10.11.2020

OYUNLAR TEORİSİNE GİRİŞ

Örnek problem: B oyuncusu gizlice $\{1,2,...,5\}$ rakamlarından birini yazıyor ve A oyuncusu bunun ne olduğunu tahmin etmeye çalışıyor. Eğer A oyuncusu doğru tahmin ederse, 3 birim kazanıyor. Aksi takdirde 2 birim kaybediyor. Oyuncuların optimal stratejilerini ve oyun değerini bulunuz.

B

		1	2	3	4	5
A	1	3	-2	-2	-2	-2
	2	-2	3	-2	-2	-2
	3	-2	-2	3	-2	-2
	4	-2	-2	-2	3	-2
	5	-2	-2	-2	-2	3

			1	2	3	4	5
P_1		1	5	0	0	0	0
P_2	A	2	0	5	0	0	0
P_3		3	0	0	5	0	0
P_4		4	0	0	0	5	0
P_5		5	0	0	0	0	5

V=1 oyunun sanal değeridir. ama Matrisin her elemanına 2 eklendiğinden oyunun gerçek değeri $V=1-2=-1$ olur.

$$5P_1 = 5P_2 = 5P_3 = 5P_4 = 5P_5 = V$$

$$P_1 = \frac{V}{5} \quad P_2 = \frac{V}{5} \quad P_3 = \frac{V}{5} \quad P_4 = \frac{V}{5}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1 \Rightarrow \frac{V}{5} + \frac{V}{5} + \frac{V}{5} + \frac{V}{5} + \frac{V}{5} = 1$$

$$\boxed{V=1}$$

Örnek Problem

[2] iki kişili oyunu gözönüne alalım. Stratejiler kümesi {Taş kağıt makas} olsun. Oyunun kuralları aşağıda verilsin.

- Taş Makas karşılaşmasında Taş 40 puan kazanıyor
- kağıt taş 〃 kağıt 30 puan kazanıyor
- Makas kağıt karşılaşmasında Makas 50 puan kazanıyor.

ödemeler matrisini yazınız.

	Taş	kağıt	Makas
Taş	0	-30	40
kağıt	30	0	-50
Makas	-40	50	0

Örnek Problem A'nın kazancına göre verilen Matrislerden A ve B oyuncularının optimal stratejilerin ve oyun değerlerini bulunuz.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	2	1	0	1
A_2	0	0	-1	2	1
A_3	1	0	-2	1	2
A_4	1	-4	-3	-1	1
A_5	-2	4	3	-1	-2

A oyuncusu için $2>1$ $2>-4$ $1>-3$ $0>-1$ $1\geq 1$ olduğundan A_1 stratejisi A_4'ü eler.

$\boxed{2}$

Örnek problem: iki kişili oyunu gözönüne alalım. {Taş, kağıt, Makas

$\boxed{3}$

B oyuncusu için $\quad 2>1,\ 0>-1,\ 0>-2 \quad 4>3$

$B_2 \geq B_3$. B_2 elenir.

a)

	B_1	B_3	B_4	B_5
A_1	2	1	0	1
A_2	0	-1	2	1
A_3	1	-2	1	2
A_5	-2	3	-1	-2

b)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-2	-2	2	0
A_2	2	1	1	1
A_3	-3	-5	7	2
A_4	-1	0	-1	-1

