3} =$

b. $y''' - 2\,y'' + y' = 7\,e^{x} + 2\,x\,e^{x}\,Cos(x) - 3\,x^{2}$.

$y_{p_1} =$

$y_{p_2} =$

$y_{p_3} =$

c. $y^{(V)} + 4\,y''' = 5\,e^{-3x}\,Cos\,(2x) - 8\,Sin\,(2x) + 7$.

$y_{p_1} =$

$y_{p_2} =$

$y_{p_3} =$

d. $y''' + 3\,y'' + 3y' + y = 9\,e^{-x} - 3\,x\,Cos\,(3x) + 12\,e^{-x}\,Sin\,(3x)$.

$y_{p_1} =$

$y_{p_2} =$

$y_{p_3} =$

e. $y''' - 2\,y'' + 5\,y' = 6\,e^{2x}\,Cos(5x) - 4\,e^{x}\,Sin\,(2x) + 8\,x^{3}$.

$y_{p_1} =$

$y_{p_2} =$

$y_{p_3} =$

Cevaplar

1. Aşağıda karakteristik denklemlerinin kökleri verilen sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin homojen kısımlarının çözümlerini (y_h) yazınız.

a. $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = \frac{2}{3}$, $r_4 = -\frac{2}{3}$, $r_5 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_6 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$y_h = C_1 + C_2\, x + C_3\, e^{\frac{2}{3}x} + C_4\, e^{-\frac{2}{3}x} + C_5\, e^{(1+\frac{\sqrt{3}}{2})x} + C_6\, e^{(1-\frac{\sqrt{3}}{2})x}.$$

b. $r_1 = r_2 = -1$, $r_3 = 1$, $r_4 = -i$, $r_5 = +i$, $r_6 = 0$.

$$y_h = C_1\, e^{-x} + C_2\, x\, e^{-x} + C_3\, e^{x} + C_4\, Cos(x) + C_5\, Sin(x) + C_6 .$$

c. $r_1 = r_2 = -2i$, $r_3 = r_4 = +2i$, $r_5 = +3i$, $r_6 = -3i$.

$$y_h = C_1\, Cos(2x) + C_2\, Sin(2x) + C_3\, x\, Cos(2x) + C_4\, x\, Sin(2x) + C_5\, Cos(3x) + C_6\, Sin(3x).$$

d. $r_1 = r_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $r_3 = +\frac{2}{5}i$, $r_4 = -\frac{2}{5}i$, $r_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$, $r_6 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

$$y_h = C_1\, e^{\frac{\sqrt{2}}{3}x} + C_2\, x\, e^{\frac{\sqrt{2}}{3}x} + C_3\, Cos(\frac{2x}{5}) + C_4\, Sin(\frac{2x}{5}) + C_5\, e^{\frac{x}{2}}\, Cos(\frac{\sqrt{3}}{4}x) + C_6 e^{\frac{x}{2}}\, Sin(\frac{\sqrt{3}}{4}x).$$

e. $r_1 = 3i$, $r_2 = -3i$, $r_3 = 5i$, $r_4 = -5i$, $r_5 = -4i$, $r_6 = 4i$.

$$y_h = C_1 Cos(3x) + C_2 Sin(3x) + C_3 Cos(5x) + C_4 Sin(5x) + C_5 Cos(4x) + C_6 Sin(4x).$$

f. $r_1 = 3 - i$, $r_2 = 3 + i$, $r_3 = 4 - 2i$, $r_4 = 4 + 2i$, $r_5 = -2 + 5i$, $r_6 = -2 - 5i$.

$$y_h = C_1\, e^{3x} Cos(x) + C_2 e^{3x} Sin(x) + C_3 e^{4x} Cos(2x) + C_4 e^{4x} Sin(2x) + C_5\, e^{-2x} Cos(5x) + C_6 e^{-2x} Sin(5x).$$

g. $r_1 = 5$, $r_2 = -5$, $r_3 = -6 + 3i$, $r_4 = -6 - 3i$, $r_5 = \sqrt{3}\, i$, $r_6 = -\sqrt{3}\, i$.

$$y_h = C_1 e^{5x} + C_2\, e^{-5x} + C_3\, e^{-6x} Cos(3x) + C_4\, e^{-6x} Sin(3x) + C_5\, Cos(\sqrt{3}x) + C_6\, Sin(\sqrt{3}x).$$

h. $r_1 = r_2 = 3i$, $r_3 = r_4 = -3i$, $r_5 = 2 - i$, $r_6 = 2 + i$.

$$y_h = C_1 Cos(3x) + C_2\, Sin(3x) + C_3\, x\, Cos(3x) + C_4 x\, Sin(3x) + C_5\, e^{2x}\, Cos(x) + C_6\, e^{2x} Sin(x) .$$

i. $r_1 = r_2 = r_3 = -4 + 3i$, $r_4 = r_5 = r_6 = -4 - 3i$.

