06.10.2020
09-11 50

1 Lineer Programlama Teorisi

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1m}x_m+\cdots+a_{1r}x_r+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2k}x_k+\cdots+a_{2m}x_m+\cdots+a_{2r}x_r+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \quad (1.1)$$

$$\cdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mk}x_k+\cdots+a_{mm}x_m+\cdots+a_{mr}x_r+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_m, \ldots, x_r, \ldots x_n \geq 0 \quad (1.2)$$

$$z = c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k+\cdots+c_mx_m+\cdots+c_rx_r+\cdots+c_nx_n \quad (1.3)$$

(1.1) ve (1.2) kısıtlarını sağlayan (1.3) amaç fonksiyonunu optimum yapan x_j $(j=1,\ldots n)$ değişkenlerini bulma problemine lineer programlama problemi denir. (Burada a_{ij} $\begin{matrix} i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n \end{matrix}$, b_i $(i=1,\ldots m)$ ve c_j $(j=1,\ldots,n)$ verilmektedir.) (optimumdan kastımız max veya minimumdur.)

<u>Örnek problem</u>: Bir ev hanımı çikolatalı ve vanilyalı olmak üzere 2 tip kek üretiyor. ~~çikolatalı~~ çikolatalı keki 1 dolardan vanilyalı keki 2 dolardan satmaktadır. Her çikolatalı kek 20 dakika pişme zamanı ve 4 yumurtaya gereksinim duymaktadır. Her vanilyalı kek 40 dakika pişme zamanı ve 1 yumurtaya gereksinim duymaktadır. elimizde 8 saat pişirme zamanı ve 30 yumurtamız bulunmaktadır. Ev hanımının gelirini maksimum yapacak bir lineer programlama problemini oluşturunuz ve a) grafik yöntemle b) cebirsel yöntemle çözünüz.

$\boxed{2}$ x_1: üretilecek çikolatalı kek miktarı.

x_2: 〃 vanilyalı kek miktarı

$Maks\ z = 2x_1 + x_2$

$20x_1 + 40x_2 \leq 8.60 \Rightarrow x_1 + 2x_2 \leq 24$

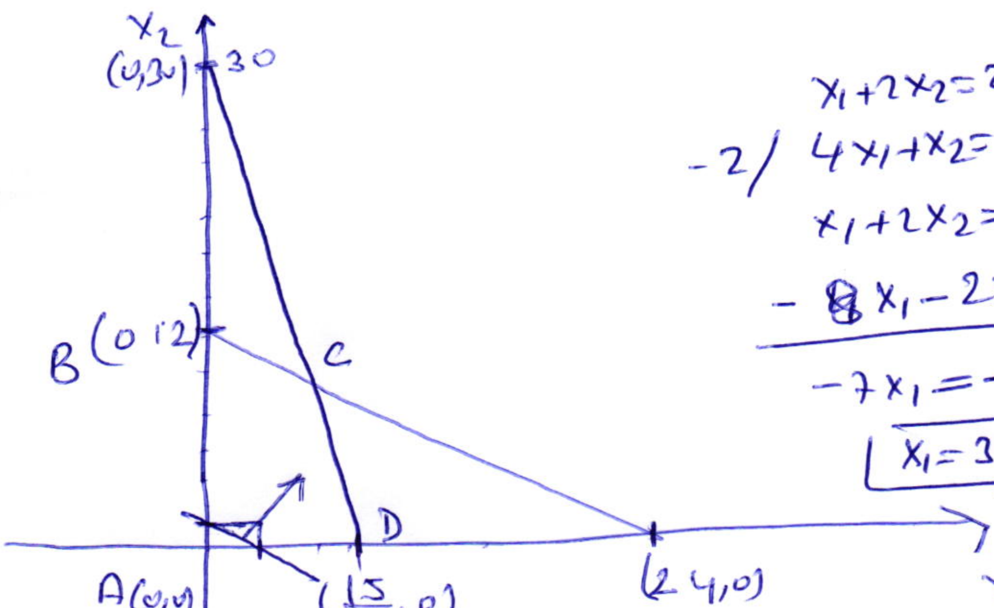
$4x_1 + x_2 \leq 30 \Rightarrow 4x_1 + x_2 \leq 30$

