# OPTIMIZASYON TEKNIKLERI

13 Nisan 2020

Eşitlik ve Eşitsizlik kısıtları altında Optimizasyon

$\mathbb{R}^n$ de $\min f(x)$

$$g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$$g_j(x) \leq 0 \quad j = k+1, \dots, N$$

problemini çözmek istiyoruz.

$x^* \in \mathbb{R}^n$ $\min f(x)$ $g_i(x) = 0$ $(i = 1, \dots, k)$ $g_j(x) \leq 0$ $j = k+1, \dots, N$

1ci mertebe koşullar

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=k+1}^{N} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0 \quad j = k+1, \dots, N$$

eşitliklerini sağlayan $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ve $\mu_{k+1} \geq 0$ $\mu_{k+2} \geq 0$ $\dots$ $\mu_N \geq 0$ sayıları vardır. Ayrıca $g_j(x^*) \leq 0$ $j = k+1, \dots, N$ eşitsizlikleri sağlanmalıdır.

2ci Mertebe koşullar.

$$M(x^*) = \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda \nabla^2 g_i(x^*) + \sum_{j=k+1}^{N} \mu_j \nabla^2 g_j(x^*)$$

Matrisi $H(x^*) = \{ h \mid \nabla g_i(x^*) h = 0, \nabla g_j(x^*) h = 0 \ j \in J(x^*) \}$ ilerlenebilir yönler kümesi üzerinde pozitif definit olmalıdır.

$\boxed{2}$ $\max f(x) \Leftrightarrow \min(-f(x))$ alınarak teori maksimizasyon olarakta düşünülebilir.

örnek

$$\min f(x) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2$$

$$x_2 - x_1 = 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$g_1(x): x_2 - x_1 - 1 = 0$$

$$g_2(x): x_1 + x_2 - 2 \leq 0$$

$$L(x,\lambda,\mu) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + \lambda(x_2 - x_1 - 1) + \mu(x_1 + x_2 - 2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1-1) - \lambda + \mu = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2-2) + \lambda + \mu = 0 \quad (2)$$

$$x_2 - x_1 - 1 = 0 \quad (3)$$

$$\mu(x_1 + x_2 - 2) = 0 \quad (4)$$

a) $\mu = 0 \Rightarrow$

$$2(x_1-1) - \lambda = 0 \quad (1')$$

$$2(x_2-2) + \lambda = 0 \quad (2')$$

$$x_2 - x_1 - 1 = 0 \quad (3')$$

ilk iki denklem toplanırsa $2x_1 - 2 + 2x_2 - 4 = 0$ elde edilir. Bu $2x_1 + 2x_2 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$ elde edilir. Bu çözüm ile 3'cü denklemi ile ortak çözülürse

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 - x_1 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow 2x_2 = 4 \quad \boxed{x_2 = 2 \quad x_1 = 1}$$ elde edilir

3

Ancak bu çözüm problemin ancak kısıtlarından

$x_1+x_2-2 \leq 0$ sağlamıyor. $(3-2=1>0)$

b) $\mu \neq 0 \Rightarrow$ 4 denklemlerinden

$x_1+x_2-2=0$ olur.

diğer kısıtlarda ilave edilirse

$$2(x_1-1)-\lambda+\mu=0$$

$$2(x_2-2)+\lambda+\mu=0$$

$$x_2-x_1-1=0$$

$$\boxed{\cancel{x_1+x_2-2=0}}$$

$$2x_1-\lambda+\mu=2 \quad (1'')$$

$$2x_2+\lambda+\mu=4 \quad (2'')$$ sistemi elde edilir

$$x_2-x_1=1 \quad (3'')$$

$$x_1+x_2=2 \quad (4'')$$

3'' ve 4''den $2x_2=3$ $x_2=3/2$ $x_1=1/2$

elde edilir. bunlar 1'' ve 2'' ye konursa

$$\begin{aligned} 1-\lambda+\mu&=2 \\ 3+\lambda+\mu&=4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -\lambda+\mu&=1 \\ \lambda+\mu&=1 \end{aligned} \Rightarrow \mu=1 \quad \lambda=0$$

elde edilir. Bu durumda $x_1+x_2 \leq 2$ kısıtı $x_1=1/2$ $x_2=3/2$ konduğunda eşitlik halinde sağlanır. Buna etken kısıt denir.

$$M=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ Hessian matrisi elde edilir.

$\boxed{4}$ Hiç bu matris $x_1$ ve $x_2$'ye bağlı olmadığından ilerlenebilir yöne bakmaya gerek yoktur.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 4 \end{matrix}$$

pozitif definit olup $x_1 = 1/2, x_2 = 3/2, \lambda = 0, \mu = 1$

çözümü minimum çözümdür.

