3.11.2020

Lineer Programlama Teorisi

$u_j \le x_j \le v_j \Rightarrow 0 \le x_j - u_j \le v_j - u_j$

x_j' denir kısıtlarda konur

$x_j \ge s_j \Rightarrow s_j < 0$ yada $x_j' > 0$ olduğundan $s_j > 0$ olabilir.

$x_j' = x_j - s_j \ge 0$

$x_j' \le u_j - v_j$ diye normal kısıtlara ilave edilir.

$x_j = x_j' + s_j$ kısıtlara konur. x_j - işaretten bağımsız ise $x_j = x_j' - x_j''$ dönüşümü yapılarak kısıtlara konur.

Bu durumların hepsini içeren örnek verelim.

$\text{Maks} z = 10x_1 - 5x_2 - 2x_3$

$-2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 10$

$x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$

$x_1 \ge -3$

$-1 \le x_2 \le 1$

x_3 işaretten bağımsız olsun.

(2) a) $x_1 \geq -3 \Rightarrow \underbrace{x_1+3}_{x_1'} \geq 0$ $\quad x_1' = x_1+3 \Rightarrow x_1 = x_1'-3$

olur kısıtlarda ve amaç fonksiyonunda x_1 yerine $x_1'-3$ koyacağız.

b) $-1 \leq x_2 \leq 1$ her iki tarafa sol taraf sıfır olacak şekilde bir değer eklenirse $0 \leq x_2+1 \leq 1+1$

yani $0 \leq x_2+1 \leq 2$ haline gelir $x_2+1 = x_2'$ eklenirse $x_2 = x_2'-1$ dir

$0 \leq x_2' \leq 2$ olur. daha önce yaptığımız gibi $x_2' \geq 0$ olduğu için $x_2' \leq 2$ normal kısıtlara ilave edilir.

c) x_3 işaretten bağımsız (pozitif yada negatif) $x_3 = x_3' - x_3''$ konur $x_3' \geq 0$ $x_3'' \geq 0$ olduğundan

$x_3' < x_3'' \Rightarrow x_3 < 0$ dır. $x_3' \geq x_3'' \Rightarrow x_3 > 0$ dır

$x_3' = x_3'' \Rightarrow x_3 = 0$ dır.

yukarıdaki yaptığımız işlemleri verilen probleme uygulayalım.

$$Maks = 10(x_1'-3) - 5(x_2'-1) - 2(x_3'-x_3'')$$

$$-2(x_1'-3) + 1(x_2'-1) + 3(x_3'-x_3'') \leq 10$$

$$x_1'-3 + x_2'-1 - 5(x_3'-x_3'') = 8$$

$$x_1'-3 \geq -3 \qquad -1 \leq x_2'-1 \leq 1$$

$$x_1', x_2', x_3', x_3'' \geq 0$$

3

$Maks\ z = 10x_1' - 5x_2' - 2x_3' + 2x_3''$

$-2x_1' + 6 + 3x_2' - 3 + 3x_3' - 3x_3'' \leq 10$

$x_1' - 3 + x_2' - 1 - 5x_3' + 5x_3'' = 8$

$x_1' \geq 0 \quad 0 \leq x_2' \leq 2$ halline gelir.

$Maks\ z = 10x_1' - 5x_2' - 2x_3' + 2x_3'' - 25$

$-2x_1' + 3x_2' + 3x_3' - 3x_3'' \leq 7$

$x_1' + x_2' - 5x_3' + 5x_3'' = 12$

$x_2' \leq 2$

$x_1' \geq 0 \quad x_2' \geq 0 \quad x_3', x_3'' \geq 0$ olur.

$Maks\ z = 10x_1' - 5x_2' - 2x_3' + 2x_3'' - 25 - Mx_5$ konur.