$x_1 + 2x_2 = 24$ $\quad x_1 = 0 \quad x_2 = 12$

$\quad x_1 = 24 \quad x_2 = 0$

$4x_1 + x_2 = 30$ $\quad x_1 = 0 \quad x_2 = 30$

$\quad x_1 = \frac{15}{2} \quad x_2 = 0$



$x_1 + 2x_2 = 24$

$-2/\ 4x_1 + x_2 = 30$

$x_1 + 2x_2 = 24$

$-8x_1 - 2x_2 = -60$

$-7x_1 = -36$

$\boxed{x_1 = 36/7}$ $\quad x_2 = \frac{66}{7}$

$z(A) = 0.2 + 0.1 = 0$

$z(B) = 2.0 + 12.1 = 12$

$z(C) = 2.\frac{36}{7} + 1.\frac{66}{7} = \frac{72+66}{7} = \frac{138}{7}$

$z(D) = 2.\frac{15}{2} + 1.0 = 15$

3

Cebirsel çözümü

$$Maks\ z = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \le 24$$

$$4x_1 + x_2 \le 30$$

$$x_{1,2} \ge 0$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$$

$$4x_1 + x_2 + x_4 = 30$$

4 bilinmeyen 2 denklem 2 tane keyfi değişken

a) $x_1 = 0$ $\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$ $\quad \boxed{x_3 = 24}$ $\quad (0, 0, 24, 30)$

$x_2 = 0$ $\quad 4x_1 + x_2 + x_4 = 30$ $\quad \boxed{x_4 = 30}$

b) $x_1 = 0$ $\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$ $\quad 2x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = 12$

$x_3 = 0$ $\quad 4x_1 + x_2 + x_4 = 30$ $\quad x_4 + x_2 = 30 \Rightarrow \cancel{4x_1 = 18}$ $\quad \boxed{x_4 = 18}$

$(0, 12, 0, 18)$

c) $x_2 = 0$ $\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 24 \Rightarrow x_1 = 24$

$x_3 = 0$ $\quad 4x_1 + x_2 + x_4 = 30$ $\quad 4x_1 + x_4 = 30$

$4 \times 24 + x_4 = 30$

$x_4 = 30 - 96$

$\boxed{x_4 = -66}$

$(24, 0, 0, -66)$

d) $x_2 = 0$ $\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$ $\quad x_1 + x_3 = 24$

$x_4 = 0$ $\quad 4x_1 + x_2 + x_4 = 30$ $\quad 4x_1 = 30$

$x_1 = \frac{15}{2}$ $\quad x_3 = 24 - \frac{15}{2}$

$\left(\frac{15}{2}, 0, \frac{33}{2}, 0\right)$ $\quad x_3 = \frac{33}{2}$

$\boxed{4}$

e) $x_3=0 \quad x_4=0$

$$x_1+2x_2+x_3=24$$
$$4x_1+x_2+x_4=30$$

$$x_1+2x_2=24$$
$$-2/\ 4x_1+x_2=30$$

$$x_1+2x_2=24$$
$$-8x_1-2x_2=-60$$
$$-7x_1=-36$$
$$\boxed{x_1=36/7}$$

$$\frac{36}{7}+2x_2=24$$
$$2x_2=24-\frac{36}{7}$$
$$2x_2=\frac{168-36}{7}$$
$$2x_2=\frac{132}{7} \quad \boxed{x_2=\frac{66}{7}}$$

$Z=2x_1+x_2$ amaç fonksiyonunda a, b, d ve e şıklarını koyarsak en büyük değeri e şıkkında aldığını görürüz

a) şıkkında $Z(a))=0$

b) 〃 $Z(b))=12$

d) 〃 $Z(d))=15$

e) 〃 $Z(e))=\frac{138}{7}$ olur.

uygun Çözüm: Lineer programlama problemi çözüldüğünde bütün x_j değerlerinin pozitif yada 0 olması durumundaki çözüme uygun çözüm denir.