Özel kısıtlar altında optimizasyon

$\min f(x)$

$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$

problemini çözmek istiyoruz.

$g_i(x): -x_i \leq 0$ düzenlemesi ile problem

Amaç $\min f(x)$, $g_i(x) \leq 0$

eşitsizlikleri altında

$$L(x, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i(x)$$

Lagrange fonksiyonunu oluşturalım.

1ci mertebe koşullar

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \mu_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \qquad g_i(x) = -x_i$$

$$\frac{\partial(-x_i)}{\partial x_i} = -1$$

$$\mu_i g_i(x) = -\mu_i x_i = 0 \Rightarrow \mu_i x_i = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \mu_i \qquad \mu_i \geq 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0$$

$\boxed{5}$ Sonuç olarak 1ci mertebe koşullar

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0 \quad x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad x_i \geq 0 \quad i=1,\dots,n$$

$x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ n denklem n bilinmeyen

2ci mertebe koşullar.

$$\nabla L = \nabla f(x) - e_i I \quad I = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f(x)$$

$\nabla^2 L(x^*, e) = \nabla^2 f(x^*) = H(x^*)$ Hessian

Matrisi özel kısıtlar altında pozitif definit olmalıdır.

Örnek $\min f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 4z$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0$$

1ci mertebe koşullar

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y + 2z - 2 \geq 0$

(2) $\frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2x \geq 0$

(3) $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2x - 4 \geq 0$

$\boxed{6}$ (4) $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = x(4x-2y+2z-2) = 0$

(5) $y \frac{\partial f}{\partial y} = y(6y-2x) = 0$

(6) $z \frac{\partial f}{\partial z} = z(2z+2x-4) = 0$

(7) $x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0$

a) $x=0 \quad y=0 \quad z=0$ olduğunda 1ci koşul sağlanmaz ($-2 \geq 0$ olamaz çünkü)

b) $x=0 \quad y=0 \quad z \neq 0$

$z \neq 0 \Rightarrow \quad 2x+2z-4=0 \quad x=0$ olduğu için

$z=2$ yani $(x=0,\ y=0,\ z=2)$ elde edilir. Tüm koşullar sağlandığı için

$x=0,\ y=0 \quad z=2$ çözümdür.

c) $x=0 \quad y \neq 0 \quad z=0$

$y \neq 0 \quad 6y-2x=0 \quad x=3y \quad x=0$ olduğundan $y=0$ olur. buda çelişkidir.

d) $x \neq 0 \quad y=0 \quad z=0$

$4x-2y+2z-2=0 \quad y=0 \quad z=0 \quad x=1/2$ elde edilir. 2 koşul sağlanmaz. Zira $6y-2x \geq 0$ idi $\quad -2\,1/2 > 0$ olur. çelişki

e) $x=0 \quad y \neq 0 \quad z \neq 0$

$\boxed{7}$ $y \neq 0$ $6y-2x=0$ $x=0$ (e şıkkı) için $y=0$ olur çelişki

f) $x \neq 0$ $y=0$ $z \neq 0$ $4x-2y+2z-2=0$

$2z+2x-4=0$

elde edilir $y=0$ olduğu için. $4x+2z=2$

$2x+2z=4$

sistemi çözülür ise $2x=-2$ $x=-1$ elde edilir ki sistemin (7) denklemine aykırıdır.

g) $x \neq 0$ $y \neq 0$ $z=0$

$4x-2y+2z-2=0$ $\Rightarrow$ $4x-2y=2$

$6y-2x=0$ $\quad$ $-2x+6y=0$

$2x-y=1$

$-2x+6y=0$ $\quad$ $5y=1$ $y=1/5$ $\quad$ $2x=1+1/5$

$2x=6/5$

$x=3/5$

$\frac{\partial f}{\partial z}=2z+2x-4 \geq 0$ idi.

$z=0$ olduğundan $2x-4 \geq 0$ $x=3/5$

konduğunda $6/5-4 \geq 0$ olamaz.

dolayısıyla buda çözüm değil.

h) $x \neq 0$ $y \neq 0$ $z \neq 0$

$4x-2y+2z=2$ $\quad$ $10y+2z=2$

$6y-2x=0$ $\quad$ $x=3y$ $\quad$ $6y+2z=4$

$2z+2x=4$ $\quad$ $x=-3/2$ $\quad$ $4y=-2$ $y=-1/2$

(7) kısıtları sağlanmaz

$\boxed{8}$ 2. mertebe koşul

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 4 > 0$

$\Delta_2 = 20 > 0$

$\Delta_3 = 16 > 0$

$(0,0,2)$ çözümü MINIMUM çözümdür.