

1

OYUNLAR TEORİSİNE GİRİŞ

20.10.2020
Saat 1300

Aşağıda kazanç matrisine sahip 4×4 oyunun tepe noktasını bulunuz.

Sütun oyuncusu Stratejileri	Sütun oyuncusu stratejileri				Sütun En büyüğü
	c_1	c_2	c_3	c_4	
r_1	-8	7	2	3	-8
r_2	1	-6	-2	5	-6
r_3	7	5	3	4	3
r_4	4	-4	-8	6	-8
Sütun En büyüğü	7	7	3	6	$3=3$

Çözüm : oyunun tepe noktasını belirleyebilmek için önce her satırın en küçük değeriyle satır en küçüğü başlığı sütunu, daha sonra her sütunun en büyük değeriyle sütun en büyük başlıklı satırı oluşturalım. oluşturulan sütunu oyun matrisinin sütunlarına satırı ise satırlarına ekleyelim. Şimdiye sırasıyla oyunun alt değeri α ve üst değeri β bulalım.

$$\text{oyunun alt değeri} = \alpha = \max(-8, -6, 3, -8) = 3$$

$$\text{oyunun üst değeri} = \beta = \min(7, 7, 3, 6) = 3$$

$3=3$ olduğundan oyunun tepe noktası vardır.

[2] Bu noktada kesişen iki stratejiden R_3 satır oyuncusunun C_3 sütun oyuncusu en iyi stratejilerdir. Oyunun ortalama değeri $V=3$ olduğundan oyun satır oyuncusu için çekicidir. uygulamada tere noktali bir oyunla karşılaşma olasılığı, tere noktası bulunmayan bir oyunla karşılaşma olasılığından daha küçüktür. Eşit olmayan alt ve üst sınırlarla yani tere noktasız oyunlarla karşılaşmak daha geneldir. örnek: kazanç matrisi aşağıdaki gibi olan bir oyunun tere noktasını bulunuz.

Satır oyuncusunun stratejileri	Sütun oyuncusu stratejileri				Satır en küçüğü
	C_1	C_2	C_3	C_4	
R_1	8	-7	12	13	-7
R_2	1	6	-2	5	-2
R_3	10	5	-4	4	-4
Sütun En Büyükü	10	6	12	13	6 $\neq$ -2

Gözümü önce her satırın en küçüğü, satır en küçüğü başlıklı sütunu daha sonrada her sütunun en büyük değeriyle, sütun en büyüğü başlıklı satırı oluşturalım. Şimdide sırasıyla oyunun alt ve üst değerlerini bulalım.

$$\text{oyunun alt değeri} = \alpha = \max(-7, -2, -4) = -2$$

$$\text{oyunun üst değeri} = \beta = \min(10, 6, 12, 13) = 6$$

$-2 \neq 6$ olduğundan bu oyunun tere noktası yoktur.

2 Tepe Noktası olmayan oyunlarda vardır.

Sattır oyuncusu stratejisi	Sattır oyuncusu stratejisi			Sattır en küçük
	$C_1 q_1$	$C_2 q_2$	$C_3 q_3$	
$R_1 p_1$	2	0	3	0
$R_2 p_2$	2	5	0	0
$R_3 p_3$	-2	6	6	-2
Sattırın en büyük	2	6	6	$2 \neq 0$

$$\underbrace{2p_1 + 2p_2 - 2p_3}_{\text{I}} = \underbrace{5p_2 + 6p_3}_{\text{II}} = \underbrace{3p_1 + 6p_3}_{\text{III}}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \Rightarrow 2p_1 + 2p_2 - 2(1 - p_1 + p_2) &= 2p_1 + 2p_2 - 2 + 2p_1 + 2p_2 \\ \Rightarrow 4p_1 + 4p_2 - 2 &\Rightarrow \text{I denklem.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \Rightarrow 5p_2 + 6(1 - p_1 + p_2) &= 5p_2 + 6 - 6p_1 - 6p_2 \\ \Rightarrow -p_2 - 6p_1 + 6 &\Rightarrow -6p_1 - p_2 + 6 \quad \text{II denklem} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III} \Rightarrow 3p_1 + 6(1 - (p_1 + p_2)) &= 3p_1 + 6 - 6p_1 - 6p_2 \\ \Rightarrow -3p_1 - 6p_2 + 6 \end{aligned}$$

