OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ

Problem

11.05.2020

1

$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ $[1, 1]^T$ başlangıç çözümünü kullanarak Newton metoduyla çözünüz

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \nabla^2 f$$

$$(\nabla^2 f)^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 1/8 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow (\nabla^2 f)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_0 - (\nabla^2 f)^{-1} \nabla f(x_0)$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_0 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ olarak $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ olur. optimal çözümdür.

$\boxed{2}$ $\quad \text{Min } f(x) = -x_1 x_2 x_3$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{A}{2}$$

$$L(x_1, x_2, x_3) = -x_1 x_2 x_3 + \lambda\left(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 - \frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -x_2 x_3 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -x_1 x_3 + \lambda(x_1 + x_3) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -x_1 x_2 + \lambda(x_2 + x_1) = 0 \quad (3)$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 - \frac{A}{2} = 0 \quad (4)$$

a) $x_1 = 0 \Rightarrow \quad x_2 x_3 = \frac{A}{2} \qquad (2)$'den $\lambda x_3 = 0$

(3)'den. $\lambda x_2 = 0$ Bu denklemler (1)'de yerine yazılırsa $-x_2 x_3 = 0$ olur. Bu durum (4) koşulunu sağlamaz ($-\frac{A}{2} = 0$ olması) Aynı şekilde ($x_2 = 0$ ve $x_3 = 0$ olamazlar)

b) $\lambda = 0$ ise $\quad x_1 x_2 = x_2 x_3 = x_3 x_1 = 0$ olur.

Buda (4)'ü sağlamaz $-\frac{A}{2} = 0$ olur.

öyle ise $x_1 \neq 0 \quad x_2 \neq 0 \quad x_3 \neq 0 \quad \lambda \neq 0$ dır.

$\boxed{3}$ öyleyse $\lambda, x_1, x_2, x_3 \neq 0$ olur.

(1) ile x_1, (2) yi x_2 ile (3) 'ü x_3 le çarparsak

ve çarpılmış halde (1) den (2) yi çıkarırsak

$$-x_1 x_2 x_3 + \lambda x_1 (x_2 + x_3) = 0$$
$$-x_1 x_2 x_3 + \lambda x_2 (x_1 + x_3) = 0$$

$$\lambda x_1 (x_2 + x_3) - \lambda x_2 (x_1 + x_3) = 0$$

$$\cancel{\lambda x_1 x_2} + \lambda x_1 x_3 - \cancel{\lambda x_1 x_2} - \lambda x_2 x_3 = 0$$

$$\lambda x_3 (x_1 - x_2) = 0 \quad \lambda \neq 0 \quad x_3 \neq 0$$

$$x_1 = x_2$$

Benzer yolla
(1) den (3) 'lü çıkarırsak

$$-x_1 x_2 x_3 + \lambda x_1 (x_2 + x_3) = 0$$

$$-x_1 x_2 x_3 + \lambda x_3 (x_2 + x_1) = 0$$

$$\lambda x_1 (x_2 + x_3) - \lambda x_3 (x_2 + x_1) = 0$$

$$\lambda x_1 x_2 + \cancel{\lambda x_1 x_3} - \lambda x_3 x_2 - \cancel{\lambda x_3 x_1} = 0$$

$$\lambda x_2 (x_1 - x_3) = 0 \quad \lambda \neq 0 \quad x_2 \neq 0$$

$$x_1 = x_3$$

$$x_1 = x_2 = x_3$$

$\boxed{4}$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - \frac{A}{2} = 0$$

$$3x_1^2 = \frac{A}{2}$$

$$x_1^2 = \frac{A}{6} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{A}{6}}$$

(1) denkleminde yerine konursa

$$-x_2x_3 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 0$$

$$-\frac{A}{6} + \lambda\left(\sqrt{\frac{A}{6}} + \frac{\sqrt{A}}{6}\right) = 0$$

$$\lambda = \frac{\frac{A}{6}}{2\sqrt{\frac{A}{6}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}}$$

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3+\lambda & -x_2+\lambda \\ -x_3+\lambda & 0 & -x_1+\lambda \\ -x_2+\lambda & -x_1+\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{A}{6}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} & -\sqrt{\frac{A}{6}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} \\ -\frac{\sqrt{A}}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} & 0 & -\sqrt{\frac{A}{6}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} \\ -\frac{\sqrt{A}}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} & -\frac{\sqrt{A}}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{5}$

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 L = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} \begin{bmatrix} h_2+h_3, & h_1+h_3, & h_1+h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}} \left[\underbrace{h_1h_2 + h_1h_3 + h_1h_2 + h_3h_2 + h_1h_3 + h_2h_3} \right]$$

? Belirsiz ilerlenebilir yönlere ihtiyacımız var.

$$\nabla g . h = 0 \qquad g: x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - \frac{A}{2} = 0$$

$$\nabla g = \begin{bmatrix} \underbrace{x_2+x_3}, & x_1+x_3 & x_1+x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{\frac{A}{6}}, & 2\sqrt{\frac{A}{6}}, & 2\sqrt{\frac{A}{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{6}$ $2\sqrt{\frac{A}{6}}\begin{bmatrix}1, & 1, & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{bmatrix}=0$

$2\sqrt{\frac{A}{6}}\neq 0 \qquad h_1+h_2+h_3=0$

$h_3=-(h_1+h_2)$

$$\nabla^2 L=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}}\Big[h_1h_2+h_1(-(h_1+h_2))+h_1h_2+h_2(-(h_1+h_2))$$
$$+h_1(-(h_1+h_2))+h_2(-(h_1+h_2))\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}}\Big[\cancel{h_1h_2}-h_1^2-\cancel{h_1h_2}+\cancel{h_1h_2}-\cancel{h_2h_1}-h_2^2$$
$$-h_1^2-h_1h_2-h_2h_1-h_2^2\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}}\Big[-2h_1^2-2h_1h_2-2h_2^2\Big]$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{6}}}_{<0}\Big[\underbrace{-h_1^2-h_2^2}_{<0}\underbrace{-(h_1+h_2)^2}_{<0}\Big]$$

$=\cdot>0$ olur.

$A\left(x_1=\sqrt{\frac{A}{6}},\ x_2=\sqrt{\frac{A}{6}},\ x_3=\sqrt{\frac{A}{6}}\right)$

noktası min nokta olur. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3$ içinde

fakat $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1x_2x_3$ için max

$\boxed{1}$ 04/05/2020

OPTIMIZASYON TEKNIKLERİ

$\min f(x) = \frac{2}{3}x_1^3 - 2x_1x_2 - 5x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 + 5$

Kritik noktalarını bulunuz Min, maksimum ve eğer noktaları olarak sınıflandırın.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1^2 - 2x_2 - 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2x_2 = 2x_1^2 - 5$

$-2x_1 + 4x_2 + 4 = 0$ yerine konursa

$-2x_1 + 4x_1^2 - 10 + 4 = 0$

$4x_1^2 - 2x_1 - 6 = 0$

$2x_1^2 - x_1 - 3 = 0$

$(2x_1 - 3)(x_1 + 1) = 0$

$\boxed{x_1 = 3/2}$ $\boxed{x_1 = -1}$

$2x_2 = 2x_1^2 - 5$ de yerine konursa

$2x_2 = 2\frac{9}{4} - 5 \Rightarrow 2x_2 = \frac{9}{2} - 5 \quad x_2 = \frac{\frac{9}{4} - \frac{5}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

$2x_2 = 2(-1)^2 - 5 \Rightarrow 2x_2 = -3 \quad x_2 = -3/2$

$A(3/2, -1/4) \quad B = (-1, -3/2)$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \nabla^2 f(A) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 6$

$\Delta_2 = 20$

$\nabla^2 f(A)$ pozitif definit A noktası Minimum noktasıdır

$\boxed{2}$

$$\nabla^2 f(B) = \begin{bmatrix} 4x_1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 = -4 \\ \Delta_2 = +12 \end{matrix} \quad \text{İndefinit}$$

$(-1, -3/2)$ Eğer noktasıdır.

