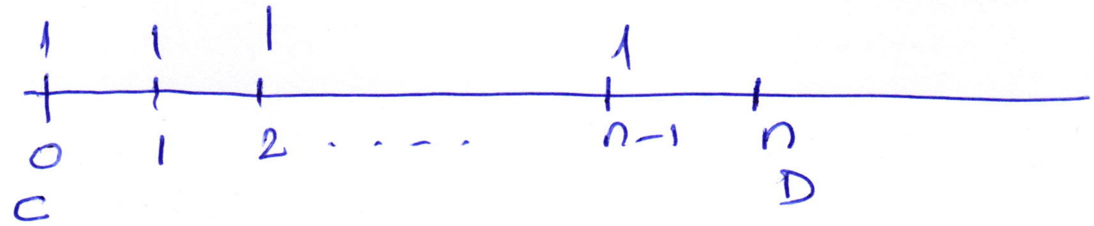
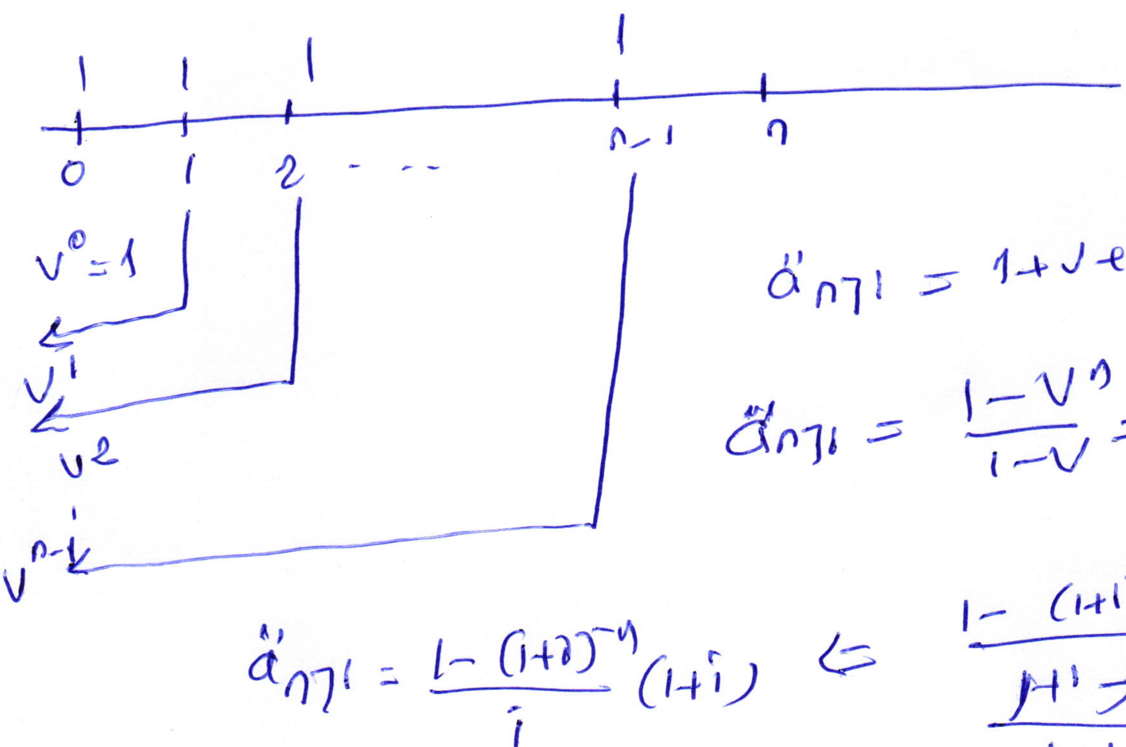
1

DÖNEM BAŞI ANNÜİTELERİ

n dönem boyunca her yılın başında 1 birim ödenen bir annüite verilsin. Bu tür annüitelere dönem başı annüite denir. Bu annüitenin zaman doğrusu aşağıdadır.



Bu annüiteye ilişkin zaman doğrusu t=0 noktasındaki C değeri $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, t=n noktasındaki D değeri ise $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ olarak gösterilir. $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ her dönem başında bir birimlik ödeme yapılan annüitenin bugünkü değerini, $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ ise bu annüitenin birikimli değerini ifade eder.