A için $\quad 2>-1 \quad 1>0 \quad 1>-1 \quad 1>-1 \quad A_2 > A_4$

A_4 elenir $\quad -2<2 \quad 1 \leq 1 \quad -5 \leq 7$

B için $\quad B_2 < B_3 \quad B_3$ elenir

A için $\quad 2>-2 \quad 1>-2 \quad 1>0$

A_1 elenir. $\quad$ Oyunun değeri $\quad 2q+1(1-q)=-3q+2(1-q)$

$2 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{7}{6} = V_{satır}$

B için. $\quad -2<0 \quad$ B_2 elenir $\quad 2q+1-q=-3q+2-2q$

$1 \leq 1 \quad 6q=1 \quad q=1/6 \quad q+1=-5q+2$

$-5 \leq 2 \quad 2p-3(1-p)$

$= p+2(1-p)$

~~A_1 elenir $2>3 \quad 1>0 \quad A_1$ elenir~~

	B_1 1/6	B_4 5/6
A_2 5/6	+2	ϕ
A_3 1/6	-3	2

$\frac{2 \cdot 5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$

$V_{satır} = 7/6$

$2p-3+3p=p+2-2p$

$5p-3=-p+2$

$6p=5 \quad \boxed{p=5/6}$

4

İKİ MATRİSLİ OYUNLAR VE REAKSİYON FONKSİYONLARI

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Pi_1(p,q)=[p,\ 1-p]\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\ 1-q\end{bmatrix}$$

$$=[3p+1-p,\ 0p+2(1-p)]\begin{bmatrix}q\\ 1-q\end{bmatrix}$$

$$=[2p+1,\ 2-2p]\begin{bmatrix}q\\ 1-q\end{bmatrix}$$

$$=(2p+1)q+(2-2p)(1-q)$$

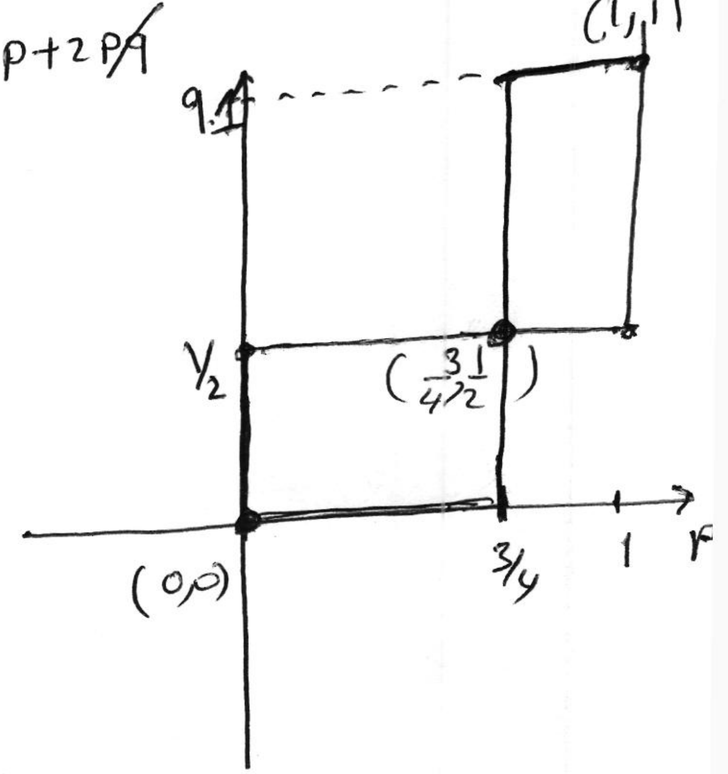
$$=2p\cancel{q}+\cancel{q}+2-2\cancel{q}-2p+2p\cancel{q}$$

$$=4pq-q+2-2p$$

$$=4pq-2p+2-q$$

$$\Pi_1(p,q)=p(4q-2)+2-q$$

$$R_1(q)=\begin{cases}0 & 0\le q<\frac{1}{2}\\ \langle 0,1\rangle & q=\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}<q\le 1\end{cases}$$



$$\Pi_2(p,q)=q(4p-3)-2p+1$$

$$R_2(p)=\begin{cases}0 & 0<p<3/4\\ \langle 0,1\rangle & p=3/4\\ 1 & \frac{3}{4}<p<1\end{cases}$$

$\Pi_1(0,0)=2$ $\quad\Pi_2(0,0)=2$

$\Pi_1(\frac{3}{4},\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$ $\quad\Pi_2(\frac{3}{4},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

$\Pi_1(1,1)=3$ $\quad\Pi_2(1,1)=3$

[5] IMPUTASYONLAR VE ORTAKLI OYUNLAR

Oyun esnasında $\forall i \in I$ oyuncusuna, x_i gibi bir fayda atandığını kabul edelim. Böylece $(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n)$ vektörü ortaya çıkar. Bu paylaşımın oyuncular tarafından kabul edilebilmesi için

1) $x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in I$ (Bireysel rasyonalite)

2) $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(I)$ (Grup rasyonalitesi)

şartlarının sağlanması gerekir.