Örnek $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + y$

Başlangıç noktasını $[0,0]^T$ alarak En hızlı düşüş algoritmasıyla 2 aşama giderek f fonksiyonunu minimize ediniz.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_{i+1} = x_i - \alpha g_i$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x - 2y - 2 \\ -2x + 4y + 1 \end{bmatrix} \quad \nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = g_0 \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{g_0 g_0'}{g_0 Q g_0'} = \frac{[-2, 1]\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}{[-2, 1]\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{5}{[-14, 8]\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{5}{36}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha_0 g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha_0 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{5}{36}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} \\ -\frac{5}{36} \end{bmatrix} \quad g_1 = \nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} \frac{30}{18} + \frac{10}{36} - 2 \\ -\frac{10}{18} - \frac{20}{36} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/18 \\ -1/9 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{[-1/18, -1/9]\begin{bmatrix} -1/18 \\ -1/9 \end{bmatrix}}{[-1/18, -1/9]\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/18 \\ -1/9 \end{bmatrix}} = \frac{\left[\frac{1}{324} + \frac{1}{81}\right]}{\left[-\frac{6}{18} + \frac{2}{9}, \frac{2}{18} - \frac{4}{9}\right]\begin{bmatrix} -1/18 \\ -\frac{1}{9} \end{bmatrix}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\left[\frac{5}{324}\right]}{\left[-\frac{1}{9}, -\frac{3}{9}\right]\begin{bmatrix} -1/18 \\ -1/9 \end{bmatrix}} = \frac{\frac{5}{324}}{\left[\frac{1}{162} + \frac{3}{81}\right]} = \frac{5/324}{7/162} = \frac{5}{324} \cdot \frac{162}{7} = 5/14$$

$\boxed{3}$ $x_2 = x_1 - \alpha_1 g_1 = \begin{bmatrix} 5/18 \\ \frac{-5}{36} \end{bmatrix} - \frac{5}{14} \begin{bmatrix} -1/18 \\ -1/9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{5}{18} + \frac{5}{18.14} \\ \frac{-5}{36} + \frac{5}{14.9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{75}{18.14} \\ \frac{-50}{14.36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{84} \\ \frac{-25}{252} \end{bmatrix}$

14 4

Problem $\mathrm{Min} f(x,y) = 3x^2 + \frac{3y^2}{2} - 3x - 3y$

a) Analitik olarak

b) Eşlenik yön algoritmasıyla $x_0 = [0,0]^T$ alarak hesaplayın.

a) $\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6x-3 \\ \frac{6y}{2}-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x = 1/2$ $y = 1$

$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = 6 > 0$ $\Delta_2 = 18 > 0$

o halde $x = 1/2$ $y = 1$ noktası Min. noktadır.

b) $\alpha_0 = -\frac{g_0 d_0^T}{d_0 Q d_0'} \Rightarrow g_0 = \nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ $d_0 = -g_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\alpha_0 = -\frac{[-3,-3]\begin{bmatrix} +3 \\ +3 \end{bmatrix}}{[+3,+3]\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +3 \\ +3 \end{bmatrix}} = \frac{18}{[18,9]\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}} = \frac{18}{54+27} = \frac{2}{9}$

$x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

$g_1 = \nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} 6x-3 \\ 3y-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\boxed{4}$ $$\beta_1 = \frac{g_1 Q d_0}{d_0 Q d_0'} = \frac{[1,-1]\begin{bmatrix}6&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}}{[3,3]\begin{bmatrix}6&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}}$$

$$= \frac{[6,-3]\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}}{[18,9]\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}} = \frac{18-9}{54+27} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

$$d_1 = -g_1 + \beta_0 d_0 = -\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/3\\1/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2/3\\4/3\end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = -\frac{g_1 . d_1^T}{d_1 Q d_1^T} = \frac{-[1,-1]\begin{bmatrix}-2/3\\4/3\end{bmatrix}}{\left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]\begin{bmatrix}6&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/3\\4/3\end{bmatrix}} = \frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}{[-4,4]\begin{bmatrix}-2/3\\4/3\end{bmatrix}}$$

$$= \frac{2}{\left[8/3 + \frac{16}{3}\right]} = \frac{2}{8} = 1/4$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 = \begin{bmatrix}2/3\\2/3\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2/3\\4/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\\\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x_2) = g_2 = \begin{bmatrix}6x-3\\3y-3\end{bmatrix}_{\substack{x=\frac{1}{2}\\y=1}} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$ elde edilir

O halde $\begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}$ optimumdur.

$\boxed{5}$ $\quad Min f(x) = x_1^2 + x_2^2$

$$x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \Rightarrow g(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1$$

$$L = f(x) + \lambda g(x)$$

$$L = x_1^2 + x_2^2 + \lambda (x_1^2 + 2x_2^2 - 1)$$

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda x_1 = 0$ $\qquad$ (1) $2x_1(1+\lambda) = 0$

a) $x_1 = 0 \vee \lambda = -1$ (b)

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 4\lambda x_2 = 0$

(3) $x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$

$x_1 = 0 \Rightarrow$ (2) $2x_2^2 - 1 = 0$ $\quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2)den $2x_2(1+2\lambda) = 0$ $\quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ konsada $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ konsada

$\lambda = -1/2$ elde edilir.

ohalde $A(x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \lambda = -1/2)$

$B(x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \lambda = -1/2)$

$\lambda = -1$ ise (1) kısıtı sağlanır. (2) den

$2x_2 - 4x_2 = 0$ $\quad -2x_2 = 0$ $\quad x_2 = 0$ olur. (3) de

yerine konursa $x_1^2 + 2 \cdot 0^2 - 1 = 0$ $\quad x_1 = 1$ $\quad x_1 = -1$

elde edilir.

$\boxed{6}$ $C(x_1=1,\ x_2=0,\ \lambda=-1)$ $D(x_1=-1\ x_2=0\ \lambda=-1)$

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2+4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Delta^2 L(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Delta^2(B) \qquad \begin{matrix} \Delta_1 = 1 > 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{matrix}$$

pozitif semi definit A ve B noktaları minimum noktalardır.

$$[h_1\ h_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [h_1,\ 0]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = h_1^2 > 0$$

$$\Delta^2 L(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \Delta^2(D)$$

$$[h_1,\ h_2]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [0,\ -2h_2]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -2h_2^2 < 0$$

negatif definit C, ve D noktaları maksimum noktalardır.