$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1+v+v^2+\dots+v^{n-1}$$

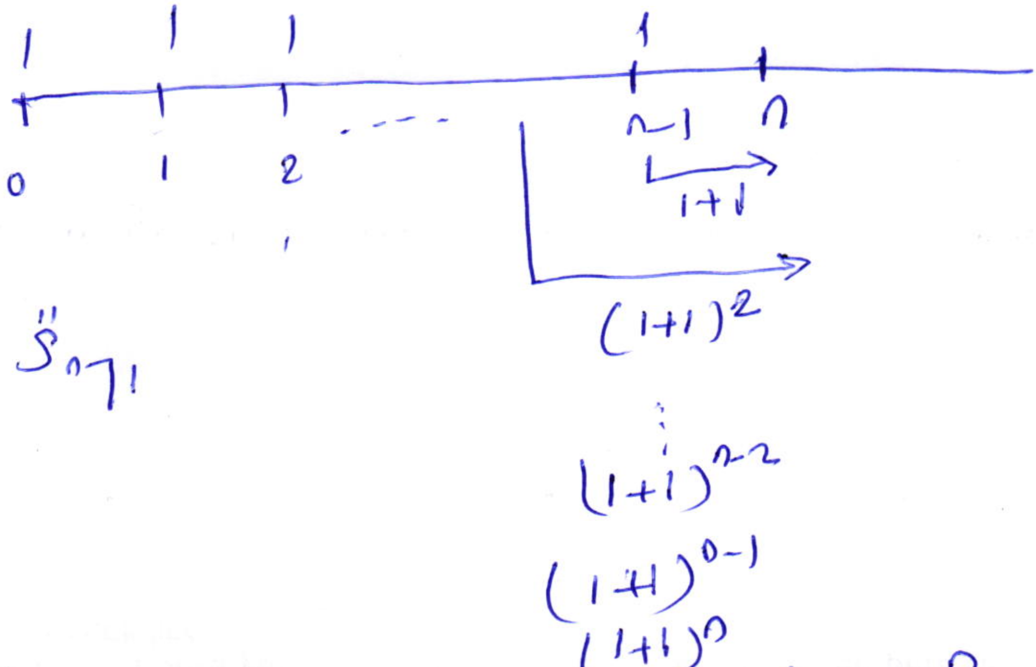
$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{1+i-1}{1+i}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{i}{(1+i)}}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) \Leftarrow$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)\, a_{\overline{n}|}$$

$\boxed{2}$



$\ddot{s}_{n\rceil i}$

$$\ddot{s}_{n\rceil i} = (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$$

$$\ddot{s}_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}(1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$$

$$\ddot{s}_{n\rceil i} = s_{n\rceil i}(1+i)$$

$$\ddot{s}_{n\rceil i} = \ddot{a}_{n\rceil i}(1+i)^n$$

$$\frac{1}{\ddot{a}_{n\rceil i}} = \frac{1}{\ddot{s}_{n\rceil i}} + d = \frac{1}{\ddot{a}_{n\rceil i}(1+i)^n} + \frac{\frac{i}{1+i}}{(1+i)^{n-1}\ddot{a}_{n\rceil i}}$$

$$= \frac{i(1+i)^{n-1}\ddot{a}_{n\rceil i} + 1}{\ddot{a}_{n\rceil i}(1+i)^n}$$

$$= \frac{i(1+i)(1+i)^{n-1} \cdot a_{n\rceil i} + 1}{\ddot{a}_{n\rceil i}(1+i)^n}$$