5

Temel çözüm: Lineer programlama problemi çözüldüğünde satır sayısı kadar sıfırdan farklı x_j değişkeni elde ediliyorsa bu çözüme temel çözüm denir.

Uygun Temel çözüm: Lineer programlama problemi çözüldüğünde Temel çözümler arasında pozitiflik ($x_j > 0$) koşulunu sağlayan çözümlere uygun Temel çözüm denir.

Optimal uygun Temel çözüm: Uygun Temel çözümler arasında amaç fonksiyonunu optimum yapan çözüm yada çözümlere uygun Temel çözüm denir.

Alternatif optimal uygun Temel çözüm: Birden fazla uygun temel çözümler amaç fonksiyonunu optimal (max veya Min) değere ulaştırıyor ise bu çözümlere Alternatif optimal uygun temel çözüm denir.

Dejenere çözüm: Bir Lineer programlama problemi çözüldüğünde satır sayısından daha az ($x_j > 0$) değişken elde ediliyorsa bu çözüme dejenere çözüm denir.

Örnek problemin cebirsel çözümünde a, b, c, d ve e şıklarındaki çözümler temel çözümlerdir.

6

yine örnek problemin a, b, d ve e şıklarındaki cebirsel çözümünde çözümler uygun temel çözümlerdir.

e şıkkı ise en büyük amaç fonksiyonunu değere ulaştırdığı için optimal uygun temel çözümdür.

<u>Sınırsız çözüm:</u>

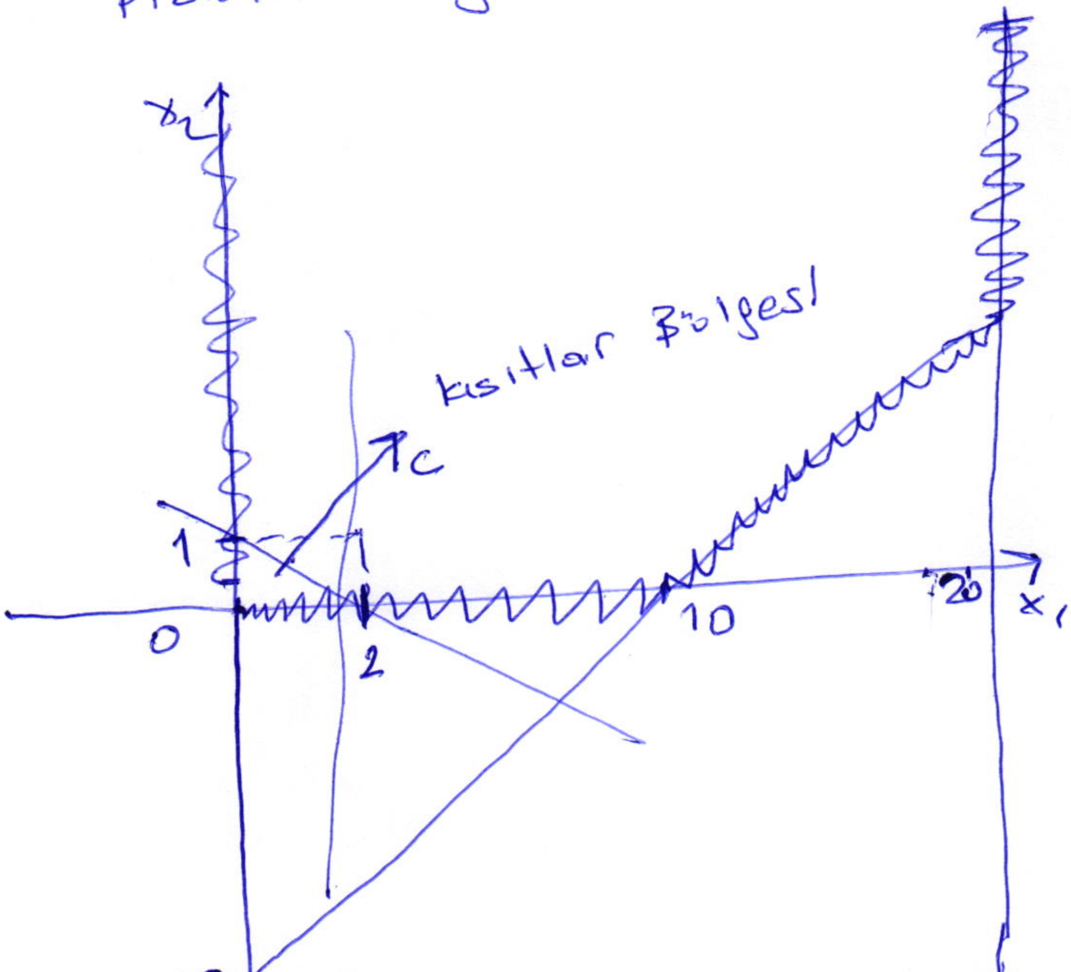
$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 - x_2 \le 10$$