$\boxed{7}$ problem

$$\max f = 5-(x_1-2)^2-2(x_2-1)^2$$

$$x_1+4x_2-3=0$$

$$L = f + \lambda(x_1+4x_2-3)$$ Zira Maxf olduğundan minimuma çevirmeliyiz

$$L = -f + \lambda(x_1+4x_2-3)$$

$$L = (x_1-2)^2+2(x_2-1)^2-5+\lambda(x_1+4x_2-3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1-2)+\lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4(x_2-1)+4\lambda = 0 \quad (2)$$

$$x_1+4x_2-3=0 \quad (3)$$

(1) ve (2)'den λ ları yok edelim.

$$2x_1-4+\lambda=0 \quad (-4) \text{ ile çarp.}$$
$$4x_2-4+4\lambda=0$$

$$-8x_1+16-\cancel{4\lambda}=0$$
$$4x_2-4+\cancel{4\lambda}=0$$
$$\overline{-8x_1+4x_2+12=0}$$

$$-2x_1+x_2+3=0 \text{ elde edilir.}$$

2 ile çarp. $x_1+4x_2-3=0$ (3)'den.

$$-2x_1+x_2+3=0$$
$$2x_1+8x_2-6=0$$

$$9x_2-3=0$$
$$\boxed{x_2=1/3}$$

$\boxed{8}$ $-2x_1+x_2+3=0$ $x_2=1/3$ konursa

$\cancel{-2/3+x_2+3=0}$ $-2x_1+\frac{1}{3}+\frac{9}{3}=0$

$\cancel{x_2=-3+\frac{2}{3}=-7/3}$ $-2x_1=-10/3$

$\boxed{x_1=+5/3}$

(1) denkleminde $x_1=5/3$ konursa
$2(5/3-2)+\lambda=0$ $\lambda=2/3$ elde edilir.

$A\left(x_1=5/3,\ x_2=1/3\ \lambda=2/3\right)$

$$\nabla^2 L=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$\Delta_1=2$ $\Delta_2=8$ pozitif definit $A(-f)$'in minimum olup ancak A f'in maksimumu olur.

OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ

27/04/2020

$\boxed{1}$

$$\max f(x) = x_1^4 - 5x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

$$x_1 - 6x_2 = 7 \Rightarrow x_1 - 6x_2 - 7 = 0$$

$$5x_1 + 5x_3 \geq 6 \Rightarrow -5x_1 - 5x_3 + 6 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

Sadece gerekli koşulları yazınız

$$\min f(x) = -x_1^4 + 5x_1x_2 - 3x_2^2 + 3x_1 - 5x_2 - 2x_3$$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu) = -x_1^4 + 5x_1x_2 - 3x_2^2 + 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + \lambda(x_1 - 6x_2 - 7) + \mu(-5x_1 - 5x_3 + 6)$$

(1) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -4x_1^3 + 5x_2 + 3 + \lambda - 5\mu \geq 0$

(2) $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 5x_1 - 6x_2 - 5 - 6\lambda = 0$

(3) $\frac{\partial L}{\partial x_3} = -2 - 5\mu \geq 0$

(4) $x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(-4x_1^3 + 5x_2 + 3 + \lambda - 5\mu) = 0$

(5) $x_3 \frac{\partial L}{\partial x_3} = x_3(-2 - 5\mu) = 0$

(6) $\mu \geq 0$

(7) $x_1 - 6x_2 - 7 = 0$

(8) $\mu(-5x_1 - 5x_3 + 6) = 0$

(9) $x_1, x_3 \geq 0$

$\boxed{2}$ $\min f(x) = (x-4)^2 + (y-4)^2$

$x + y = 4$

$x + 3y \leq 9$

$x \geq 0 \quad y \in \mathbb{R}$

kritik noktalarını bulunuz

$$L(x, y, \lambda, \mu) = (x-4)^2 + (y-4)^2 + \lambda(x+y-4) + \mu(x+3y-9)$$

$(1)\ \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-4) + \lambda + \mu \geq 0$

$(2)\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-4) + \lambda + 3\mu = 0$

$(3)\ x\frac{\partial L}{\partial x} = x\left[2(x-4) + \lambda + \mu\right] = 0$

$(4)\quad x + y - 4 = 0$

$(5)\quad x + 3y - 9 \leq 0$

$(6)\quad \mu(x+3y-9) = 0$

$(7)\quad \mu \geq 0 \quad x \geq 0$

Çözüm

a) $x = 0 \quad y = 0$ $\quad$ (4) sağlanmaz $\quad -4 \neq 0$

b) $x = 0 \quad y \neq 0 \quad y = 4$ $\quad$ (4) dancü denklem

(5) sağlanmaz $\quad (x + 3y - 9 \leq 0)$

c) $x \neq 0 \quad y = 0 \quad 2x - 8 + \lambda + \mu = 0 \quad x = 4$ olur.

$\lambda + \mu = 0$ olur. $\lambda + 3\mu = 8 \quad \mu = -\lambda$ konursa $2\mu = 8$

$\mu = 4$ olur. $(x = 4, y = 0 \quad \lambda = -4 \quad \mu = 4)$

$\boxed{3}$

d) $x \neq 0 \quad y \neq 0$

$2x-8+\lambda+\mu=0$

$x+y=4$

$2y-8+\lambda+3\mu=0$

a) $\mu \neq 0 \quad x+3y-9=0 \quad x+3y=9$

$x+y=4$

$2y=5$

$\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$ ✓ $\quad \boxed{y=5/2}$

$x+5/2=4$

$\lambda+3\mu=3$ $\quad x=4-5/2$

$\lambda+\mu=5$ $\quad \boxed{x=3/2}$

$2\mu=-2$

$\boxed{\mu=-1} \rightarrow$ (7) sağlanmaz

b) $\mu=0 \quad x+y-4=0$

$\left.\begin{array}{l} 2y-8+\lambda=0 \\ 2x-8+\lambda=0 \end{array}\right\}$

$(x=2, y=2, \lambda=4, \mu=0)$

$2y-2x=0 \quad \boxed{y=x}$

$2x-4=0 \quad x=2 \quad y=2$

$\lambda=4$

4.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h_1 & 2h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2h_1^2 + 2h_2^2$$

$A\ (x=4,\ y=0\ \ \lambda=-4\ \ \ell=4) \Rightarrow f(x,y)\big|_{x=4\ y=0} = 16$

$B\ (x=2,\ y=2\ \ \lambda=4,\ \ell=0) \Rightarrow f(x,y)\big|_{x=2,\ y=2} = 8$

Problem

$f(x,y) = -6x^2 + (2a+4)xy - y^2 + 4ay$ a'nın hangi değerleri için konveks yada konkav olur?