$-2x_1' + 3x_2' + 3x_3' - 3x_3'' + x_4 = 7$

$x_1' + x_2' - 5x_3' + 5x_3'' + x_5 = 12$

$x_2' + x_6 = 2$

Tablosu

B		C	c_1' 10	c_2' −5	c_3' −2	c_3'' 2	c_4 0	c_5 −M	c_6 0	
i	c_i	v_0	v_1'	v_2'	v_3'	v_3''	v_4	v_5	v_6	Oran
4	0	$x_4=7$	−2	3	+3	−3	1	0	0	X
5	−M	$x_5=12$	1	1	−5	5	0	1	0	12/5
6	0	$x_6=2$	0	1	0	0	0	0	1	X
$C_i - z_i$		$z_0=12M$	10+M	−5+M	−2−5M	2+5M	0	0	0	

↑ TÇ

$\begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$ ← TÇ

↑ TG

(4) Tabana V_3'' girer V_5 çıkar yeni tabanımız (V_4, V_3'', V_6) olur Tersini alalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 satır 5'e bölünür

İkinci satırın 3 katı 1. satıra ilave edilir

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B		C	c_1	c_2'	c_2'	c_3''	c_4	c_5	c_6
			10	-5	-2	2	0	-M	0
1	c_j	v_0	v_1	v_2'	v_2'	v_3''	v_4	v_5	v_6
4	0	$x_4 = 21/5$	-7/5	18/5	0	0	1	3/5	0
3''	2	$x_3'' = 12/5$	1/5	1/5	-1	1	0	1/5	0
6	0	$x_6 = 2$	0	1	0	0	0	0	1
$c_r - z_r$		$z_0 = 24/5$	48/5	-23/5	0	0	0	-M-2/5	0

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{T.G}$$

↑ TG $(V_4, V_1, V_6)^{-1} = ?$

$$(V_4, V_1, V_6) \sim \begin{pmatrix} 1 & -7/5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -7/5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5

B		C	C_1	C_2'	C_3'	C_3''	C_4	C_5	C_6	
			10	-5	-2	2	0	-M	0	
j	C_j	b_0	x_1	x_2'	x_3'	x_3''	x_4	x_5	x_6	OR
4	0	$x_4=31$	0	5	-7	7	1	2	0	
1	10	$x_1=12$	1	1	-5	5	0	1	0	X
6	0	$x_6=2$	0	1	0	0	0	0	1	X
C_i-Z_i		$Z_0=120$	0	-15	48	-48	0	-M+10	0	

TG ← (yok)

↑ TG

Sınırsız Çözüm

$$V_0 = 31V_4 + 12V_1 + 2V_6$$

$$\lambda V_3' = -7V_4 - 5V_1 + 0V_6$$

$$V_0 - \lambda V_3' = (31+7\lambda)V_4 + (12+5\lambda)V_1 + 2V_6$$

$$V_0 = (31+7\lambda)V_4 + (12+5\lambda)V_1 + 2V_6 + \lambda V_3'$$

$x_1' = 12+5\lambda \quad x_2' = 0 \quad x_3' = \lambda \quad x_3'' = 0 \quad x_4 = 31+7\lambda$

$x_5 = 0 \quad x_6 = 2$

$$\text{Mak } Z = 10x_1 - 5x_2' - 3x_3' + 2x_3'' - 25 - Mx_5$$

$$\text{Mak}_Z = 10(12+5\lambda) - 5.0 - 3.\lambda + 2.0$$

$$= 120 + 50\lambda - 3\lambda$$

$$= 120 + 47\lambda$$

6

DUAL

Min $z = x_1 + x_2 + x_3$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 30$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$Max W = 20y_1 + 30y_2$

