$\boxed{1}$ 30.10.2020

Saat $9^{00}$

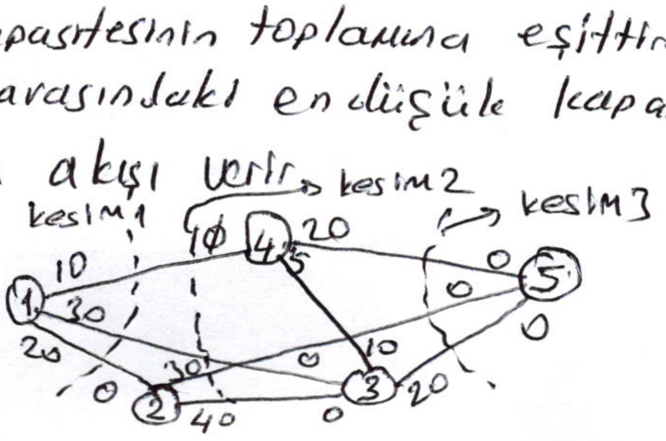
# YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Maksimum Akış algoritması: Petrol kuyularından rafinerilere ham petrol taşıyan petrol boru hattı şebekesini ele alalım. Aradaki güçlendirme ve pompalama istasyonları, şebekedeki ham petrolü nakletmek için uygun tasarım uzaklıklarında kurulurlar. Her boru parçası sonlu maksimum hızda petrol akışına sahiptir. Bir boru parçası tasarıma göre tek yönlü veya iki yönlü olabilir. Tek yönlü bir parça bir yönde sonlu kapasiteye sahipken aksi yönde sıfır kapasitelidir. Kuyular ve rafineriler arasındaki şebekenin maksimum kapasitesini nasıl belirleyebiliriz?

$i<j$ olmak üzere $(i,j)$ bağlantısı verildiğinde $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$ notasyonu ile sırasıyla $i \to j$ ve $j \to i$ yönlerindeki çıkış kapasitelerini göstermek üzere $\bar{C}_{ij}$ yi $i$'nin $\bar{C}_{ji}$ yide


$j$'nin yanına yazarız.

Kesim Sayısı: Bir kesim şebekeden silindiği zaman kaynak ve düğümler arasında kesilmeye neden olan bağlantılar kümesi olarak tanımlanır. Kesme kapasitesi ilgili bağlantıların kapasitesinin toplamına eşittir. Şebekedeki tüm olası kesimler arasındaki en düşük kapasiteli kesim, şebekedeki maksimum akışı verir.



2

| kesim | ilgili bağlantılar | kapasite |
| --- | --- | --- |
| 1 | (1,2), (1,3), (1.4) | 10+30+20=60 |
| 2 | (1.4), (1,3), (2,5), (2,3) | 10+30+30+40=110 |
| 3 | (4,5), (2,5), (3,5) | 20+30+20=70 |

Buradanda anlaşılacağı üzere Min (60, 110, 70)=60 maksimum kapasitedir.

Maksimum akış algoritması: Maksimum akış algoritmasının düşüncesi kaynak ve sonuç düğümlerini bağlayan net pozitif akışlı çıkış yolunu bulmaktır.

($\bar{C}_{ij}$, $\bar{C}_{ji}$) başlangıç kapasiteli (i, j) bağlantısını ele alalım. Algoritmanın hesaplamaları yapıldıkça bu kapasitelerin dilimleri bağlantı içindeki akışa yüklenecektir. Bağlantının kalan kapasiteleri, buna uygun biçimde değişecektir. Biz bu kalan kapasiteleri göstermek için ($c_{ij}$, $c_{ji}$) notasyonunu kullanacağız. kalan kapasiteleri güncelleştirilmiş şebekede kalan kapasite şebekesi diye adlandırılacaktır.

i düğümünden gelen akışı alan j düğümü için [$a_j$, i] gibi bir etiket tanımlarız. Burada $a_j$ i düğümünden j. düğümüne akıştır.

