24.11.2020

1

LINEER PROGRAMLAMA TEORİSİ

Konveks kombinezon: $A_1, A_2, \dots, A_n$ vektörlerini (yada noktalarını) gözönüne alalım. $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \geq 0$ $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=1$ koşulları altında $\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+\dots+\alpha_n A_n = A$ vektörüne $A_1, A_2, \dots, A_n$ vektörlerinin bir konveks kombinezonu denir.

Ektrem (Uç) Nokta: konveks bir C bölgesindeki bir X noktası X'den başka ve birbirinden farklı iki noktanın konveks kombinezonu olarak ifade edilemiyorsa bu X noktası ekstrem nokta adını alır.

Teorem: Lineer programlama probleminin uygun çözümleri konveks küme oluşturur.

İspat: $AX=b$ (1.1) $X \geq 0$ (1.2) $\min z = CX$ (1.3)

Lineer programlama probleminin uygun çözümlerinden herhangi iki tanesi $U=(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $V=(v_1, v_2, \dots v_n)$ ve bunların herhangi bir konveks kombinezonuda

$$W=(w_1, w_2, \dots, w_n) = \lambda U+(1-\lambda)V \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

olsun. W'nın bir uygun çözüm olduğunu göstermek yeter.

1°) Önce W'nın (1.1) sisteminin bir çözümü olduğunu gösterelim

$$AW = A(\lambda U+(1-\lambda)V) = A\lambda U + A(1-\lambda)V$$

$$= \lambda AU + (1-\lambda)AV$$

U ve V'nin uygun çözüm olduğundan $AU=b$ ve $AV=b$ olur. $= \lambda b+(1-\lambda)b = \cancel{\lambda b}+b-\cancel{\lambda b} = b$

[2] $Aw = b$ eşitliği sağlanır. Şu halde w bir çözümdür.

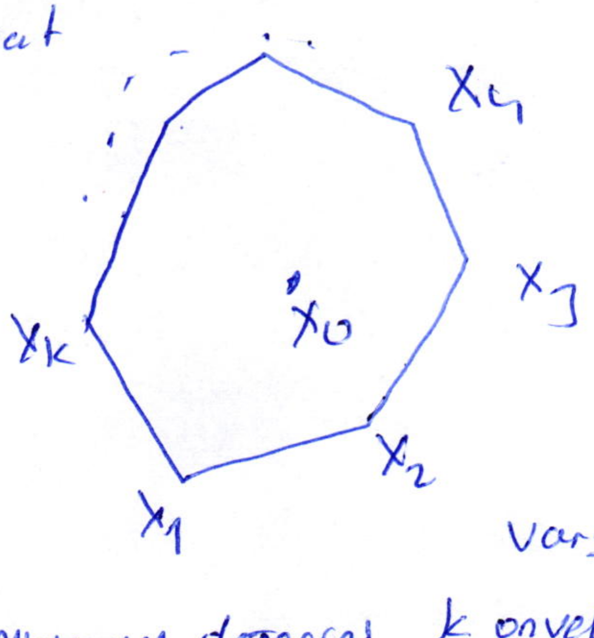
Şimdi $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ (1.2) kısıtlarını sağladığını'da gösterelim.

$$w = \lambda u + (1-\lambda) v \Rightarrow w_i = \lambda u_i + (1-\lambda) v_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$u_i \geq 0$ $v_i \geq 0$ olduğundan $0 \leq \lambda \leq 1$ varsayımı altında. w_i'lerin hiçbiri negatif olamaz. yani (1,2) koşulu da sağlanır. Şu halde w bir uygun çözümdür. Herhangi iki uygun çözümün herhangi bir konveks kombinezonunun da bir uygun çözüm olduğu ispatlandığından Lineer programlama probleminin uygun çözümleri konveks küme oluşturur.

Teorem Lineer programlama probleminde $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ amaç fonksiyon minimum değerini C konveks bölgesinin uç noktalarının birinde alır.

ispat



konveks C bölgesinin birden fazla ekstrem noktası (uç) $x_1, x_2 \dots x_k$ olsun. $z = CX = f(x)$ olsun. varsayalım. amaç fonksiyonu minimum değerini konveks bölgenin x_0 gibi iç noktasında aldığını kabul edelim.

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in K$$

3

x_0 noktası $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ekstrem noktalarının

$$x_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad \left(\lambda_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\right)$$

şeklinde konveks kombinezon olarak yazılır.

$$f(x_0) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)$$

şekline gelir.

