1./04/2021

ZAMAN SERİLERİ ANALİZİ

ÇOKLU REGRASYON

$y = ax_1 + bx_2 + c \quad (1)$

$yx_1 = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_1 \quad (2)$

$yx_2 = ax_1x_2 + bx_2^2 + cx_2 \quad (3)$

$\sum y = a\sum x_1 + b\sum x_2 + \underbrace{\sum c}_{c.n}$

$\sum yx_1 = a\sum x_1^2 + b\sum x_1x_2 + c\sum x_1$

$\sum yx_2 = a\sum x_1x_2 + b\sum x_2^2 + c\sum x_2$

örnek

x_1	x_2	y
1	3	5
2	7	9
3	8	13
5	6	12
4	2	8
+ 15	+ 26	+ 47

$n = 5$

x_1^2	x_2^2	x_1x_2	yx_1	yx_2
1	9	3	5	15
4	49	14	18	63
9	64	24	39	104
25	36	30	60	72
16	4	8	32	16
+ 55	+ 162	+ 79	+ 154	+ 270

$\boxed{2}$

(1) $47 = 15a + 26b + 5c$

(2) $154 = a55 + 79b + c.15$

(3) $270 = a79 + 162b + 26c$

(1) ve (2) den (1)'i -3 ile çarpıp 2'ye ilave edelim.

$$-141 = -45a \cancel{+} 78b - 15c$$
$$154 = 55a + 79b + 15c$$
$$\boxed{13 = 10a + b} \quad (4)$$

2 ve 3'den 2'yi -26 ile 3'ü de 15 ile çarpıp toplıyalım.

$$-4004 = -1430a - 2054b - 390c$$
$$4050 = 1185a + 2430b + 390c$$
$$46 = -245a + 376b \quad (5)$$

$$b = 13 - 10a$$

$$46 = -245a + 376(13 - 10a)$$

$$46 = -245a + 4888 - 3760a$$

$$-4842 = -4005a$$

$$a = \frac{4842}{4005} = 1.2089$$

$$b = 13 - 12{,}089 = 0.911$$

$$47 = 15a + 26b + 5c$$

3

$47 = 15.(1,2089) + 26(0.911) + 5c$

$47 = 6.0445 + 23.686 + 5c$

$17,2695 = 5c$

$\boxed{c = 3,4539}$

$y = ax_1 + bx_2 + c$ idi

$\boxed{y = 1,2089x_1 + 0.911x_2 + 3.4539}$

Zaman serileri, zaman içinde yapılan gözlemlerin bir dizisi olarak tanımlanır. Yani bir zaman serisini, rasgele değişkenlerin bir kolleksiyonu olarak tanımlanır. T bir indis kümesi olmak üzere bir zaman serisi $\{X_t : t \in T\}$ şeklinde ifade edilir. $T = \{1, 2, 3, \ldots n\} = \mathbb{N}$ $T = \{0 \mp 1, \mp 2 \ldots\} = \mathbb{Z}$ alınabildiği gibi $T = \mathbb{R}$ ve $T = [0,1]$ gibi sürekli aralıklarda alınabilir. Eğer T indis kümesi $T = \mathbb{R}$ veya $T = [0,1]$ gibi sürekli aralıklar olarak seçildiğinde $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisine sürekli zamanlı stokastik süreç adı verilir. Eğer T indis kümesi $T = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $T = \mathbb{N}$ veya $T = \mathbb{Z}$ şeklinde seçilmiş ise $\{X_t : t \in T\}$'ye bir zaman dizisi veya zaman serisi adı verilir. Yalnız burada aksi söylenmedikçe T indis kümesi olarak $T = \mathbb{N}$ seçilecektir. Bir zaman serisini rasgele değişkenlerin bir kolleksiyonu olarak tanımlamıştık. Dolayısıyla önce rasgele değişkenin tanımlanması gerekmektedir. Fakat rasgele değişkeni tanımlıyabilmemiz için de önce olasılık uzayından bahsedilmesi gerekmektedir.

4

Tanım: Ω boş olmayan bir küme olmak üzere ve Ω'nın bazı alt kümelerinin oluşturduğu bir sınıf F olsun. Eğer bu F sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa F'ye Ω üzerinde bir sigma cebir adı verilir. (Ω, F) ikilisine de ölçülebilir bir uzay denir.

1) $\Omega \in F$

2) $\forall A \in F$ için $A^c \in F$ (A^c, A'nın tümleyenini gösteriyor)

3) $A_n \in F$, $n = 1, 2, 3$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

Tanım: (Ω, F) bir olasılık uzayı olmak üzere F üzerinde tanımlanan bir küme fonksiyonu

$$P: F \to [0,1], \quad A \to P(A)$$

aşağıdaki özellikleri sağlarsa P küme fonksiyonuna bir olasılık ölçüsü denir. $P(A)$ sayısına ise A olayının olasılığı denir. Ayrıca (Ω, F, P) ölçüsüne bir olasılık uzayı denir.

1) $\forall A \in F$ için $P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) A_n'ler F deki ayrık elemanların $(A_i \cap B_j = \phi \quad i \neq j)$ bir dizisi ise

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Tanım (Ω, F, P) bir olasılık uzayı olsun. Ω örnek uzayından $\mathbb{R}$ reel sayılara giden

$X: \Omega \to \mathbb{R} \quad w \to X(w)$

fonksiyonu eğer, $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{w \in \Omega : X(w) \leq a\} \in F$ koşulunu sağlıyorsa, X'e bir rasgele değişken denir.