3 **1. adım:** Tüm $(i,j)$ bağlantıları için kapasiteyi başlangıç kapasitesine eşitle yani $(c_{ij}, c_{ji}) = (\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$ olarak göster $a_1 = \infty$ ve 1 düğümünün etiketi $[\infty -]$ olsun $i=1$ olarak belirle ve 2. adıma geç

**2. adım** $S_i$'yi pozitif kalan kapasiteli (yani, tüm $j \in S_i$ler için $c_{ij} > 0$ bağlantılarla $i$ düğümünden doğrudan ulaşılabilen etiketlenmemiş $j$ düğümleri kümesi olarak belirle $S_i \neq \phi$ ise 3. adıma geç aksi halde 4. adıma geç

**3. adım,** $k \in S_i$'yi öyle belirle ki

$$c_{ik} = \max_{j \in S_i} \{c_{ij}\}$$

olsun, $a_k = c_{ik}$ ve $k$ düğümünü $[a_k, i]$ ile belirle ve $k$ düğümünü $[a_k, i]$ ile etiketle son düğüm etiketlenmiş ise (başka bir değişle $k=n$ ise) ve çıkış yolu bulunmuşsa 5. adıma geç. Aksi halde $i=k$ olarak belirleyerek 2. adıma geç

**4. adım** (geriye dönüş) $i=1$ ise başka bir çıkış olası değildir. 6. adıma geç, Aksi halde $r$'yi $i$ düğümünden bir önceki düğüm olarak etiketle ve $i$'yi $r$'ye komşu olan düğümler kümesinden çıkar. $i=r$ olarak belirle. ve 2.ci adıma geç.

**5. adım:** (Şebekenin belirlenmesi) $N_p = \{1, k_1, k_2 \dots n\}$'yi kaynak 1den son düğüm $n$'ye $p$. çıkış yolunun düğümleri olarak tanımla sonra yol boyunca maksimum akışı

$$f_p = \min\{a_1, a_{k_1}, a_{k_2} \dots a_n\}$$

olarak tanımla. Çıkış yolu boyunca her bağlantının kalan kapasitesi akış yönünde $f_p$ kadar azaltılır. Ve ters yönde $f_p$ kadar artırılır. Yani yol üzerindeki i ve j düğümleri için kalan kapasite akışı o andaki $(c_{ij}, c_{ji})$ yerine

a) akış i'den j'ye ise $(c_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p)$

b) akış j'den i'ye ise $(c_{ij} + f_p, c_{ji} - f_p)$

şeklinde değiştirilir. 4. adımda çıkarılan tüm düğümleri eski durumuna getir. $i=1$ olarak belirle. Ve yeni çıkış yolu girişimi için 2. adıma dön.

6. adım

(a) Bir M çıkış yolu belirlenmiş ise şebekenin maksimum akışı

$$F = f_1 + f_2 + \dots + f_M$$

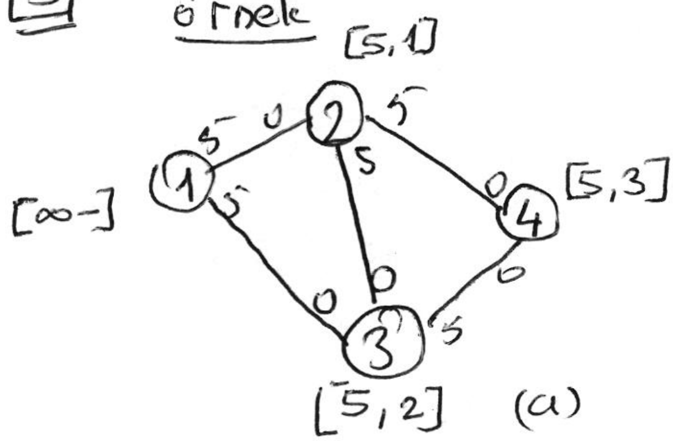
olarak hesapla

(b) $(i, j)$ bağlantısının başlangıç ve sonuç kalan kapasiteleri sırasıyla $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$ ve $(c_{ij}, c_{ji})$ ile verildiğinde optimum akış şöyle hesaplanır.