$$\text{I} = \text{II} \Rightarrow 4p_1 + 4p_2 - 2 = -6p_1 - p_2 + 6$$

$$\boxed{10p_1 + 5p_2 = 8}$$

$$\text{I} = \text{III} \Rightarrow 4p_1 + 4p_2 - 2 = -3p_1 - 6p_2 + 6$$

$$\boxed{7p_1 + 10p_2 = 8}$$

3

$$\begin{aligned} -2/ \quad 10P_1 + 5P_2 &= 8 \\ 7P_1 + 10P_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -20P_1 - 10P_2 &= -16 \\ 7P_1 + 10P_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$\hline -13P_1 = -8 \quad \boxed{P_1 = 8/13}$$

$$7P_1 + 10P_2 = 8 \quad \frac{56}{13} + 10P_2 = 8 \quad 10P_2 = 8 - \frac{56}{13}$$

$$10P_2 = \frac{104 - 56}{13} \quad 10P_2 = \frac{48}{13} \quad P_2 = \frac{48}{130} = \frac{24}{65}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1 \quad P_3 = 1 - P_1 - P_2 = \frac{1}{1} - \frac{8}{13} - \frac{24}{65}$$

(65) (5) (1)

$$P_3 = \frac{65 - 40 - 24}{65} = \frac{1}{65}$$

$$\boxed{P_1 = 8/13 \quad P_2 = 24/65 \quad P_3 = 1/65}$$

2ci oyuncuya göre olasılıklar.

$$\begin{aligned} \text{I} \Rightarrow 2q_1 + 3q_3 &= 2q_1 + 3(1 - (q_1 + q_2)) = 2q_1 + 3 - 3q_1 - 3q_2 \\ &= -q_1 - 3q_2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \Rightarrow 2q_1 + 5q_2 &= 2q_1 + 5(\cancel{1 - (q_1 + q_2)}) = 2q_1 + 5 - 5q_1 - 5q_2 \\ &= \cancel{-3q_1 - 5q_2 + 5} = 2q_1 + 5q_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III} \Rightarrow -2q_1 + 6q_2 + 6q_3 &= -2q_1 + 6q_2 + 6(1 - (q_1 + q_2)) \\ &= -2q_1 + 6q_2 + 6 - 6q_1 - 6q_2 = -8q_1 + 6 \end{aligned}$$

4

$I = II$ den.

$$-a_1 - 3a_2 + 3 = 2a_1 + 5a_2$$

$$-3a_1 - 8a_2 + 3 = 0$$

$$\boxed{3a_1 + 8a_2 = 3}$$

$I = III$

$$-a_1 - 3a_2 + 3 = -8a_1 + 6$$

$$\boxed{9a_1 - 3a_2 = 3}$$

$$3/ 3a_1 + 8a_2 = 3$$

$$9a_1 - 3a_2 = 3$$

$$-9a_1 - 24a_2 = -9$$

$$\underline{9a_1 - 3a_2 = 3}$$

$$-27a_2 = -6$$

$$a_2 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \Rightarrow 3a_1 + 8a_2 = 3$$

$$3a_1 + \frac{24}{9} = 3$$

$$3a_1 = 3 - \frac{24}{9} \Rightarrow 3a_1 = \frac{3}{9} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{1}{9}}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$a_3 = 1 - a_1 - a_2 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{9} \mid a_2 = \frac{2}{9} \mid a_3 = \frac{5}{9}}$$

Bu değerleri birde formülle hesaplayalım.