$2y_1 + y_2 \leq 1$

$y_1 + 2y_2 \leq 1$

$4y_1 + y_2 \leq 1$

y_1, y_2 işaretten bağımsız

$y_1 = y_1' - y_1''$ $\quad y_2 = y_2' - y_2''$

$Max W = 20y_1' - 20y_1'' + 30y_2' - 30y_2''$

$2y_1' - 2y_1'' + y_2' - y_2'' \leq 1$

$y_1' - y_1'' + 2y_2' - 2y_2'' \leq 1$

$4y_1' - 4y_1'' + y_2' - y_2'' \leq 1$

$Max W = 20y_1' - 20y_1'' + 30y_2' - 30y_2''$

$2y_1' - 2y_1'' + y_2' - y_2'' + y_3 = 1$ $\quad y_3 \to x_1$

$y_1' - y_1'' + 2y_2' - 2y_2'' + y_4 = 1$ $\quad y_4 \to x_2$

$4y_1' - 4y_1'' + y_2' - y_2'' + y_5 = 1$ $\quad y_5 \to x_3$

$y_1', y_1'', y_2', y_2'', y_3, y_4, y_5 \geq 0$

7

B		C	c_1'	c_1''	c_2'	c_2''	c_3	c_4	c_5	
			20	-20	30	-30	0	0	0	Or
i	c_i	v_0	v_1'	v_1''	v_2'	v_2''	v_3	v_4	v_5	
3	0	$x_3=1$	2	-2	1	-1	1	0	0	1
4	0	$x_4=1$	1	-1	2	-2	0	1	0	1/2
5	0	$x_5=1$	4	-4	1	-1	0	0	1	4
c_i-z_i		$z_0=0$	20	-20	30	-30	0	0	0	

$$T_{q_1}=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & -1/2 & 1\end{pmatrix}$$

↑ TG

$$(v_3\ v_2'\ v_5)\ N\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$N\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$N\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1\end{pmatrix}$$

B		C	c_1'	c_1''	c_2'	c_2''	c_3	c_4	c_5	
			20	-20	30	-30	0	0	0	
i	c_i	v_0	v_1'	v_1''	v_2'	v_2''	v_3	v_4	v_5	Or
3	0	$x_3=1/2$	3/2	-3/2	0	0	1	-1/2	0	1/3
2'	30	$x_2'=1/2$	1/2	-1/2	1	-1	0	1/2	0	1/0
5	0	$x_5=1/2$	7/2	-7/2	0	0	0	-1/2	1	1/7
c_i-z_i		$z_0=15$	5	-5	0	0	0	-15	0	

$$T_{q_2}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3/2\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 2/7\end{pmatrix}$$

v_1' girecek ~~x~~ ~~yok~~ v_5 çıkar. ~~v_3'ü çıkaralım.~~

8

$$(v_3\ v_2'\ v_1') \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$$

B		C	c_1'	c_1''	c_2'	c_2''	c_3	c_4	c_5
			20	-20	30	-30	0	0	0
j	c_j	v_0	v_1'	v_1''	v_2'	v_2''	v_3	v_4	v_5
3	0	$x_3 = 11/14$	0	0	0	0	1	$-2/7$	$-3/7$
2'	30	$x_2' = 3/7$	0	0	1	$-1/2$	0	$4/7$	$-1/7$
1'	20	$x_1' = 1/7$	1	-1	0	0	0	$-1/7$	$2/7$
$c_j - z_j$		$110/7$	0	0	0	-15	0	$-100/7$	$-10/7$

$x_1 = x_1' - x_1'' = 1/7 - 0 = 1/7$

$x_2 = x_2' - x_2'' = 3/7 - 0 = 3/7$ $\quad z^* = \frac{110}{7}$

$x_1 = y_1$ $x_2 = y_2$ denklem.

yani $y_1 = 1/7$ $y_2 = 3/7$ $\quad z^* = \frac{110}{7}$ denklem.

$c_3 - z_3 = 0 \quad c_3 = 0 \quad z_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$c_4 - z_4 = -\frac{100}{7} \quad c_4 = 0 \quad z_4 = \frac{100}{7} \Rightarrow x_2 = \frac{100}{7}$

$c_5 - z_5 = -\frac{10}{7} \quad c_5 = 0 \quad z_5 = \frac{10}{7} \Rightarrow x_3 = \frac{10}{7}$