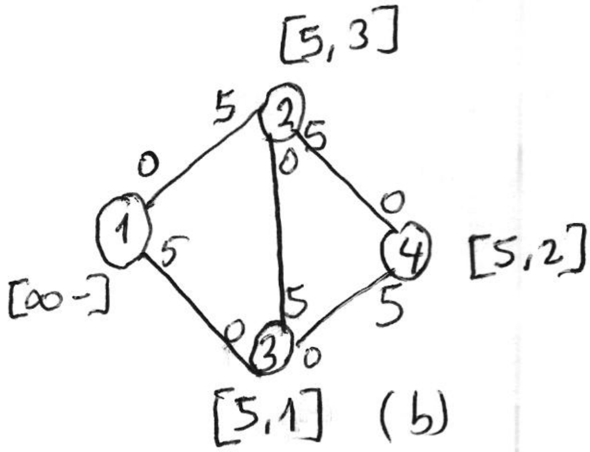
$(\alpha, \beta) = (\bar{C}_{ij} - c_{ij}, \bar{C}_{ji} - c_{ji})$ olsun. $\alpha > 0$ ise i'den j'ye optimum akış $\alpha$'dır. Aksi halde $\beta > 0$ ise, j'den i'ye optimum akış $\beta$ dır. ($\alpha$ ve $\beta$'nın ikisinin birden pozitif olması imkansızdır)

5

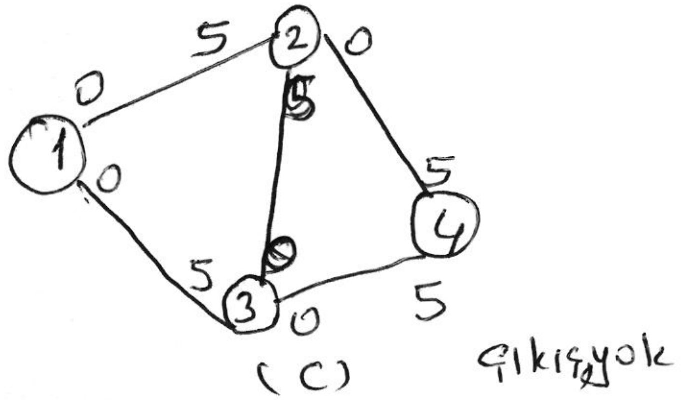
örnek



$1 \to 2 \to 3 \to 4 \quad f_1 = 5$

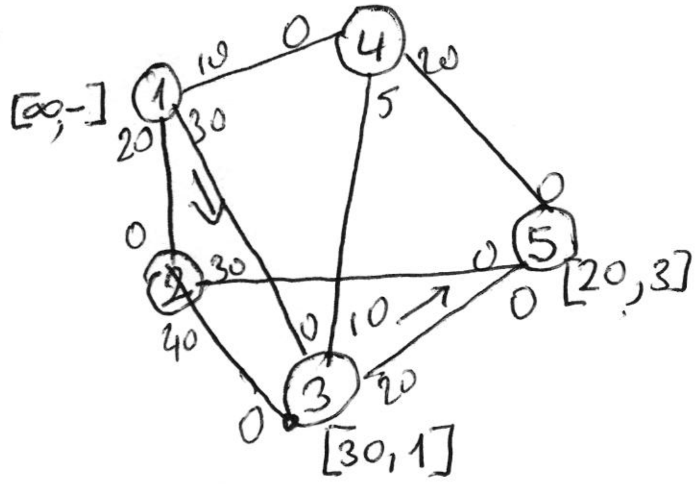


$1 \to 3 \to 2 \to 4 \quad f_2 = 5$



(a) daki şebeke, maksimum akış $f_1=5$ olmak üzere birinci çıkış yolunu $N_1=\{1,2,3,4\}$ olarak verir. Böylelikle 5.ci adımdaki (1,2), (2,3) ve (3,4) bağlantılarının kalan kapasiteleri (5,0) dan (0,5)'e değiştirilir. (b) deki şebeke $f_2=5$ olmak üzere ikinci çıkış yolunun $N_2=\{1,3,2,4\}$ olarak verir. Gerekli akış uygulamaları yapıldıktan sonra başka bir çıkışın olmadığı (c) şebekesine ulaşılır. (b)den (c) ye geçişte yapılan hiç bir şey yoktur. Sadece (2,3) yönünde daha önce yüklenen akış iptal edilmiştir.