$\boxed{3}$

$$\frac{\cancel{i}(1+i)^n\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{\cancel{i}}\right)+1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n}$$

$$\frac{(1+i)^n \cancel{-1} \cancel{+1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n} = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

$$R\ddot{a}_{\overline{n}|} = R\,\frac{(1-v^n)}{d} \qquad R\ddot{s}_{\overline{n}|} = R\,\frac{(1+i)^n-1}{d}.$$

$$= R\,\frac{\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)}{\left(\frac{1}{1+i}\right)} = R\left(\frac{1+i-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right.$$

$$= R(1+i)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

$$\cancel{R\ddot{s}_{\overline{n}|} = R\,\frac{(1+i)^{n+1}-1}{d} = R\,\frac{(1+i)^n-1}{\frac{i}{1+i}}}$$

$$= \cancel{\frac{R(1+i)\left((1+i)^n-1\right)}{i}}$$

$= R$

$\boxed{4}$

$$\cancel{R\ddot{s}_{\overline{n}|i} = R\,\frac{(1+i)^n-1}{d}\cdot(1+i)}$$

$$\cancel{= R\,\frac{(1+i)^n-1}{\frac{i}{1+i}}}$$

$$R\ddot{s}_{\overline{n}|i} = R\,\ddot{a}_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n$$

$$= R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)\,(1+i)^n$$

$$= R\,\frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)^1}{i}$$

$$= R\,(1+i)\underbrace{\boxed{\frac{(1+i)^n-1}{i}}}_{s_{\overline{n}|i}}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

$$R\ddot{s}_{\overline{n}|i} = R\,\frac{(1+i)^n-1}{d} = R\,\frac{(1+i)^n-1}{\frac{i}{1+i}} = R\,[(1+i)^n-1]\,\frac{(1+i)}{i}$$

$$= R\,s_{\overline{n}|i}(1+i) = R\,\ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

Örnek Problem

Derin 10 yıl boyunca her yılın başında 5000TL yatırarak çocuklarının eğitimi için bir fon oluşturmak istiyor. Yıllık efektif faiz oranı %8 olarak verildiğine göre bu annüitenin bugünkü değerini ve 10. cu yıl sonundaki birikmiş değerini bulunuz.

$$5000\,\ddot{a}_{\overline{n}|} = 5000\,\frac{1-v^{10}}{i}(1+i) = \frac{1-v^{10}}{d}$$

$$= 5000\,\frac{(1-(1+i)^{-10})}{i}(1+i)$$

$$= 5000\,\frac{(1-(1.08)^{-10})}{0.08}(1.08)$$

$$= 36234.44$$

$$5000\,\ddot{s}_{\overline{n}|} = 5000\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}(1+i)^{n}$$

$$= 5000\,\frac{(1+0.08)^{10}-1}{0.08}(1.08)^{10}$$

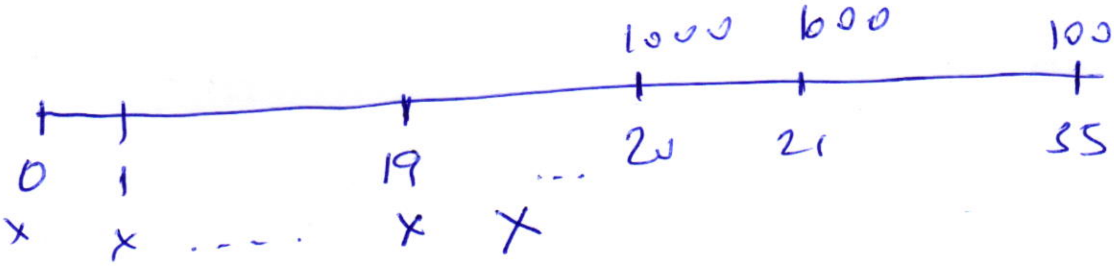
$$= 78.227.40 \text{ TL}$$

Örnek

Bir emeklilik fonuna altı aylığa dönüştürülebilir yıllık nominal %16 faiz oranı ile 20 yıl boyunca her 6 ayın başında X TL yatırılmıştır. Katılımcı emekli olduğunda bu fondan ilk ödemesi 20. yılın sonunda başlayan

6

6 aylığa dönüştürebilirim yıllık %024 faiz oranı ile 15 yıl boyunca her ayın başında 1000TL emekli maaşı ödemesi yapılacaktır. Bu verilere göre X değerini bulunuz.



$X\,\ddot{a}_{\overline{40}|0.08} = 1000\, v^{40}\, \ddot{a}_{\overline{180}|0.02}$ t=0'a alıp denklede

$X\,\ddot{s}_{\overline{40}|0.08} = 1000\,\ddot{a}_{\overline{180}|0.02}$ t=20'deki denklik

$X = 177.12$ TL

örnek

$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 12.45$ ve $\ddot{a}_{\overline{2n}|} = 18$ olarak verildiğine göre aynı efektif faiz oranı ile t=0 anında yatırılan 20.000 TL'nin 4n yıl sonraki birikimli değerini bulunuz.