$$y_h = C_1\, e^{-4x} Cos(3x) + C_2\, e^{-4x} Sin(3x) + C_3 x e^{-4x} Cos(3x) + C_4\, x e^{-4x} Sin(3x) + C_5 x^2 e^{-4x} Cos(3x) +$$
$$+ C_6\, x^2 e^{-4x} Sin(3x) .$$

j. $r_1 = r_2 = \sqrt{2}$, $r_3 = r_4 = -\sqrt{2}$, $r_5 = -\sqrt{2}\, i$, $r_6 = \sqrt{2}\, i$.

$$y_h = C_1\, e^{\sqrt{2}\, x} + C_2\, x\, e^{\sqrt{2}\, x} + C_3\, e^{-\sqrt{2}\, x} + C_4\, x\, e^{-\sqrt{2}\, x} + C_5\, Cos(\sqrt{2}x) + C_6\, Sin(\sqrt{2}x) .$$

2. Aşağıda verilen sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin, sağ taraflarında yer alan sıfırdan farklı $Q(x) \neq 0$ fonksiyonlarından dolayı bulunacak $\mathbf{y_p}$ çözümleri için **Belirsiz Katsayılar Metodu**na göre gelmesi gereken belirsiz katsayılı çözüm fonksiyonlarını belirtiniz. Yani, homojen kısmının çözümüyle **rezonans (çakışma)** yapıp, yapmadığına dikkat ederek sağ tarafta yer alan her bir fonksiyondan dolayı getirilen belirsiz katsayılı modeli **sadece yazınız.** Belirsiz katsayılarını bulmak üzere işlem yapmayınız.

a. $y''' + 4y'' + 4y' + 16\,y = 5\,e^{4x} - 6\,Sin\,(2x) + 4\,x\,e^{-4x}\,.$

$r^3 + 4r^2 + 4r + 16 = 0.$

$r^2(r+4) + 4(r+4) = 0.$

$(r^2+4)(r+4) = 0.$

$y_h = C_1\,e^{-4x} + C_2\,Cos(2x) + C_3\,Sin(2x).$

$y_{p_1} = A\,e^{4x}\,.$

$y_{p_2} = \left[A Cos(2x) + B Sin(2x)\right].\,x$: Rezonans.

$y_{p_3} = (\,A\,x + B\,)\,e^{-4x}\,.\,x$: Rezonans.

b. $y''' - 2\,y'' + y' = 7\,e^x + 2\,x\,e^x\,Cos(x) - 3\,x^2\,.$

$r^3 - 2r^2 + r = 0.$

$r\,(r-1)^2 = 0.$

$y_h = C_1 + C_2\,e^x + C_3\,x\,e^x.$

$y_{p_1} = A\,e^x\,.\,x^2$: Rezonans.

$y_{p_2} = (Ax+B)\,e^x\,Cos(x) + (Cx+D)\,e^x\,Sin(x)\,.$

$y_{p_3} = (\,A\,x^2 + Bx + C\,)\,.\,x$: Rezonans.

c. $y^{(V)} + 4\,y''' = 5\,e^{-3x}\,Cos\,(2x) - 8\,Sin\,(2x) + 7\,.$

$r^5 + 4r^3 = 0.$

$r^3(r^2+4) = 0.$

$r_1 = r_2 = r_3 = 0\,,\; r_4 = 2i\,,\; r_5 = -2i.$

$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 Cos(2x)$
$+ C_5 Sin(2x)\,.$

$y_{p_1} = A\,e^{-3x}\,Cos(2x) + B\,e^{-3x}\,Sin(2x).$

$y_{p_2} = \left[A\,Cos(2x) + B\,Sin(2x)\right].\,x$: Rezonans.

$y_{p_3} = A\,.\,x^3$: Rezonans.

d. $y''' + 3\,y'' + 3y' + y = 9\,e^{-x} - 3\,x\,Cos\,(3x) + 12\,e^{-x}\,Sin\,(3x)\,.$

$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0.$

$(\,r+1\,)^3 = 0.$

$y_h = C_1 e^{-x} + C_2\,x\,e^{-x} + C_3\,x^2 e^{-x}\,.$

$y_{p_1} = A\,e^{-x}\,.\,x^3$: Rezonans.

$y_{p_2} = (\,Ax + B)\,Cos(3x) + (\,Cx + D\,)\,Sin(3x)\,.$

$y_{p_3} = A\,e^{-x}\,Cos\,(3x) + B\,e^{-x}\,Sin\,(3x)\,.$

e. $y''' - 4\,y'' + 13\,y' = 6\,Cos(3x) - 3\,e^{2x}\,Sin\,(3x) + 8\,x^3\,.$

$r^3 - 4r^2 + 13r = 0.$

$r(r^2 - 4r + 13) = 0.$

$r_1 = 0.\quad r_2 = 2 + 3i\;\,.r_3 = 2 - 3i.$

$y_h = C_1 + C_2\,e^{2x}Cos(3x) + C_3 e^{2x} Sin(3x).$

$y_{p_1} = A\,Cos(3x) + B\,Sin(3x)\,.$

$y_{p_2} = \left[A e^{2x} Cos(3x) + B e^{2x}\,Sin(3x)\right] x$: Rezonans.

$y_{p_3} = (\,Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\,)\,.\,x$: Rezonans.