__Tanım:__ Bireysel rasyonalite ve grup rasyonalitesi şartlarını sağlayan $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektörüne imputasyon denir.

__İmputasyonların baskınlığı__

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ iki imputasyon olsun. K bir koalisyon olmak üzere

1) $\forall i \in K$ için $x_i \geq y_i$

2) $\sum_{i \in K} x_i \leq v(K)$

şartlarını sağlıyorsa x imputasyonu y imputasyonunu K koalisyonu vasıtasıyla basar denir. $x \backslash K$ ile gösterilir.

__Tanım:__ Bir oyunda basılamaz imputasyonların oluşturduğu kümeye oyunun çekirdeği denir ve $Ç(v)$ ile gösterilir. Oyunun çözümü bu çekirdeğin içinde aranır.

6

Teorem: $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ imputasyonunun oyunun çekirdeğine ait olması için gerek ve yeter şart $\forall K \subset I$ koalisyonu ve $\forall i \in K$ oyuncusu için

$$\sum_{i \in K} x_i \geq v(K)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Oyunun çekirdeği bir bölge, nokta veya boş küme olabilir.

Shapley vektörü ödemelerin adil paylaşımı prensibine dayanır. Her oyuncunun oyuna yaptığı katkı oranında oyundan pay almasını önerir.

$$\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \dots, \phi_n(v))$$

vektörüne shapley vektörü denir. Burada $\phi_i(v)$ bileşeni i oyuncusuna atanan ödemeyi gösterir. ve $|K|$, ilgili koalisyondaki oyuncu sayısını göstermek üzere

$$\phi_i(v) = \sum_{i \in K} \frac{(|K|-1)!\,(n-|K|)!}{n!} \underbrace{[v(K) - v(K \setminus i)]}_{\text{i oyuncusunun K koalisyonuna yaptığı katkı}}$$

dır.

Örnek: Bir çiftçinin arazisi kullanım açısından 100.000 p.b değerindedir. Aynı arazi imalat için tesis yeri olarak değerlendirilirse 200.000 p.b değerini bulmaktadır. Bir emlakçı tarafından parsellendiğinde ise değeri 300.000 p.b ne ulaşmaktadır.

a) problemi bir ortaklı oyun olarak formüle ediniz

b) verilen oyunun çekirdeğini bulunuz.

c) oyunun shapley ~~değerini~~ vektörünü bulunuz.

$\boxed{7}$ Çözüm: Çiftçi: Birinci oyuncu
İmalat yapacak kişi: İkinci oyuncu
Emlakçı: üçüncü oyuncu