Tanım Zaman Serisi (Ω, F, P) bir olasılık uzayı, T bir indis kümesi olmak üzere, bir zaman serisi $\Omega \times T$ çarpım uzayından reel sayılara giden bir fonksiyondur.

$$X(\ ): \Omega \times T \to \mathbb{R}$$

$$(w,t) \to X(w,t)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur. Burada $X(w,t)$ yerine bazen $X_t(w)$ bazen de genellikle X_t gösterimi kullanılır.

Bu tanıma göre bir zaman serisi, her sabit t için bir rasgele değişkendir. w sabit tutulduğunda ise t'nin reel değerli bir fonksiyonudur. Bu reel değerli fonksiyona zaman serisinin bir realizasyonu adı verilir.

Örnek olarak, bir zarın atılması deneyini göz önüne alalım. X rasgele değişkeni zarın üzerindeki noktaların sayısını göstermek üzere örnek uzay $\Omega = \{1, .., 6\}$ şeklinde olacaktır. Sigma Cebir (F) olarak Ω'nın bütün alt kümelerinin oluşturduğu sınıfı göz önüne alalım. ve $A \in F$ için $P(A) = n(A)/6$ olmak üzere P bir olasılık ölçüsüdür. Burada $n(A)$ A'nın eleman sayısını göstermektedir. Doğal sayılar kümesi indis kümesi olarak alındığında $(T = \mathbb{N})$ zaman serisi $X_t(w) = t + w$ tanımlansın. Eğer $t = 4$ sabit tutulursa $X_t(w)$ zaman serisi $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ değerlerini

6

$1/6$ olasılıkla alan bir rasgele değişkendir. Fakat $w=3$ sabit tutulursa, $X_t(w)$ zaman serisi t'nin reel değerli bir fonksiyonudur.

Tanım: (Dağılım fonksiyonu) (Ω, F, P) bir olasılık uzayı ve X'de Ω üzerinde tanımlı bir rasgele değişken olsun. X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$: x \to F_X(x) = P\{w : X(w) \leq x\} = P(X \leq x)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu fonksiyon, sağdan sürekli, azalmayan olmakla birlikte $F_X(\infty)=1$ ve $F_X(-\infty)=0$ özelliğini de sağlar. Ayrıca iki boyutlu bir $\underset{\sim}{X}=(X_1, X_2)$ rasgele vektörün dağılım fonksiyonu da, $F(x_1, x_2) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\}$ şeklinde tanımlanır. Buradan da n- boyutlu bir rasgele vektörün dağılım fonksiyonu

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$$

Zaman serilerinde önemli kavramlardan biri durağanlıktır. Pratikte durağanlık dendiği zaman aşağıda bahsedilecek olan zayıf durağanlık anlaşılmaktadır. Aksi iddia edilmedikçe durağan bir zaman serisinden bahsedildiğinde de zayıf durağan zaman serisi olduğu anlaşılacaktır.

Tanım (Güçlü Durağan Zaman Serisi) $\{Y_t : t \in T\}$ bir zaman serisi olsun. (Burada T indeks kümesi doğal sayılar kümesidir.)

[7] Eğer $\forall n, h, t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ ve $t_{1+h}, t_{2+h}, \ldots, t_{n+h} \in T$ olmak üzere, $\forall x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ için

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}}(x_1, x_2, \ldots x_n) = F_{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h}}(x_1, \ldots x_n)$$

koşulu sağlanıyorsa $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisine güçlü durağan bir zaman serisi denir.

Bu tanımı basit bir notasyon ile ("$\overset{D}{=}$" aynı dağılıma sahip)

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots X_{t_n}) \overset{D}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h})$$

şeklinde kısaltabiliriz. Daha basit bir şekilde ise $\forall n, h \in T$ için.

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \overset{D}{=} (X_{1+h}, X_{2+h}, \ldots, X_{n+h})$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Bu tanımdan anlaşılmaktadır ki $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ rasgele vektörünün dağılım fonksiyonu ile herhangi bir öteleme ile elde edilen $(X_{1+h}, X_{2+h}, \ldots X_{n+h})$ rasgele vektörünün dağılım fonksiyonları aynıdır. Buradan da şu sonuçları kolayca elde edebiliriz. Eğer $n=1$, $h=1$ alınırsa $X_1 \overset{D}{=} X_2 \overset{D}{=} X_3 = \ldots \overset{D}{=} X_n$ dir. Yani $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisi aynı dağılıma sahiptir. Diğer taraftan $n=2$ $h=1$ alınırsa

$$(X_1, X_2) \overset{D}{=} (X_2, X_3) \overset{D}{=} (X_3, X_4) \overset{D}{=} \ldots \overset{D}{=} (X_k, X_{k+1})$$

olduğu da kolayca görülür. Bu özellik n ve h'nın değerleri ile genişletilebilir. Kısaca $\{X_t, t \in T\}$ güçlü durağan bir zaman serisi ise X_t ile X_{t+h} nın dağılımı t'ye değil h'ye bağlıdır.

Başka bir değişle herhangi bir gözlem kümesinin ortak dağılımı gözlemlerin yapıldığı zamanların ileriye veya geriye kaydırılması ile herhangi bir değişikliğe uğramıyor ise bu tür serilere güçlü durağandır denir.

Tanım: Durağanlık $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisi

i) $E(X_t) = c$

ii) $Cov(X_t, X_s)$ kovaryansı sadece $|t-s|$ nin bir fonksiyonudur.

yukarıdaki koşullar sağlanıyorsa zayıf durağandır.

yukarıdaki tanımda (ii) koşuluna göre $Cov(X_t, X_{t+h})$ kovaryansının sadece h'nin bir fonksiyonu olması gerekir. Bu fonksiyona $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu denir. $\gamma(h)$ ile gösterilir. Yani serinin otokovaryans fonksiyonu

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h})$$

olarak tanımlanır.