6




Şebekenin maksimum akışını hesaplıyalım.

(a) $f_1 = 20$

1. yineleme

1 adım: $a_1 = \infty$ olarak belirle ve 1 düğümünü $[a_1, -]$ ile belirle ve $i = 1$ al.

2 adım $S_1 = \{2, 3, 4\} \neq \emptyset$

3 adım $k = 3$ çünkü $c_{13} = \text{mak}[c_{12}, c_{13}, c_{14}] = \text{mak}[20, 30, 10] = 30$ $a_3 = c_{13} = 30$ olarak belirle 3. düğümü $[30,1]$ olarak etiketle. $i = 3$ olarak belirle. Ve 2ci adımı tekrarla.

2 adım $S_3 = [4, 5]$

3 adım $k = 5$ ve $a_5 = c_{35} = \text{mak}[10, 20] = 20$. 5.ci düğümü $[20,3]$ ile etiketle. çıkışı gerçekleştir, 5ci adıma geç.

5 adım çıkış yolu 5.ci düğümden başlayan ve 1ci düğümde biten etiketlerden meydana gelir. yani $(5) \to [20,3] \to (3) \to [30,1] \to (1)$ dir.

Böylece $N_1 = \{1, 3, 5\}$ ve $f_1 = \min\{a_1, a_2, a_3\}$
$= \min\{\infty, 30, 20\} = 20$

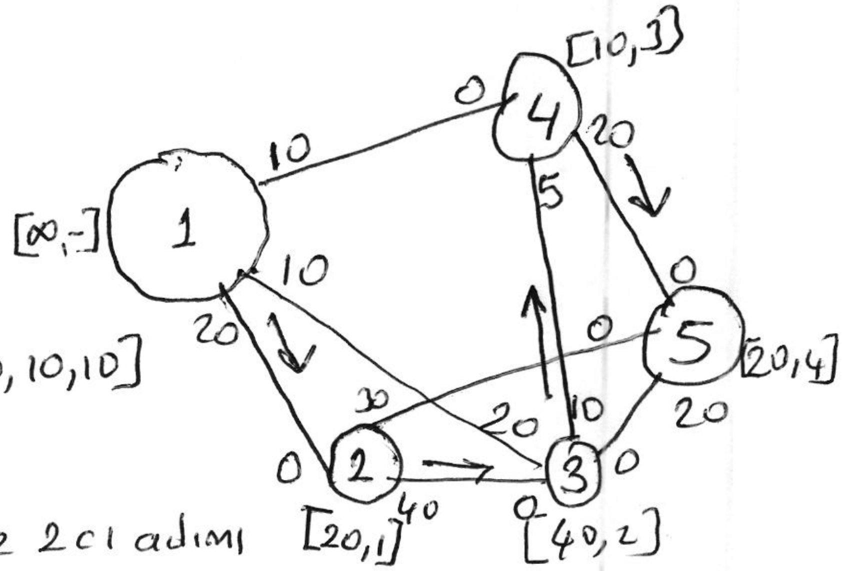
$N_1$ boyunca kalan kapasiteler $(c_{13}, c_{31}) = (30-20, 0+20)$
$= (10, 20)$

7 $(c_{35}, c_{53}) = (20-20, 0+20) = (0, 20)$

2 yineleme.

1. adım: $a_1 = \infty$ olarak belirle ve 1 düğümünü $[a_1, -]$ ile etiketle.

2. adım $S_1 = \{2, 3, 4\}$




3 adım $k=2$ ve

$a_2 = q_2 = \text{mak}[20, 10, 10]$
$= 20$

$i=2$ olarak belirle ve 2ci adımı tekrarla.

2 adım $S_2 = \{3, 5\}$

3 adım $k=3$ ve $a_3 = c_{23} = 40$ 3. cü düğümü $[40,2]$ olarak belirle ve 2ci adımı tekrarla.

2 adım $S_3 = \{4\}$ ($c_{35} = 0$ olduğundan 5ci düğüm $S_3$de yer almaz.)

3 adım. $k=4$ ve $a_4 = c_{34} = 10$ 4 cü düğümü $[10,3]$ ile etiketle, $i=4$ olarak belirle ve 2.ci adımı tekrarla.

