08.12.2020

[1]

OYUNLAR TEORİSİNE GİRİŞ

Köşegen Oyunlar

Tanım $\forall i$ $(i=1,2,\ldots n)$ için $a_i > 0$ olacak şekilde ödeme matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmış bir oyuna köşegen oyun denir.

Bir köşegen oyun arama oyunu olarak yorumlanabilir. Şöyleki 2 oyuncusu n tane gözden birine bir eşya saklar i.ci göze saklanabilecek eşyanın değeri a_i dir. 1 oyuncusu saklanan eşyayı arar. Bulursa eşyanın değeri kadar kazanır. bulamazsa ödemesi sıfırdır. 2 oyuncusu gözlere hangi olasılıklarla eşya saklamalıdır? 1 oyuncusu hangi olasılıklarla gözlerden eşya aramalıdır? Ve oyun değeri nedir?

Yardımcı Teorem: Herhangi bir köşegen oyun pozitif oyun değerine sahiptir.

İspat: 1 oyuncusu

$$X = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$$ stratejisini seçsin $j=1,\ldots,n$ için

$$X A_{*j} = \frac{1}{n} a_j > 0$$

1 oyuncusunun optimal stratejisi için bu değer daha da büyüyeceğinden $V > 0$ dır.

[2] Yardımcı Teorem: Bir köşegen oyunda $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ 1 oyuncusu için optimal strateji ise X^*'ın bütün bileşenleri pozitifdir.

İspat: $x_i^* = 0$ olduğunu kabul edelim. 2 oyuncusu $j = i$ stratejisini seçtiğinde

$$V \leq X^* A_{*j} = x_1 0 + \ldots + x_{i-1} \cdot 0 + 0 \cdot a_i + x_{i+1} 0 + \ldots + x_n a_n = 0$$

oyun değerini nonpozitif olarak belirler. Bu, oyun değeri pozitif olmadığından X^*'ın optimal stratejisi olma özelliği ile çelişir. Bu çelişkiyi $x_i^* = 0$ kabulünden düştük. Şu halde $\forall i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için $x_i^* > 0$ dır.

Şimdi bir köşegen oyunda oyuncuların optimal stratejilerini belirleyelim. 1 oyuncusunun optimal stratejilerinin bileşenlerinin tümü pozitif olduğundan, 2 oyuncusunun keyfi bir Y^* optimal stratejisi için

$$A_{i*} Y^{*T} = V \qquad i = 1, \ldots, n \text{ dir.}$$

Bununla beraber,

$$A_{i*} \cdot Y^{*T} = a_i y_i^*$$

olduğundan

$$a_i y_i^* = V \text{ dir.}$$

$a_i > 0$ olduğundan, son denklemden

$$y_i^* = V / a_i \quad \text{bulunur.}$$

[3] i'ye göre toplam olarak

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^* = 1$$ olduğu hesaba katılarak

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

oyun değeri

$$y_i^* = \frac{1}{a_i} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}} \quad i = 1, 2 \ldots, n$$

olarak 2. ci oyuncunun 1. ci stratejisini oynama olasılığı belirlenir. Yukarıdaki formül 2 oyuncunun optimal stratejilerinin pozitif olduğunu göstermektedir. Yine 1. ci oyuncunun optimal stratejilerini belirlemek için $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$ optimal stratejisi ve $\forall j$ $(j = 1, \ldots, n)$ için

$$x^* A_{*j} = V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

dır. Buradan da

$$x_i^* = \frac{1}{a_i} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

olduğu kolayca görülür. Böylece köşegen oyunda 1 oyuncusunun da tek bir optimal stratejisi vardır.

[4] Örnek

Arama oyunu: B oyuncusu 1'den 4'e kadar numaralanmış 4 tane kapalı kutudan birine bir eşya saklıyor. i.ci kutuya saklanabilecek eşyanın değeri 2^i p.b olarak belirlenmiştir. A oyuncusu 1 p.b bedelle saklı eşyayı arıyor, eğer bulabilirse eşyanın sahibi oluyor. Oyuncuların optimal stratejilerini ve oyun değerini bulunuz.