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12x + (2a+4)y \\ (2a+4)x - 2y + 4a \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 2a+4 \\ 2a+4 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = -12 \qquad \Delta_2 = 24 - (2a+4)^2 = 0 \qquad 2a+4 = \sqrt{24}$

$2a+4 = 2\sqrt{6} \qquad 2a+4 = -2\sqrt{6}$

$a = \sqrt{6} - 2 \qquad a = -\sqrt{6} - 2$

		$-2-\sqrt{6}$		$\sqrt{6}-2$	
Δ_2	$+$	0	$-$	0	$+$

$a < -2-\sqrt{6}$ ve $a > \sqrt{6}-2$ konkav

[1] 20/04/2020

OPTIMIZASYON TEKNIKLERI

EŞITLIK, EŞITSIZLIK VE ÖZEL KISITLAR ALTINDA OPTIMIZASYON

ÖRNEK

$$\text{Min } f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 14x_2$$

$$g_1(x_1,x_2,x_3): x_1+x_2+x_3-2=0$$

$$g_2(x_1,x_2,x_3): -x_1+2x_2-3 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

problemini çözelim. Önce LAGRANGE FONKSIYONUNU oluşturalım.

$$L(x_1,x_2,x_3,\lambda,\mu) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 14x_2 + \lambda(x_1+x_2+x_3-2) + \mu(-x_1+2x_2-3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1+x_2-6+\lambda-\mu \geq 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1+4x_2-14+\lambda+2\mu \geq 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \lambda \geq 0 \quad (3)$$

$$x_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2x_1+x_2-6+\lambda-\mu)=0 \quad (4)$$

$$x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(x_1+4x_2-14+\lambda+2\mu)=0 \quad (5)$$

$$x_3 \cdot \frac{\partial L}{\partial x_3} = x_3 \cdot \lambda = 0 \quad (6)$$

$$\mu(-x_1+2x_2-3)=0 \quad (7)$$

$$x_1+x_2+x_3-2=0 \quad (8)$$

$$-x_1+2x_2-3 \leq 0 \quad (9)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (10)$$

$\boxed{2}$

a) $x_1=0$ $x_2=0$ $x_3=0$ olduğunda (8) kısıtı sağlanmaz $(-2=0)$

b) $x_1=0$ $x_2=0$ $x_3\neq 0$ olduğunda $x_3\neq 0$ olduğundan (6) nolu denklemden $\lambda=0$ elde edilir. (8) nolu denklemden $x_3=2$ bulunur. (7) nolu denklemden $\mu=0$ bulunur. bu durumda (1) nolu kısıt $2x_1+x_2-6+\lambda-\mu\geq 0$ $-6\geq 0$ durumuna geleceğinden (1) nolu kısıt sağlanmaz

c) $x_1=0$ $x_2\neq 0$ $x_3=0$ $(-x_1+2x_2-\underset{\Updownarrow}{3}\leq 0)$ sağlanmaz

(8) den $x_2=2$ elde edilir. bunlar (9) nolu denkleme konursa $4-3\leq 0$ olur sağlanmaz.

d) $x_1=0$ $x_2\neq 0$ $x_3\neq 0$ (5) nolu kısıttan $x_1+4x_2-14+\lambda+2\mu=0$ olur. (6) nolu kısıttan $\lambda=0$ olur. Bu durumda (5) nolu kısıt $4x_2-14+2\mu=0$ gelir. (7) nolu kısıt $\mu(2x_2-3)=0$ durumuna gelir. Bu durumda $\mu(2x_2-3)=0 \Rightarrow \mu=0$ veya $2x_2-3=0$

i) $\mu=0$ ise. $4x_2-14=0$ $x_2=7/2$ (8) nolu denklemden

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{x_1}+\underset{\substack{\downarrow\\7/2}}{x_2}+x_3-2=0 \qquad x_3+\frac{7}{2}-2=0 \qquad x_3=-3/2$$

olur ki (10) nolu kısıtlara aykırı olur.

ii) $\mu\neq 0$ ise $2x_2-3=0$ $x_2=3/2$ olur. (8) nolu denklemden de $x_3=1/2$ elde edilir. $4x_2-14+2\mu=0$ $x_2=3/2$ $\mu=4$ olur. (1) nolu kısıta bu bilinenler konursa yani

$$2\underset{\substack{\downarrow\\0}}{x_1}+\underset{\substack{\downarrow\\3/2}}{x_2}-6+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\lambda}-\underset{\substack{\downarrow\\4}}{\mu}\geq 0 \qquad 3/2-6-4\geq 0$$

olamaz.

3 e) $x_1 \neq 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 \neq 0$

$2x_1 + x_2 - 6 + \lambda - \mu = 0$

$\lambda = 0$

$2x_1 + x_2 - 6 - \mu = 0$ elde edilir. $x_2 = 0$ olduğundan

$2x_1 - 6 - \mu = 0$ olur.

(7) kısıtından $\mu(-x_1 + 2x_2 - 3) = 0$.

i) $\mu = 0 \Rightarrow \quad 2x_1 - 6 = 0 \quad x_1 = 3$

(8) kısıtı $x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$ $\quad x_1 = 3 \; x_2 = 0$ konursa $x_3 = -1$ elde edilir

(10) kısıtına aykırıdır.

ii) $\mu \neq 0 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 - 3 = 0$ $\quad x_2 = 0$ olduğundan

$x_1 = -3$ olur. (10) kısıtına aykırı

f) $x_1 \neq 0 \quad x_2 \neq 0 \quad x_3 = 0$

$2x_1 + x_2 - 6 + \lambda - \mu = 0$

$x_1 + 4x_2 - 14 + \lambda + 2\mu = 0$

$\mu(-x_1 + 2x_2 - 3) = 0$

i) $\mu = 0$ $\quad 2x_1 + x_2 - 6 + \lambda = 0$ $\quad$ Taraf tarafa çıkarılırsa

$x_1 + 4x_2 - 14 + \lambda = 0$

$x_1 - 3x_2 + 8 = 0$

(8) kısıtı

$x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$

$x_3 = 0$ olduğundan.

$\boxed{4}$ $x_1 - 3x_2 + 8 = 0$
$x_1 + x_2 - 2 = 0$ Taraf tarafa çıkarılırsa

$-4x_2 + 10 = 0 \quad x_2 = 5/2 \quad x_1 + \frac{5}{2} - 2 = 0$

$x_1 = -1/2$ elde edilir (10) kısıtına aykırıdır.

ii) $\mu \neq 0 \quad -x_1 + 2x_2 - 3 = 0$ (8) denklemden $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

idi $x_3 = 0$ $\quad x_1 + x_2 = 2$
$-x_1 + 2x_2 = 3$ çözülürse $3x_2 = 5 \quad x_2 = 5/3$

$5/3 + x_1 = 2$

$x_1 = 2 - \frac{5}{3} \quad x_1 = 1/3$

$2x_1 + x_2 - 6 + \lambda - \mu = 0 \qquad x_1 \neq 0$

$x_1 + 4x_2 - 14 + \lambda + 2\mu = 0 \qquad x_2 \neq 0$

buralarda $x_1 = 1/3 \quad x_2 = 5/3$ konursa

$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} - 6 + \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 6 - 7/3 = 11/3$

$1/3 + \frac{20}{3} - 14 + \lambda + 2\mu = 0 \qquad \lambda + 2\mu = 14 - \frac{21}{3} = 7$

$-3\mu = \frac{11}{3} - 7 = -\frac{10}{3} \qquad \mu = 10/9 \qquad \lambda - \frac{10}{9} = 11/3$

$\boxed{\lambda = 43/9}$

($x_1 = 1/3 \quad x_2 = 5/3 \quad x_3 = 0 \quad \lambda = 43/9 \quad \mu = 10/9$) bulunur.