2 adım: $S_4 = \{5\}$ 1 ve 3 cü düğümler etiketli olduğu için sadece 5 düğüme ulaşılır.

8

3. adım $k=5$ ve $a_5 = c_{45} = 20$ 5. ci düğümü [20,4] ile etiketle çıkışı gerçekleştir. 5. adıma git

5. adım $N_2 = \{1,2,3,4,5\}$ ve $f_2 = \min[\infty, 20, 40, 10, 20] = 10$

$N_2$ boyunca kalan kapasiteler.

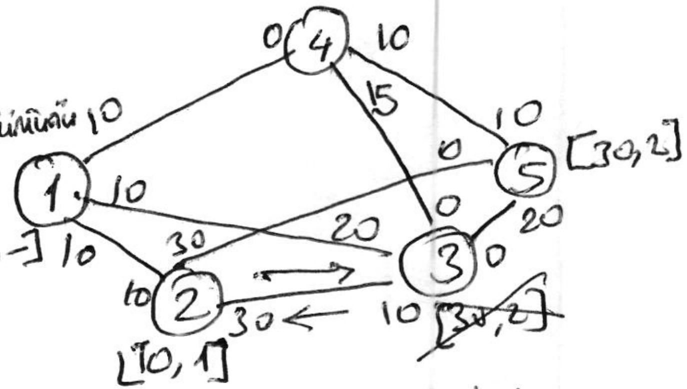
$(c_{12}, c_{21}) = (20-10, 0+10) = (10, 10)$

$(c_{23}, c_{32}) = (40-10, 0+10) = (30, 10)$

$(c_{34}, c_{43}) = (10-10, 5+10) = (0, 15)$

$(c_{45}, c_{54}) = (20-10, 0+10) = (10, 10)$

3 yineleme




1. adım $a_1 = \infty$ olarak belirle ve 1 düğümünü [a, ∞] ile etiketle $i=1$ olarak belirle.

2 adım. $S_1 = \{2,3,4\}$

3 adım $k=2$ ve $a_2 = c_{12} = \text{mak}\{10, 10, 10\} = 10$ (eşitlik durumunda rastgele seçim yapılır. 2 düğümünü [10,1] ile etiketle $i=2$ olarak belirle ve 2. adımı tekrarla

2 adım $S_2 = \{3, 5\}$

3 adım $k=3$ ve (eşitlik durumunda rastgele seçim yapılır) 3. cü düğümünü [30, 2] olarak ile etiketle $i=3$ olarak belirle ve 2. adımı tekrarla

2 adım $S_3 = \phi$ (çünkü $c_{34} = c_{35} = 0$) Geriye dönüş için 4. adıma git.

$\boxed{8}$ 3. adım $k=5$ [illegible],

9

4. adım 3. düğümdeki [30,2] etiketi hemen önceki düğüm r=2'yi verir. 3 düğümünü bu yinelemenin sonraki aşamalarında dikkate almamak için üzerine çarpı koyarak i=r=2 olarak belirle ve adım 2'yi tekrarla.

2 adım $S_2=\{5\}$ (3 düğümünün geriye dönüş adımından çıkarılmıştır)

3 adım $k=5$ $a_5=c_{25}=30$ 5 düğümünü [30,2] olarak belirle çıkışı gerçekleştir. 5c adıma git.