$\frac{\ddot{a}_{\overline{2n}|i}}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}} = \frac{18}{12.45} = 1.4458$ $\quad \frac{1-v^{2n}}{1-v^{n}} = 1.4455$

$1+v^{n} = 1.4455$

$v^{n} = 0.4455$ // 506372,07TL

Birikimli değer $= (1+i)^{4n} \cdot 20000 = 200.000\, v^{-4n}$
$= 20.000 (v^{n})^{-4} = 20000 (0.4455)^{-4}$

7

Örnek

Yıllık efektif faiz oranı %10 olarak verildiğine göre 10 yıl boyunca her üçer ayın başında 100 TL yatırılan annüitenin bugünkü değerini bulunuz

yıllık efektif faiz oranı %10 olup

$$1+i = \left(1+\frac{j_4}{4}\right)^4$$

$$1,10 = \left(1+\frac{j_4}{4}\right)^4 \qquad (1,10)^{1/4} = 1+\frac{j_4}{4} \qquad \frac{j_4}{4} = (1,10)^{1/4}-1$$

$$j_4 = \left((1,10)^{1/4}-1\right)4 \qquad \frac{j_4}{4} = 0.0241$$

$$1000\,\ddot{a}_{\overline{40}|j_4} = 100\,\frac{1-\left(1+\frac{j_4}{4}\right)^{-40}}{\frac{j_4}{4}}\left(1+\frac{j_4}{4}\right)$$

$$= 2.610.18$$

$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$ isp.

$$= 1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$$

$$= \frac{i+1-(1+i)^{-n+1}}{i}$$

$$= (1+i)\underbrace{\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)}_{a_{\overline{n}|i}} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

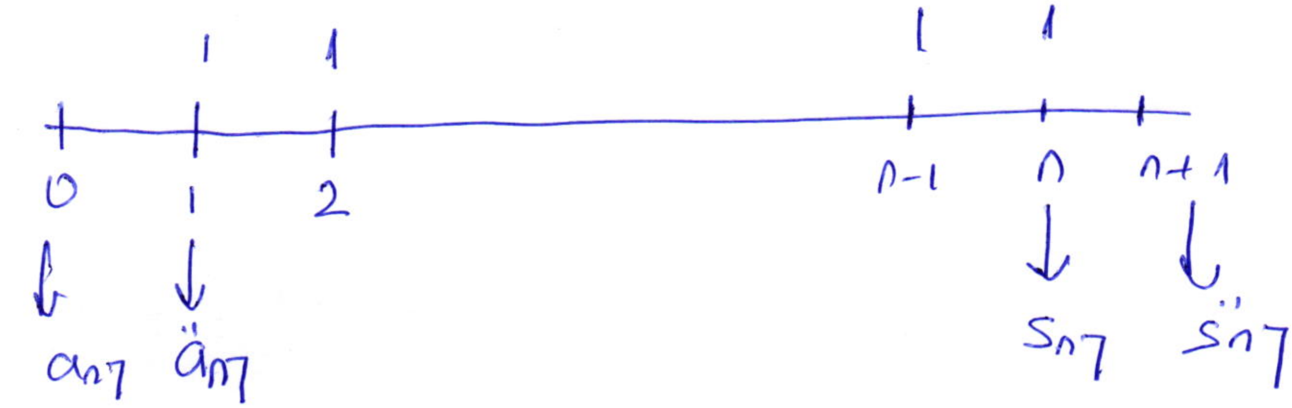
$\boxed{8}$ $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1$ isp.

$$= \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1$$

$$= \frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i} = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}$$

$$= (1+i)\underbrace{\left(\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right)}_{s_{\overline{n}|i}} = s_{\overline{n}|i}\,(1+i) = \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

Dönem başı ve dönem sonu ilişkileri aşağıda gösterilmiştir.