$\boxed{5}$ h) $x_1 \neq 0 \quad x_2 \neq 0 \quad x_3 \neq 0$

$$2x_1 + x_2 - 6 + \lambda - \mu = 0$$

$$x_1 + 4x_2 - 14 + \lambda + 2\mu = 0$$

$$\cdot \lambda = 0$$

$$2x_1 + x_2 - 6 - \mu = 0$$

$$x_1 + 4x_2 - 14 + 2\mu = 0$$

$$\mu(-x_1 + 2x_2 - 3) = 0 \Rightarrow \text{i) } \mu \neq 0 \qquad -x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$

$$\cancel{x_1 + x_2 + x_3 = 2}$$

$$\cancel{3x_2 + x_3 = 5}$$

$$\cancel{x_3 = 5 - 3x_2}$$

$$2x_1 + x_2 - \mu = 6$$

$$x_1 + 4x_2 + 2\mu = 14$$

$$-x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$

3 bilinmeyen 3 denklem.

$$4x_1 + 2x_2 - 2\cancel{\mu} = 12$$

$$x_1 + 4x_2 + 2\cancel{\mu} = 14$$

$$5x_1 + 6x_2 = 26$$

$$5/\ -x_1 + 2x_2 = 3$$

$$5x_1 + 6x_2 = 26$$

$$-5x_1 + 10x_2 = 15$$

$$16x_2 = 41$$

$$\boxed{x_2 = 41/16}$$

$$-x_1 + \frac{41}{8} = 3$$

$$-x_1 = 3 - \frac{41}{8}$$

$$-x_1 = \frac{24 - 41}{8}$$

$$-x_1 = \frac{-17}{8}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$\frac{17}{8} + 41/16 + x_3 = 2$$ Sağlamaz. $\boxed{x_1 = 17/8}$

$\boxed{6}$ ii) $\mu=0$ ise

$2x_1+x_2=6$

$-2/\ x_1+4x_2=14$

$2x_1+x_2=6$

$-2x_1-8x_2=-28$

$-7x_2=-22$

$\boxed{x_2=22/7}$

$x_1+\frac{88}{7}=14$

$x_1=14-\frac{88}{7}$

$x_1=\frac{98-88}{7}$

$\boxed{x_1=\frac{10}{7}}$

$x_1+x_2+x_3=2$

$x_3+\frac{22}{7}+\frac{10}{7}=2$

$x_3=2-\frac{22}{7}-\frac{10}{7}$

$x_3=\frac{14-32}{7}<0$ sağlanmaz

$$H(x^*)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g(x^*)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$h_1+h_2+h_3=0$

$-h_1+2h_2=0$

$3h_2+h_3=0$

$h_3=-3h_2$

$\boxed{7}$ $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$

$h_1 + h_2 + h_3 = 0$

$-h_1 + 2h_2 = 0$

$h_1 = 2h_2$

$h_3 = -3h_2$

$h = \begin{bmatrix} 2h_2 \\ h_2 \\ -3h_2 \end{bmatrix}$

$h' M(x^*) h = [2h_2 \quad h_2, \ -3h_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2h_2 \\ h_2 \\ -3h_2 \end{bmatrix}$

$= 8h_2^2 + 4h_2^2 + 2h_2^2 + 2h_2^2 = 16h_2^2 > 0$

pozitif definit ohalde

$(x_1 = 1/3 \quad x_2 = 5/3, \ x_3 = 0 \quad \lambda = 43/9 \quad \mu = 10/9)$

Min noktadır.

1

OPTIMIZASYON TEKNİKLERİ

13 Nisan 2020

Eşitlik ve Eşitsizlik kısıtları altında Optimizasyon

$\mathbb{R}^n$ de $\text{Min} f(x)$

$$g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$$g_j(x) \leq 0 \quad j = k+1, \dots, N$$

problemini çözmek istiyoruz.

$x^* \in \mathbb{R}^n$ $\text{Min} f(x)$ $g_i(x) = 0$ $(i = 1, \dots, k)$ $g_j(x) \leq 0$ $j = k+1, \dots, N$

1ci mertebe koşullar

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=k+1}^{N} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0 \quad j = k+1, \dots, N$$

eşitliklerini sağlayan $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ve $\mu_{k+1} \geq 0$ $\mu_{k+2} \geq 0$ $\dots$ $\mu_N \geq 0$ sayıları vardır. Ayrıca $g_j(x^*) \leq 0$ $j = k+1, \dots, N$ eşitsizlikleri sağlanmalıdır.

2ci Mertebe koşullar.

$$M(x^*) = \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda \nabla^2 g_i(x^*) + \sum_{j=k+1}^{N} \mu_j \nabla^2 g_j(x^*)$$

Matrisi $H(x^*) = \{ h \mid \nabla g_i(x^*) h = 0 \, , \nabla g_j(x^*) h = 0 \;\; j \in J(x^*) \}$ ilerlenebilir yönler kümesi üzerinde pozitif definit olmalıdır.

$\boxed{2}$ max f(x) ⟺ Min (−f(x)) alınarak teori maksimizasyon olarakta düşünülebilir.

örnek

$$Min f(x) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2$$

$$x_2 - x_1 = 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$g_1(x): x_2 - x_1 - 1 = 0$$

$$g_2(x): x_1 + x_2 - 2 \leq 0$$

$$L(x, \lambda, \mu) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + \lambda(x_2 - x_1 - 1) + \mu(x_1 + x_2 - 2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1-1) - \lambda + \mu = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2-2) + \lambda + \mu = 0 \quad (2)$$

$$x_2 - x_1 - 1 = 0 \quad (3)$$

$$\mu(x_1 + x_2 - 2) = 0 \quad (4)$$

a) $\mu = 0 \Rightarrow$

$$2(x_1-1) - \lambda = 0 \quad (1')$$

$$2(x_2-2) + \lambda = 0 \quad (2')$$

$$x_2 - x_1 - 1 = 0 \quad (3')$$

ilk iki denklem toplanırsa $2x_1 - 2 + 2x_2 - 4 = 0$

$2x_1 + 2x_2 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$ elde edilir. Bu çözüm ile 3'cü denklemi ile ortak çözülürse

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 - x_1 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow 2x_2 = 4 \quad \boxed{x_2 = 2 \quad x_1 = 1}$$ elde edilir

3 Ancak bu çözüm problemin ancak kısıtlarından $x_1+x_2-2 \leq 0$ sağlamıyor. $(3-2=1>0)$

b) $\mu \neq 0 \Rightarrow$ 4 denklemlerinden

$x_1+x_2-2=0$ olur.

diğer kısıtlarda ilave edilirse

$$2(x_1-1)-\lambda+\mu=0$$

$$2(x_2-2)+\lambda+\mu=0$$

$$x_2-x_1-1=0$$

$$\cancel{x_1+x_2-2=0}$$

$$2x_1-\lambda+\mu=2 \quad (1'')$$

$$2x_2+\lambda+\mu=4 \quad (2'')$$ sistemi elde edilir

$$x_2-x_1=1 \quad (3'')$$

$$x_1+x_2=2 \quad (4'')$$

3'' ve 4''den $2x_2=3$ $x_2=3/2$ $x_1=1/2$ elde edilir. bunlar 1'' ve 2'' ye konursa

$$\begin{aligned} 1-\lambda+\mu&=2 \\ 3+\lambda+\mu&=4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -\lambda+\mu&=1 \\ \lambda+\mu&=1 \end{aligned} \Rightarrow \mu=1 \quad \lambda=0$$

elde edilir. Bu durumda $x_1+x_2 \leq 2$ kısıtı $x_1=1/2$ $x_2=3/2$ konduğunda eşitlik halinde sağlanır. Buna etken kısıt denir.

$$M=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ Hessian matrisi elde edilir.