5 adım $N_3=\{1,2,5\}$ ve $f_3=\min\{\infty, 10, 30\}=10$

$N_3$ boyunca kalan kapasiteler

$(c_{12}, c_{21})=(10-10,\ 10+10)=(0,20)$

$(c_{25}, c_{52})=(30-10,\ 0+10)=(20,10)$

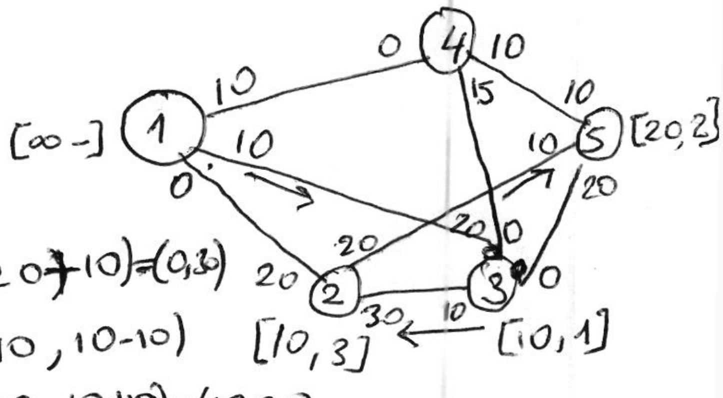
· 4 Yineleme

Bu yinelemede $f_4=10$ olduğundan $N_4=\{1,3,2,5\}$

$(c_{13}\ c_{31})=(10-10\ \ 20+10)=(0,30)$

$(c_{23}, c_{32})=(30+10, 10-10)$

$(c_{25}, c_{52})=(20-10\ \ 10+10)=(10,20)$

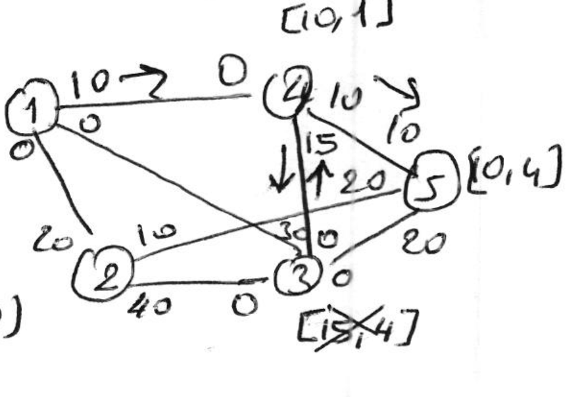


5. Yineleme

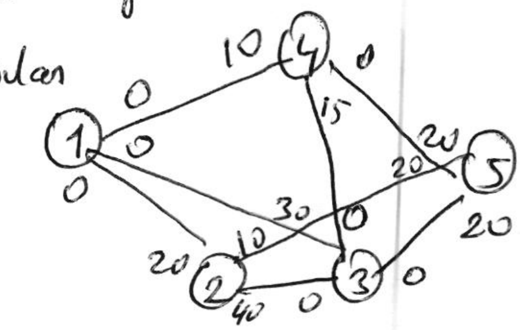
Bu yinelemede $f_5=10$ olduğundan $N_5=\{1,4,5\}$

$(c_{14}\ c_{41})\ \left(\underset{0}{10-10},\ \underset{10}{0+10}\right)$

$(c_{45}\ c_{54})=\left(\underset{0}{10-10},\ \underset{20}{10+10}\right)$



6. yinelemei 1 düğümü dışında tüm bağlantıların kalan kapasiteleri sıfır olduğundan başka olası bir çıkış yoktur. 6. adıma dönüp çözümü elde ederiz




6. adım  şebekedeki maksimum akış   çıkış yok

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$$

Farklı bağlantılardaki akışlar aşağıdaki tabloda verildiği gibi 6.cı adımdaki son kalan kapasitelerin [başka bir değişle $(c_{ij}, c_{ji})_6$ ların] başlangıç kapasiteleri $(\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji})$ lerden çıkarılmasıyla elde edilir.

| | $(\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji}) - (c_{ij} - c_{ji})_6$ | Akış miktarı | Yön |
|---|---|---|---|
| (1,2) | $(20,0) - (0,20) = (20,-20)$ | 20 | 1→2 |
| (1,3) | $(30,0) - (0,30) = (30,-30)$ | 30 | 1→3 |
| (1,4) | $(10,0) - (0,10) = (10,-10)$ | 10 | 1→4 |
| (2,3) | $(40,0) - (40,0) = (0,0)$ | 0 | ~~2→3~~ |
| (2,5) | $(30,0) - (10,20) = (20,-20)$ | 20 | 2→5 |
| (3,4) | $(10,5) - (0,15) = (10,-10)$ | 10 | 3→4 |
| (3,5) | $(20,0) - (0,20) = (20,-20)$ | 20 | 3→5 |
| (4,5) | $(20,0) - (0,20) = (20,-20)$ | 20 | 4→5 |