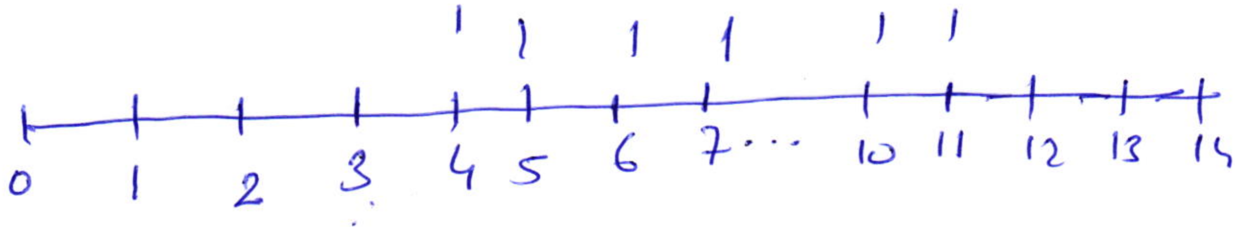


Bir annüitenin Herhangi bir tarihteki değeri

1) ilk ödeme tarihinden önceki bir zaman noktasındaki değeri
2) Son ödeme yapıldıktan sonraki bir zaman noktasındaki değeri
3) ilk ödeme ve son ödeme arasındaki herhangi bir zaman noktasındaki değeri

$\boxed{9}$

I. durum: Annüitenin ilk ödeme yapılmadan önceki herhangi bir tarihteki değeri



Bu örnekte ilk ödeme dördüncü yılın sonunda yapılmıştır. İlk ödeme dört dönem gecikerek yapıldığı için bu tür annüitelere ertelenmiş annüiteler denir. Bu annüitenin ilk ödemeden 4 dönem önceki değeri

$$a_{\overline{8|}}\,v^3 = a_{\overline{11|}} - a_{\overline{3|}}$$

II. durum: Annüitenin son ödemeden sonra herhangi bir tarihteki birikimli değeri

Örnekte, son ödeme 11.ci yılın sonunda yapılmıştır. Son ödeme tarihinden üç dönem sonraki birikimli değer bulunması istensin. Yapılan 8 ödemenin birikimli değeri birikim faktörü ile üç dönem sağa getirilerek 14 noktasındaki birikimli değer.

$$S_{\overline{8|}}\,(1+i)^3$$

III. Durum Annüitenin ilk ödeme ile son ödeme tarihleri arasında herhangi bir tarihteki değeri. Örnek problem için 7 noktasındaki değeri hesaplanabilir.

$$a_{\overline{8|}}\,(1+i)^4 \;,\; S_{\overline{8|}}\,v^4$$

Örnek

Yıllık i efektif faiz oranı ile oluşturulmuş annüitelere ilişkin şu bilgiler verilmiştir.

1) n yıl boyunca, her yılın sonunda 5 TL ve 2n yıl boyunca her yılın sonunda 10 TL ödemeler yapılan iki annüitenin bugünkü değerleri toplamı 128 TL'dir.

2) n yıl ertelenmiş 2 TL ödemeli n yıllık dönem sonu annüitenin bugünkü değeri ise 6 TL'dir.

Bu verilere göre yıllık i efektif faiz oranı ile oluşturulmuş (n+1) yıllık dönem başı annüitenin bugünkü değerini bulunuz.

1) $10\, a_{\overline{2n}|} + 5\, a_{\overline{n}|} = 128$

2) $2 v^n a_{\overline{n}|} = 6$

$$\ddot{a}_{\overline{n+1}|} = 1 + a_{\overline{n}|}$$

$$10\left(a_{\overline{n}|} + v^n a_{\overline{n}|}\right) + 5\, a_{\overline{n}|} = 128$$

$$15\, a_{\overline{n}|} + 10 v^n a_{\overline{n}|} = 128$$

$$15\, a_{\overline{n}|} + 5 \cdot \underbrace{2 v^n a_{\overline{n}|}}_{6} = 128$$

$$15\, a_{\overline{n}|} = 98 \qquad a_{\overline{n}|} = \frac{95}{15} = 6.533$$

$$\ddot{a}_{\overline{n+1}|} = 1 + a_{\overline{n}|} = 1 + 6.533 = 7.533$$