[4] Hiç bu matris x_1 ve x_2'ye bağlı olmadığından. ilerlenebilir yöne bakmaya gerek yoktur.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 4 \end{array}$$

pozitif definit olup $x_1 = 1/2, x_2 = 3/2, \lambda = 0, \mu = 1$

çözümü minimum çözümdür.

<u>Özel kısıtlar altında optimizasyon</u>

$$\min f(x)$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

problemini çözmek istiyoruz.

$g_i(x) : -x_i \leq 0$ düzenlemesi ile problem

Amaç: $\min f(x)$, $g_i(x) \leq 0$

eşitsizlikleri altında

$$L(x, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i(x)$$

Lagrange fonksiyonunu oluşturalım.

1ci mertebe koşullar

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \mu_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \qquad g_i(x) = -x_i$$

$$\frac{\partial(-x_i)}{\partial x_i} = -1$$

$$\mu_i g_i(x) = -\mu_i x_i = 0 \Rightarrow \mu_i x_i = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \mu_i \qquad \mu_i \geq 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0$$

$\boxed{5}$ Sonuç olarak 1ci mertebe koşullar

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0 \qquad x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \qquad x_1 \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$x_i \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ n denklem n bilinmeyen

2ci mertebe koşullar.

$$\nabla L = \nabla f(x) - \mu_i I \qquad I = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f(x)$$

$\nabla^2 L(x^*, \mu) = \nabla^2 f(x^*) = H(x^*)$ Hessian Matrisi özel kısıtlar altında pozitif definit olmalıdır.

<u>Örnek</u> $\min f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 4z$

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad z \geq 0$$

1ci mertebe koşullar

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y + 2z - 2 \geq 0$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2x \geq 0$

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2x - 4 \geq 0$

$\boxed{6}$ (4) $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = x(4x-2y+2z-2)=0$

(5) $y \frac{\partial f}{\partial y} = y(6y-2x)=0$

(6) $z \frac{\partial f}{\partial z} = z(2z+2x-4)=0$

(7) $x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0$

a) $x=0 \quad y=0 \quad z=0$ olduğunda 1ci koşul sağlanmaz ($-2 \geq 0$ olamaz çünkü)

b) $x=0 \quad y=0 \quad z \neq 0$

$z \neq 0 \Rightarrow \quad 2x+2z-4=0 \quad x=0$ olduğu için

$z=2$ yani $(x=0,\ y=0,\ z=2)$ elde edilir. Tüm koşullar sağlandığı için

$x=0,\ y=0 \quad z=2$ çözümdür.

c) $x=0 \quad y \neq 0 \quad z=0$

$y \neq 0 \quad 6y-2x=0 \quad x=3y \quad x=0$ olduğundan $y=0$ olur. buda çelişkidir.

d) $x \neq 0 \quad y=0 \quad z=0$

$4x-2y+2z-2=0 \quad y=0 \quad z=0 \quad x=1/2$ elde edilir. 2 koşul sağlanmaz. zira $6y-2x \geq 0$ idi $\quad -2\,1/2 > 0$ olur. çelişki

e) $x=0 \quad y \neq 0 \quad z \neq 0$

$\boxed{7}$ $y \neq 0$ $6y-2x=0$ $x=0$ (e şıkkı) için $y=0$ olur çelişki

f) $x \neq 0$ $y=0$ $z \neq 0$ $4x-2y+2z-2=0$
$2z+2x-4=0$

elde edilir $y=0$ olduğu için. $4x+2z=2$
$2x+2z=4$

sistemi çözülür ise $2x=-2$ $x=-1$ elde edilir ki sistemin (7) denklemine aykırıdır.

g) $x \neq 0$ $y \neq 0$ $z=0$

$4x-2y+2z-2=0$ $\Rightarrow$ $4x-2y=2$
$6y-2x=0$ $\quad$ $-2x+6y=0$

$2x-y=1$
$-2x+6y=0$ $\quad$ $5y=1$ $y=1/5$ $\quad$ $2x=1+1/5$
$2x=6/5$
$x=3/5$

$\frac{\partial f}{\partial z}=2z+2x-4 \geq 0$ idi.

$z=0$ olduğundan $2x-4 \geq 0$ $x=3/5$ konduğunda $6/5-4 \geq 0$ olamaz.

dolayısıyla buda çözüm değil.

h) $x \neq 0$ $y \neq 0$ $z \neq 0$
$4x-2y+2z=2$ $\quad$ $10y+2z=2$
$6y-2x=0$ $\quad$ $x=3y$ $\quad$ $6y+2z=4$
$2z+2x=4$ $\quad$ $x=-3/2$ $\quad$ $4y=-2$ $y=-1/2$
(7) kısıtları sağlanmaz

$\boxed{8}$ 2. mertebe koşul

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 4 > 0$

$\Delta_2 = 20 > 0$

$\Delta_3 = 16 > 0$

$(0, 0, 2)$ çözümü MINIMUM çözümdür.

06. 04. 2020

OPTIMIZASYON TEKNIKLERİ

Eşitlik kısıtları altında optimizasyon

$\mathbb{R}^n$de $f(x)$ ve $g_i(x)$; $(i=1,\ldots,k)$ birinci mertebeden sürekli türevlere sahip bir fonksiyon olsun. $f(x)$'in $g_i(x)=0$ $i=1,\ldots,k<n$ kısıtları altında x^* gibi bir minimum çözümü varsa $\{\nabla g_i(x^*);\ i=1,\ldots,k\}$ lineer bağımsız bir küme olmak üzere

$$g_i(x^*)=0 \qquad i=1,\ldots,k \qquad (1)$$

$$\nabla f(x^*)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \nabla g_i(x^*)=0 \qquad (2)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada λ_i $(i=1,\ldots,k)$ lere lagrange çarpanları denir.

(1) yapısındaki kısıtlar her bir eşitlik için k tanedir.

(2) yapısındaki denklem n tane değişken olduğu için n tanedir. Toplam $n+k$ tane eşitlik. $n+k$ tane de değişken olacaktır.

<u>ispat</u> $\left.\begin{array}{l}\min f(x)\\ g_i(x)=0;\ i=1,\ldots,k<n\end{array}\right\}$ problemini çözmek istiyoruz

kısıt sayısı değişken sayısından küçük olmalı Büyükse kısıtlar ya lineer bağımlıdır. kısıtlar elenir yada uygun bölge oluşmaz yani çözümden bahsedilmez.

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x)$$ fonksiyonunu kuralım.

bu fonksiyona Lagrange fonksiyonu denir

$L(x^*,\lambda)=f(x^*)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \underbrace{g_i(x^*)}_{0}$ $\quad L(x^*,\lambda)=f(x^*)$ olacak

$\boxed{2}$ ve L ile f aynı minimum değerlere sahip olacaktır.