a) $v(\phi)=0 \qquad v(2,3)=0$

$v(1)=1$

$v(1,2)=2$

$v(1,3)=3$

$v(1,2,3)=v(I)=3$

b) $x_1 \geq 1 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0$

$x_1+x_2 \geq 2 \qquad x_1+x_3 \geq 3$

$x_1+x_2+x_3=3$

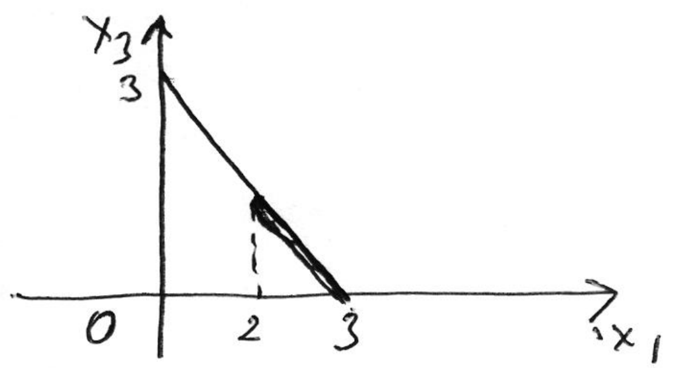
$x_3=3-x_1-x_2 \geq 0$

$2 \leq x_1+x_2 \leq 3$

$x_1+x_3=\cancel{x_1}+\cancel{3}-\cancel{x_1}-x_2 \geq \cancel{3} \qquad x_2 \leq 0 \qquad x_2=0$

$x_1+x_3=3 \Rightarrow x_3=3-x_1$

$Ç(v)=\{(x_1, 0, 3-x_1) \mid x_1 \in [2,3]\}$



$$\phi_i(v)=\sum_{S \subset I} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}\left[v(S)-v(S\setminus i)\right]$$

1 oyuncunun bulunduğu koalisyonlar $\{1\},\{1,2\},\{1,3\},I$

$\boxed{18}$

$$\phi_1(v) = \frac{(1-1)!\,(3-1)!}{3!}\left[v(1)-v(0)\right] + \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}\left[v(1,2)-v(2)\right]$$

$$+ \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}\left[v(1,3)-v(3)\right] + \frac{(3-1)!\,(3-3)!}{3!}\left[v(I)-v(2,3)\right]$$

$$= \frac{0!\ 2!}{3!}\left[1-0\right] + \frac{1!\ 1!}{3!}\left[2-0\right] + \frac{1!\ 1!}{3!}\left[3-0\right]$$

$$+ \frac{2!\ 0!}{3!}\left[3-0\right]$$

$$= \frac{2}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{2}{6}\cdot 3 = \frac{17}{6}$$

$$\phi_2(v) = \frac{(1-1)!\,(3-1)!}{3!}\left[v(2)-v(0)\right] + \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}\left[v(1,2)-v(1)\right]$$

$$+ \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}\left[v(2,3)-v(3)\right] + \frac{(3-1)!\,(3-3)!}{3!}\left[v(1,2,3)-v(1,3)\right]$$

$$= \frac{0!\ 2!}{3!}\underbrace{\left[0-0\right]}_{0} + \frac{1!\ 1!}{3!}\underbrace{\left[2-1\right]}_{1} + \frac{1!\,1!}{3!}\underbrace{\left[3-3\right]}_{0}$$

$$+ \frac{2!\ 2!}{3!}\underbrace{\left[3-3\right]}_{0}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$\phi_3(v) = \frac{(1-1)!\,(3-1)!}{3!}\left[v(3)-v(0)\right] + \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}\left[v(1,3)-v(1)\right]$$

$$+ \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}\left[v(2,3)-v(3)\right] + \frac{(3-1)!\,(3-3)!}{3!}\left[v(1,23)-v(1,2)\right]$$

$$= \frac{0!\ 2!}{3!}\left[0-0\right] + \frac{1,1!}{3!}\left[3-0\right] + \frac{1!\ 1!}{3!}\left[0-0\right] + \frac{2!\,0!}{3!}\left[3-2\right]$$

$\boxed{9}$

$$= 0 + \frac{1}{3!} 3 + \frac{1}{3!} 0 + \frac{1}{3!} 0 + \frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$

2

oyunun shapley vektörü $\phi(v) = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6}\right)$ dır

Yorum yapılırsa 1ci oyuncu 1 kazanacağına $\frac{13}{6}$ ikinci oyuncu hiç kazanmamasına rağmen $\frac{1}{6}$ ve bu keza üçüncü oyuncu hiç kazanmamasına rağmen 4/6 kazanıyor. Ortaklaşmanın bir avantajı olmuş oluyor.