$$2x_1 \le 40$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

problemini gözönüne alalım. Grafiğini çizelim.



c gradiant vektörü bölgeyi x_2 değişkenin sonsuza gittiği için terkedemez bu nedenle sınırsız amaç fonk. oluşu

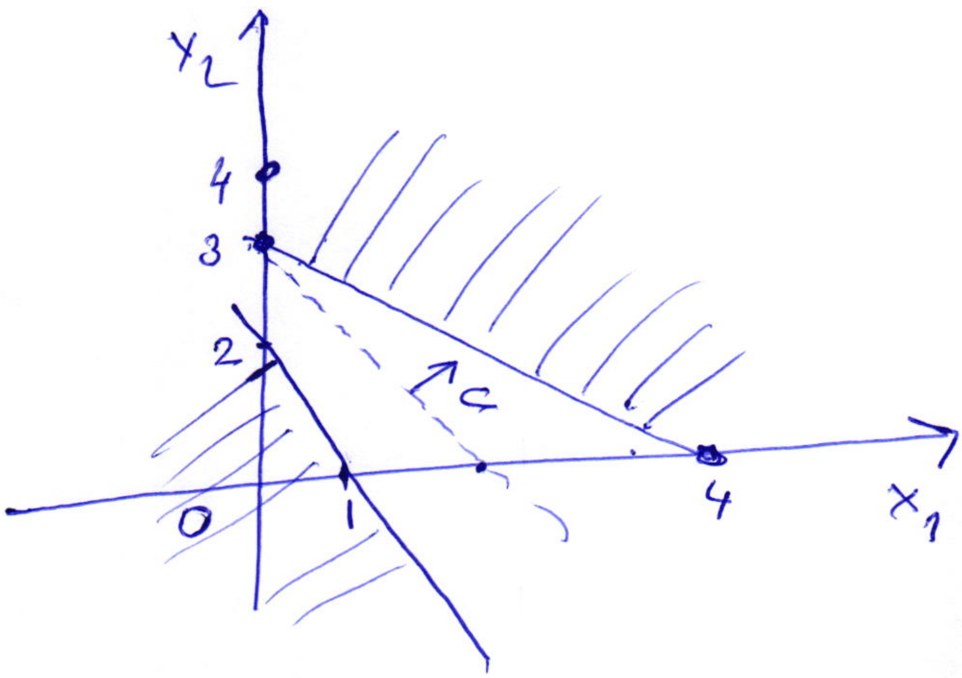
$\boxed{7}$ **uygun olmayan çözüm**

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



uygun bir kapalı bölge oluşmuyor.