L'nin minimum noktasını bulmak istersek

$$\nabla L(x,\lambda) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x)$$

$$\nabla L(x^*,\lambda) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

L ile f arasında; L'yi min yapan değeri bulduğumuzda f'i minimum yapan değeri bulmuş oluruz.

Bu Lagrange çarpanları λ_i $(i=1,..,k)$ Lineer programlamada simpleks çarpanlarına karşılık gelmektedir.

2. Mertebe koşulları.

$\{\nabla g_i(x^*)\ ;\ i=1,\dots,k\}$ lineer bağımsız bir küme

$$H(x^*) = \{ h \mid \nabla g_i(x^*) h = 0\ ;\ i=1,..,k\quad h \in \mathbb{R}^n \}$$

x^* dan ilerlenebilir yönler kümesi olmak üzere $\nabla^2 f(x^*)$ Hessian matrisi $H(x^*)$ üzerinden pozitif definit olmalıdır. Yani $\forall h \in H(x^*)$ için

$$h' \nabla^2 f(x^*) h \geq 0 \text{ olmalıdır.}$$

ÖRNEK:

$\text{Min} f(x) = x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_1x_3$ fonksiyonunu

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$ kısıtı üzerinde optimize ediniz.

Kısıt $g(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

Lagrange fonksiyonu

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

$$L(x,\lambda) = x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_1x_3 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3)$$

$\boxed{3}$ Birinci mertebe koşullar

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 3x_3 + \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_3 + \lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_2 + 3x_1 + \lambda = 0 \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \quad (4)$$

(1)-(2) $\quad x_2 - x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = x_1$

(4) de yerine konursa $\quad x_1 = 3/2$

(2) - (3) çıkarılırsa $\quad -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$

$x_3 = x_1 + x_2$ (4) de yerine konursa

$2x_3 - 3 = 0 \quad x_3 = 3/2$ elde edilir.

(4) de $x_1 = 3/2 \quad x_3 = 3/2$ konduğunda $x_2 = 0$

elde edilir. bu değerleri λ'lı denklemlerin

herhangi birinde koyarsa $\lambda = -9/2$ bulunur.

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 + 3x_3 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 2x_3 \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_2 + 3x_1$

2ci mertebe koşul.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hessian Matris x'lere bağlı çıkmadığı için.

ilerlenebilir yönü kullanmak durumundayız

$\boxed{4}$ $H(x^*) = \{ h \mid \nabla g(x^*) h = 0 \}$

$$\nabla g(x) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3}\right] = [1, 1, 1]$$

$$\nabla g(x^*) h = [1, 1, 1]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = 0$$

$h_1 + h_2 + h_3 = 0$ elde edilir.

$$h' \nabla^2 f(x^*) h = [h_1, h_2, h_3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$= [h_1 0 + h_2 + 3h_3,\ h_1 + 0h_2 + 2h_3,\ 3h_1 + 2h_2 + 0h_3]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$= [h_2 + 3h_3,\ h_1 + 2h_3,\ 3h_1 + 2h_2]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$= h_1 h_2 + 3h_3 h_1 + h_1 h_2 + 2h_3 h_2 + 3h_1 h_3 + 2h_2 h_3$$

$$= h_1 h_2 + 3(-h_1 - h_2) h_1 + h_1 h_2 + 2(-h_1 - h_2) h_2$$
$$+ 3h_1(-h_1 - h_2) + 2h_2(-h_1 - h_2)$$

$$= \cancel{h_1 h_2} - 3h_1^2 - 3h_2 h_1 + \cancel{h_1 h_2} - \cancel{2h_1 h_2} - 2h_2^2$$
$$- 3h_1^2 - 3h_1 h_2 - 2h_2 h_1 - 2h_2^2$$

$$= -6h_1^2 - 8h_1 h_2 - 4h_2^2$$

$$= -2h_1^2 - 4h_1^2 - 8h_1 h_2 - 4h_2^2$$
$$= -2h_1^2 - 4(h_1^2 + 2h_1 h_2 + h_2^2) = \underbrace{-2h_1^2 - 4(h_1 + h_2)^2}_{<0}$$

5

Bulunan $x^* = (3/2, 0, 3/2, -9/2)$ çözümü maksimum çözümdür.

ÖRNEK 2 $\quad Min f(x) = x^2+y^2+z^2$

$$g_1(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$$

$$g_2(x) = x + y - z = 0$$

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)$$

$$= x^2+y^2+z^2 + \lambda_1\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1\right) + \lambda_2(x+y-z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda_1 \frac{x}{2} + \lambda_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda_1 \frac{y}{5} + \lambda_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda_1 \frac{2z}{25} - \lambda_2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \quad (4)$$

$$x + y - z = 0 \quad (5)$$

(1)'den $\quad x = -\dfrac{2\lambda_2}{4+\lambda_1}$

(2)'den $\quad y = \dfrac{-5\lambda_2}{10+2\lambda_1}$

(3)'den $\quad z = \dfrac{25\lambda_2}{50+2\lambda_1}$

Bunları (5) denklemlerinde yazarsak

$\boxed{6}$

$$\frac{-2\lambda_2}{4+\lambda_1} - \frac{5\lambda_2}{10+2\lambda_1} - \frac{25\lambda_2}{50+2\lambda_1} = 0$$

$$\lambda_2\left[\frac{-2}{4+\lambda_1} - \frac{5}{10+2\lambda_1} - \frac{25}{50+2\lambda_1}\right] = 0$$

a) $\lambda_2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$ olur ki (4) denklemi

sağlanmaz.

$$\frac{-2}{4+\lambda_1} - \frac{5}{10+2\lambda_1} - \frac{25}{50+2\lambda_1} = 0$$

$$-2(10+2\lambda_1)(50+2\lambda_1) - 5(4+\lambda_1)(50+2\lambda_1) - 25(4+\lambda_1)(10+2\lambda_1)$$

düzenlenirse

$17\lambda_1^2 + 245\lambda + 750 = 0$ elde edilir.

$\lambda_1^{(1)} = \frac{-75}{10}$ $\quad \lambda_1^{(2)} = -10$ gibi iki değer

elde edilir.

$\lambda_1 = -10$ için $\quad x = \frac{\lambda_2}{3} \quad y = \frac{\lambda_2}{2} \quad z = \frac{5\lambda_2}{6}$

bunları (4) de yerine yazarsak

$$\frac{1}{4}\frac{\lambda_2^2}{9} + \frac{\lambda_2^2}{4}\frac{1}{5} + \frac{25\lambda_2^2}{36}\cdot\frac{1}{25} - 1 = 0$$

$\frac{19}{180}\lambda_2^2 = 1 \qquad \lambda_2 = \mp\sqrt{\frac{180}{19}}$ elde edilir.

$\lambda_2^{(1)} = \sqrt{\frac{180}{19}} \qquad \lambda_2^{(2)} = -\sqrt{\frac{180}{19}}$ elde edilir.