Çözüm: A ve B oyuncularının stratejileri, sırasıyla

A_i $(i=1,2,3,4)$ i.ci kutuyu açmak ve

B_j $(j=1,2,\dots n)$ j.ci kutuya saklamak

olarak belirlenebilir. (A_i, B_j) durumunda A oyuncusunun elde edeceği gerçek kazanç

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^i - 1 & i = j \\ 0 - 1 & i \neq j \end{cases}$$

olduğuna göre oyun matrisi

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	-1	-1	-1
A_2	-1	3	-1	-1
A_3	-1	-1	7	-1
A_4	-1	-1	-1	15

olur $\forall i,j$ için $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + 1$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$ matrisini oluşturalım

5 Bütün köşegen elemanları pozitif, diğer elemanlar sıfır olduğundan $\tilde{A}$ matrisi bir köşegen oyun belirler. O halde oyun değeri

$$\tilde{v} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{a_i}} = \frac{16}{15}$$

ve oyuncuların optimal stratejileri

$$x_i^* = y_i^* = \frac{1/a_i}{\sum_{j=1}^{4} \frac{1}{a_j}}$$

$$x^* = y^* = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}}, \frac{\frac{1}{4}}{\frac{15}{16}}, \frac{\frac{1}{8}}{\frac{15}{16}}, \frac{\frac{1}{16}}{\frac{15}{16}} \right) = \left(8/15, 4/15, 2/15, 1/15 \right)$$

olarak bulunur. Verilen oyun değeri ise. $\Rightarrow v = \tilde{v} - 1 = \frac{16}{15} - 1 = 1/15$

MATRİS OYUNLARI VE LİNEER PROGRAMLAMA

Bir matris oyununun çözümü, standart lineer programlama probleminin çözümüne indirgenebilir.

$m \times n$ boyutlu A ödeme matrisi olan bir oyun gözönüne alalım. Genelliği bozmaksızın matrisin bütün elemanlarının pozitif olduğunu kabul edelim. (Aksi halde bütün elemanlarına yeterince büyük sayı eklenir. Ve elde edilen yeni oyun başlangıç oyununa stratejik olarak denktir.)

Bu oyunda 1 oyuncusunun keyfi stratejisi X olsun.

$v_x = \min_j X A_{*j}$ A'nın bütün elemanları pozitif olduğundan herhangi X stratejisi için v_x de pozitiftir. $V(A)$ oyun değeri olmak üzere $V(A) \geq v_x$ $v_x = V(A)$ olması için gerek ve yeter şart X'in bir optimal strateji olmasıdır.

$$v_x = \max_X v_x = V(A)$$

eşitliğine eşdeğerdir.

6 $\tilde{X} = \left(\frac{1}{V_x}\right) X$

vektörünü gözönüne alalım.

$$\tilde{X} A_{*j} \geq 1$$

X bir strateji ve $J_m = (1, \dots, 1)$ m boyutlu bir vektör olmak üzere

$$\tilde{X} J_M^t = \frac{1}{V_x}$$

dır. Dolayısıyla

$$\tilde{X} \geq 0$$

olur.

X stratejisinin optimal olması için gerekli ve yeterli koşul $\tilde{X} J_M^T$ lineer fonksiyonunun minimum yapılması olduğu sonucu çıkartılır.

Amaç : $\min \left(\frac{1}{V_x}\right) = \tilde{X} J_M^T$

kısıtlar $\tilde{X} A_{*j} \geq 1 \qquad j = 1, \dots, n$

$\tilde{X} \geq 0$

yapısında bir LP problemidir. $\tilde{X} J_M^T$ nın minimum değeri (Problemin optimal değeri) oyunun değerinin tersidir. Böylece V_x oyun değeri ve $\tilde{X}$ çözüm vektörü bulunur. 1 oyuncusunun optimal stratejileri ise $X = V_x \tilde{X}$ ile belirlenir.

7

Benzer şekilde, 2 oyuncunun her bir Y stratejisi için

$$v_y = \max_i A_{i*} Y^T$$

ve

$$\tilde{Y} = (1/v_y) Y$$

yi tanımlayalım.

Amaç $\text{Mak } 1/v_y = J_n \tilde{Y}^T$

kısıtlar $A_{i*} \tilde{Y}^T \leq 1$

$\tilde{Y} \geq 0$

yapısında LP problemi elde edilir. Bu problemin çözümünden de oyun değeri ve ikinci oyuncunun optimal stratejileri bulunabilir. Ancak dikkat edilirse 1. ve 2. oyuncular için kurulan LP problemleri birbirinin dualidir.