$$(P_1, P_2 \dots P_n) = \frac{B \cdot \text{Adj} A}{B \text{ Adj} A B^T} (a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\text{Adj} A \cdot B^T}{B \text{ Adj} A \cdot B^T}$$

$$\cancel{V = \frac{B \cdot \text{Adj} A}{B \text{ Adj} A B^T}}$$

$$V = (P_1, P_2 \dots P_n) A B^T = (a_1, a_2 \dots a_n) A^T B^T$$

5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}=30 \quad a_{12}=12 \quad a_{13}=22$$

$$a_{21}=-18 \quad a_{22}=18 \quad a_{23}=12$$

$$a_{31}=-15 \quad a_{32}=-6 \quad a_{33}=10$$

$$\det A = 126 \quad B = [1, 1, 1] \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} \frac{30}{126} & \frac{18}{126} & \frac{-15}{126} \\ \frac{-12}{126} & \frac{18}{126} & \frac{6}{126} \\ \frac{22}{126} & \frac{-12}{126} & \frac{10}{126} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (P_1, P_2, P_3) &= \frac{B \cdot \text{Adj } A}{B \text{ Adj } A B^T} = \frac{[1, 1, 1] \begin{bmatrix} \frac{30}{126} & \frac{18}{126} & \frac{-15}{126} \\ \frac{-12}{126} & \frac{18}{126} & \frac{6}{126} \\ \frac{22}{126} & \frac{-12}{126} & \frac{10}{126} \end{bmatrix}}{[1, 1, 1] \begin{bmatrix} \frac{30}{126} & \frac{18}{126} & \frac{-15}{126} \\ \frac{-12}{126} & \frac{18}{126} & \frac{6}{126} \\ \frac{22}{126} & \frac{-12}{126} & \frac{10}{126} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \\ &= \frac{[\frac{30}{126} - \frac{12}{126} + \frac{22}{126}, \frac{18}{126} + \frac{18}{126} - \frac{12}{126}, \frac{-15}{126} + \frac{6}{126} + \frac{10}{126}]}{[40/126, 24/126, 1/126]} \\ &= \frac{[40/126 + 24/126 + 1/126]}{65/126} \end{aligned}$$

$$(P_1, P_2, P_3) = (40/65, 24/65, 1/65) \text{ cde edlin.}$$

$$(q_1, q_2, q_3) = \frac{\text{Adj } A \cdot B^T}{B \text{ Adj } A B^T} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{30}{126} & \frac{18}{126} & \frac{-15}{126} \\ \frac{-12}{126} & \frac{18}{126} & \frac{6}{126} \\ \frac{22}{126} & \frac{-12}{126} & \frac{10}{126} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{65/126}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{30+18-15}{126} \\ \frac{-12+18+6}{126} \\ \frac{22-12+10}{126} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33/126 \\ 12/126 \\ 20/126 \end{bmatrix} \bigg/ \frac{65}{126} = \begin{bmatrix} 33/65 \\ 12/65 \\ 20/65 \end{bmatrix}$$

[6]

$$V = (p_1, p_2, p_3) A B^T = (q_1, q_2, q_3) A^T B^T$$

$1 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 1 \qquad 1 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 1$

$$V = \left(\frac{40}{65}, \frac{24}{65}, \frac{1}{65} \right) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \left[\frac{80}{65} + \frac{48}{65} - \frac{2}{65}, \frac{120}{65} + \frac{6}{65}, \frac{120}{65} + \frac{6}{65} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \left[\frac{126}{65}, \frac{126}{65}, \frac{126}{65} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{378}{65}$$

$$V = \left[\frac{33}{65}, \frac{12}{65}, \frac{20}{65} \right] \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{66}{65} + \frac{60}{65}, \frac{66}{65} + \frac{60}{65}, \frac{-66}{65} + \frac{72}{65} + \frac{120}{65} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{126}{65}, \frac{126}{65}, \frac{126}{65} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{378}{65}$$

7

Üstün ve Baskın Stratejiler

Bir oyunda yer alan stratejilerden biri diğer stratejilerle kıyaslandığında herhangi birinden her bakımdan üstün ise bu oyunda bir üstün (baskın) strateji vardır.