$\boxed{7}$

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\frac{\lambda_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2+\frac{2\lambda_1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\frac{2\lambda_1}{25} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -10$ için $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$

Hessian matris x, y, z içermediği için.

$$H(x^*) = \{ h \mid \nabla g_i(x^*) h = 0 \quad i=1,2 \}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2x}{4} & \frac{2y}{5} & \frac{2z}{25} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2x}{4} h_1 + \frac{2y}{5} h_2 + \frac{2z}{25} h_3 = 0 \qquad (6)$$

$$h_1 + h_2 - h_3 = 0 \qquad (7)$$

$$[h_1, h_2, h_3] \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$[-3h_1, -2h_2, 6/5 h_3] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = -3h_1^2 - 2h_2^2 + \frac{6}{5} h_3^2 \qquad (8)$$

$\boxed{8}$

$\lambda_1 = -10 \quad \lambda_2^{(1)} = \sqrt{\frac{180}{19}}$ değeri $\quad x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ değerleri

$\lambda_1 = -10 \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{180}{19}}$ değeri $\quad x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}$ değerleri

$\lambda_1 = -\frac{75}{10} \quad \lambda_2 = \sqrt{}$ 〃 $\quad x^{(3)} \; y^{(3)} \; z^{(3)}$ 〃

$\lambda_1 = -\frac{75}{10} \quad \lambda_2 = -\sqrt{}$ 〃 $\quad x^4 \; y^4 \; z^4$ 〃

herbiri (16 ve 17) denklemlerinde yerine konarak h_2 ve h_3 değeri h_1 değeri cinsinden hesaplanır. bulunan değerler 8 ifadesinde yerine konarak Hessian Matrisin definitliği elde edilir. yukarıdaki (4) nokta için definitlik tekrarlanır. dolayısıyla 4 noktanın türleri ortaya çıkar.

~~23.03.2020~~
30.03.2020

1

OPTIMIZASYON TEKNİKLERİ

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2$ fonksiyonunun optimumlarını belirleyin.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 2x_1 x_2 \\ -x_1^2 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$3x_1^2 - 2x_1x_2 = 0 \quad x_1(3x_1 - 2x_2) = 0 \to x_1 = 0$, $\to x_1 = \frac{2}{3}x_2$

Bulunanları $-x_1^2 + 4x_2 = 0$ denkleminde yerine koyarsak $x_1 = 0$ için $x_2 = 0$; $x_1 = \frac{2}{3}x_2$ konursa da

$-x_1^2 + 4x_2 = 0 \quad -\frac{4}{9}x_2^2 + 4x_2 = 0 \quad \cancel{+}4x_2(+\frac{1}{9}x_2 \cancel{+1}) = 0$

$x_2 = 0 \quad x_2 = 9 \quad x_2 = 0$ için $x_1 = 0$ $\quad x_2 = 9$ için $x_1 = 6$ elde edilir. $A(0,0)$ $B(6,9)$ olur.

$f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2$

$x_1 = 6$ konursa $f(6, x_2) = 216 - 36x_2 + 2x_2^2$

Tek değişkenli fonksiyon elde edilir. Tek değişkenli fonksiyonlarda max yada minimum bulmak için

$f'(6, x_2) = -36 + 4x_2 = 0 \quad \boxed{x_2 = 9}$ elde edilir

$f''(6, x_2) = 4 > 0$ minimumluk koşulu

Sanki $(x_1 = 6 \quad x_2 = 9)$ minimum gibi algılanabilir mi?

$\boxed{2}$ $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2$

$x_2 = 9$ konursa

$f(x_1, 9) = x_1^3 - 9x_1^2 + 162$

$f'(x_1, 9) = 3x_1^2 - 18x_1 = 0 \rightarrow 3x_1(x_1 - 6) = 0$

$x_1 = 0$ $\quad$ $x_1 = 6$

$f''(x_1, 9) = 6x_1 - 18 \Big|_{x_1 = 6} = 18$ elde edilir > 0

$x_1 = 6$ konursa

minimumluk koşulu.

O zaman $x_1 = 6$ $x_2 = 9$ için yine minimum olduğu söylenebilir mi?

İkinci mertebe koşullar

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(A) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 4 \end{bmatrix}_{x_1 = 0\ x_2 = 0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$h' H h = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [0, 4h_2] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 4h_2^2 > 0$$

$\nabla^2 f(A) = 4h_2^2 > 0$ pozitif definit $A(0,0)$ minimum çözümdür.

$\boxed{3}$ $\nabla^2 f(B) = \begin{bmatrix} 6x_1 - \cancel{2}x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36-18 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$

$x_1 = 6$
$x_2 = 9$

$\Delta_1 = 18$
$\Delta_2 = 72 - 144 = -72 < 0$

o halde B noktası Hessian Matrisi indefinit kılar.

$f(x,y) = x + \frac{1}{2x+y} - \frac{1}{x+y}$ kritik Noktalarını bulunuz

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{2}{(2x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{(2x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+y)^2} = \frac{1}{(2x+y)^2}$

$(x+y)^2 = (2x+y)^2$ $\quad 2x+y = x+y$ $\quad 2x+y = -x-y$

$\boxed{x=0}$ $\quad 3x = -2y$

$\boxed{x = \frac{-2y}{3}}$

$x=0$ için $1 - \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^2} = 0$

$1 = \frac{1}{y^2}$ $\quad y=+1$, $y=-1$

A $(0,1)$
B $(0,-1)$

$x = \frac{-2y}{3}$ konursa $1 - \frac{2}{\left(\frac{-y}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{-y}{3}\right)^2} = 0$

$1 = \frac{1}{\left(\frac{y}{3}\right)^2}$ $\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$

$\frac{y}{3} = 1$ $\quad \frac{y}{3} = -1$ $\quad y=3$, $y=-3$

$y=3$ $\quad x = -2$ $\quad$ C $(-2,3)$

$y=-3$ $\quad x = 2$ $\quad$ D $(2,-3)$

$\boxed{4}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - 2(2x+y)^{-2} + (x+y)^{-2}\right)$$

$$= 4(2x+y)^{-3}\cdot 2 - 2(x+y)^{-3}\cdot 1$$

$$= \frac{8}{(2x+y)^3} - \frac{2}{(x+y)^{+3}} \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{(2x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(-(2x+y)^{-2} + (x+y)^{-2}\right)$$

$$= 2(2x+y)^{-3} - 2(x+y)^{-3}$$

$$= \frac{2}{(2x+y)^3} - \frac{2}{(x+y)^{+3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{(2x+y)^{+2}} + \frac{1}{(x+y)^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-(2x+y)^{-2} - (x+y)^{-2}\right)$$

$$= 2(2x+y)^{-3}\cdot 2 + 2(x+y)^{-3}\cdot 1$$

$$= \frac{4}{(2x+y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}$$

$\boxed{5}$ Hessian Matris

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{(2x+y)^3} - \frac{2}{(x+y)^3} & \frac{4}{(2x+y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3} \\ \frac{4}{(2x+y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3} & \frac{2}{(2x+y)^3} - \frac{2}{(x+y)^3} \end{bmatrix}$$

a) $(0,1)$ için $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 8$

$\Delta_2 = 0 - 36 = -84$

indefinit

b) $(0,-1)$ $\begin{bmatrix} -8+2 & -6 \\ -6 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = -6$

$\Delta_2 = 0 - 100 = -100$

indefinit

c) $(-2,3)$ $\begin{bmatrix} -8-2 & -4+2 \\ -4+2 & -2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = -10$

$\Delta_2 = 24$

Negatif definit max

d) $(2,-3)$ $\begin{bmatrix} 8+2 & 4-2 \\ 4-2 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 10$

$\Delta_2 = 36$

pozitif definit Min.