Böylece matris oyununun çözümünün bir çift dual LP problemine indirgenebileceğini gördük. Şimdi karşıt olarak, bir çift dual LP probleminin çözümleri varsa bu çözümler kümesinin belli bir matris oyununun çözümler kümesi ile tamamen belirlenebileceğini göstereceğiz.

Örnek 1 oyuncusunun kazançlarına göre verilmiş

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi için oyuncuların optimal stratejilerini ve oyun değerini bulunuz.

[8] **Çözüm** A'nın bütün elemanlarına +4 sayısı ilave ederek stratejik denk

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisini elde edelim. 1 ve 2 oyuncularının karma stratejileri sırasıyla $X = (p_1, p_2, p_3)$ ve $Y = (q_1, q_2, q_3)$ ile oyun değeri v olsun.

LP 1 Amaç, $\text{Min} \frac{1}{v} = x_1 + x_2 + x_3$

kısıtlar
$$5x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 1$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 1$$
$$6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

LP 2
Amaç $\text{Max} \frac{1}{v} = y_1 + y_2 + y_3$
$$5y_1 + 2y_2 + 6y_3 \leq 1$$
$$y_1 + 4y_2 + 3y_3 \leq 1$$
$$5y_1 + 3y_2 + 4y_3 \leq 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Dual problemi çözelim, $\text{Max } z = y_1 + y_2 + y_3$
$$5y_1 + 2y_2 + 6y_3 + y_4 = 1$$
$$y_1 + 4y_2 + 3y_3 + y_5 = 1$$
$$5y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_6 = 1$$
$$y_1, \dots, y_6 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	
			1	1	1	0	0	0	
j	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	ORAN
4	0	$y_4 = 1$	5	2	6	1	0	0	1/5
5	0	$y_5 = 1$	1	4	3	0	1	0	1
6	0	$y_6 = 1$	5	3	4	0	0	1	1/5 ← TÇ
$c_j - z_j$		$z_0 = 0$	1	1	1				

↑ TG

$\boxed{9}$ (V_4, V_5, V_1) yeni Tabanımız olur.

$$(V_4, V_5, V_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

B		C	c_1 = 1	c_2 = 1	c_3 = 1	c_4 = 0	c_5 = 0	c_6 = 0	
j	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	ORAN
4	0	$y_4 = 0$	0	-1	2	1	0	-1	X
5	0	$y_5 = 4/5$	0	$17/5$	$11/5$	0	1	$-1/5$	$4/17$
1	1	$y_1 = 1/5$	1	$3/5$	$4/5$	0	0	$1/5$	$1/3$
$c_j - z_j$		$z_0 = 1/5$	0	$2/5$	$1/5$	0	0	$-1/5$	

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/17 & 0 \\ 0 & 5/17 & 0 \\ 0 & -3/17 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$\uparrow$ T.G

$$\text{yeni Taban } (V_4, V_2, V_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17/5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{V_A} = \frac{5}{17}$

$V_A = 17/5 + 4 = -3/5$ oyun değeri

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/17 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5/17 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/17 & 1 \end{pmatrix}$$

B		C	c_1 = 1	c_2 = 1	c_3 = 1	c_4 = 0	c_5 = 0	c_6 = 0	
j	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	ORAN
4	0	$y_4 = 4/17$	0	0	$45/17$	1	$5/17$	$-18/17$	
2	1	$y_2 = 4/17$	0	1	$11/17$	0	$5/17$	$-1/17$	
1	1	$y_1 = 1/17$	1	0	$7/17$	0	$-3/17$	$4/17$	
$c_j - z_j$		$z_0 = 5/17$	0	0	$-1/17$	0	$-2/17$	$-3/17$	

$\boxed{y_2 = 4/17}$

~~$\frac{1}{V} = 17/5$~~

~~$V = 5/17$~~ olur.

$c_6 - z_6 = -3/17$ $\quad y_1^* = 1/17 \quad y_2 = 4/17 \quad y_3 = 0 \quad y_4 = 4/17 \quad y_5 = y_6 = 0 \quad z^* = 5/17$

$-z_6 = -3/17$ $\quad c_4 - z_4 = 0 \quad c_4 = 0 \quad -z_4 = 0 \quad z_4 = 0 \quad x_1 = 0$

$\boxed{x_3 = 3/17}$ $\quad c_5 - z_5 = -2/17 \quad c_5 = 0 \quad -z_5 = -2/17 \quad z_5 = 2/17 \quad x_2 = 2/17$