Örnek: Aşağıdaki kazanç matrisinde üstün stratejilerin olup olmadığını belirleyiniz.

I. Stratejiler	II. Oyuncu stratejileri		
	A_1	A_2	A_3
S_1	2000	4000	8000
S_2	2000	0	10.000
S_3	0	2000	-2000

Çözüm: oyun matrisine göre I oyuncu S_1 'i oynarsa rakibin oynayacağı stratejiye bağlı olarak kazançları (2000, 4000, 8000) birim olacaktır.

I oyuncu için S_3 'ü (0, 2000, -2000) oynamak varsa S_1 'i oynamak her durumda daha kazançlıdır. (2000 > 0, 4000 > 2000, 8000 > -2000)

Bu durumda I oyuncu için karşı taraf herhangi bir strateji ile cevap verirse veya S_1 stratejisinin sağlanacağı kazanç her durumda S_3 'den yüksektir. Bu koşullar altında rasyonel olduğu varsayılan I oyuncu hiçbir zaman S_3 'e yönelmeyecektir. Bu durumda S_1 , S_3 'ü eler. Yeni Tablo Aşağıdadır,

8

I oyuncu	Stratejiler	II oyuncu		
		A_1	A_2	A_3
	S_1	2000	4000	8000
	S_2	2000	0	10.000

oyun matrisine göre IIci oyuncunun oynayacağı stratejiler A_1, A_2, A_3 dır. A_1, A_2 arasında bir üstünlük ilişkisi yoktur. A_1 ve A_3 kıyaslanırsa A_1, A_3 göre beskindir ($2000 < 8000, 2000 < 10.000$) Bu durumda IIci oyuncu için karşı taraf hangi stratejiyle cevap verirse versin, A_1 stratejiyle ^{Elde edilen} ~~Sıfırlanan~~ kazanç kayıp A_3 den daha düşüktür. Bu durumda oyunumuz.

I.oyuncu	Stratejiler	II oyuncu	
		A_1	A_2
	S_1	2000	4000
	S_2	2000	0

Ici oyuncu açısından kalan stratejileri dikkate alıp, alternatifler tekrar gözden geçirildiğinde beskin strateji olup incelendiğinde S_2 'i ($2000, 0$) oynamaktansa S_1 'i oynamak her durumda daha kazançlıdır. ($2000 > 2000, 4000 > 0$) Bu durumda Ici oyuncu için karşı taraf hangi strateji ile cevap verirse versin, S_1 stratejisinin sağlayacağı kazanç her durumda S_2 'den yüksektir. Bu koşullar altında, rasyonel olduğu varsayılan I.ci oyuncu hiçbir zaman S_2 'ye yönelmemelidir.

9

S_1, S_2 'ye göre baskın stratejidir. Bu durumda oyunumuzun yeni hali aşağıdaki tablo olacaktır.

I. oyuncu	stratejiler	II. oyuncu	
		A_1	A_2
	S_1	2000	4000

yeni oluşan matrise göre I. oyuncunun S_1 'i oynamak dışında bir seçeneği yoktur.

II. ci oyuncunun seçenekleri ise A_1 oynaması durumunda 2000 birim maliyet A_2 'yi oynaması durumunda ise 4000 birim maliyettir. Buradan A_1 stratejisi baskın stratejidir. Yeni tablo aşağıdadır.

I. oyuncu	stratejiler	II. oyuncu
		A_1
	S_1	2000

Bu koşullar altında I. oyuncu S_1 ve II. oyuncu A_1 stratejilerini uygulayacaktır. Sonuçta

I. ci oyuncu 2000 birim kazanç, Buna karşılık II. ci oyuncu 2000 birim maliyetle karşılaşacaktır. $V=2000$ dir.