$f(x_i)$ $1 \leq i \leq k$ lerin en küçüğü yani $\min f(x_i) = f(x_t)$ olsun. $1 \leq t \leq k$

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_t)$$

$$f(x_0) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_t) = \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)}_{1} f(x_t)$$

$$f(x_0) \geq f(x_t) \quad (a)$$

(b) $f(x_0) \leq f(x)$ idi $\forall x \in K \Rightarrow f(x_0) \leq f(x_t)$

(a) ile (b)den $f(x_0) = f(x_t)$ olur.

Problem

$\text{Mak } z = 3x_1 + 4x_2$

$2x_1 + 3x_2 \leq 1200$

$2x_1 + x_2 \leq 1000$

$4x_2 \leq 800$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\Rightarrow$

$\text{Mak } z = 3x_1 + 4x_2$

$2x_1 + 3x_2 + S_1 = 1200$

$2x_1 + x_2 + S_2 = 1000$

$4x_2 + S_3 = 800$

yandaki problemin optimal tablosu aşağıda verilmiştir.

4

B		C	c_1	c_2	S_1	S_2	S_3
			3	4	0	0	0
i	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
1	3	$x_1=450$	1	0	$-1/4$	$3/4$	0
5	0	$x_5=400$	0	0	-2	2	1
2	4	$x_2=100$	0	1	$1/2$	$-1/2$	0
c_j-z_j		$z_0=1750$	0	0	$-5/4$	$-1/4$	0

a) ilk kısıtın dual fiyatını yani $y_1=?$

b) Sağ taraftaki ilk kısıtın değişim aralığını problemin optimal tablosunu değiştirmeden bulunuz

c) ilk kısıt 1200 olduğundaki problemin optimal çözümünü bulunuz

d) x_1'in fiyatındaki problem optimum kalacak şekildeki değişim aralığı

a) $c_3-z_3=-5/4 \Rightarrow z_3=5/4=y_1$

b) $B^{-1}_{opt}=\begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ S_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1200+D_1 \\ 1000 \\ 800 \end{bmatrix}$$

b) $x_1 = -300 - \frac{1}{4}D_1 + 1000.\frac{3}{4} \Rightarrow 750 - 300 - \frac{1}{4}D_1 > 0$

$450 - \frac{1}{4}D_1 > 0$

$450 > \frac{1}{4}D_1$

$1800 > D_1$

$S_3 = -2400 - 2D_1 + 2000 + 800$

$S_3 = 400 - 2D_1 > 0 \quad D_1 \leq 200$

$x_2 = 600 + \frac{1}{2}D_1 - 500 > 0$

$100 + \frac{1}{2}D_1 \geq 0$

$\boxed{D_1 \geq -200}$

$-200 \leq D_1 \leq 200$

c) ilk kısıtın 1300 olması $D_1=100$ olması demektir.

$x_1 = 425$

$S_3 = 200$ olur.

$x_2 = 150$

5

B		C	c_1	c_2	c_3 (S_1)	c_4 (S_2)	c_5 (S_3)	
			$3+d_1$	4	0	0	0	
j	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
1	$3+d_1$	$x_1=450$	1	0	$-1/4$	$3/4$	0	
5	0	$x_2=400$	0	0	-2	2	1	
2	4	$x_3=100$	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	
c_j-z_j			0	0	$\frac{1}{4}d_1-\frac{5}{4}$		0	

$$0-\left[\left(-\tfrac{1}{4}\right)(3+d_1)+0(-2)+2\right]$$

$$\tfrac{1}{4}(3+d_1)-2 \qquad \tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}d_1-2<0$$

$$\tfrac{1}{4}d_1-\tfrac{5}{4}<0 \qquad \boxed{d_1\leq 5}$$

$$-\left((3+d_1)\tfrac{3}{4}-2\right)<0$$

$$-\tfrac{9}{4}-\tfrac{3d_1}{4}+2<0$$

$$-\tfrac{1}{4}-\tfrac{3d_1}{4}<0$$

$$\tfrac{3}{4}d_1>-\tfrac{1}{4}$$

$$d_1>-1/3$$

$$-1/3<d_1<5$$

$c_1=3+d_1$ fiyatı

$$-\tfrac{1}{3}+3<c_1<3+5$$

$$\tfrac{8}{3}\leq c_1\leq 8$$

$\boxed{6}$ Bir okul 400 öğrenci için bir gezi düzenliyor. Seçilen şirket ise 50 koltuklu 10 otobüse ve 40 koltuklu 8 otobüse sahiptir. Fakat şirketin elinde 9 şoför bulunmaktadır. Kira fiyatı büyük otobüsler için 800\$ ve küçük otobüsler için 600\$ dır. Bu gezi için hangi otobüsten kaçar tane gerekmi vardırki gezi en düşük fiyata mal edilsin.

$\text{Min } z = 600x + 800y$

x: küçük otobüs sayısı

y: Büyük otobüs sayısı

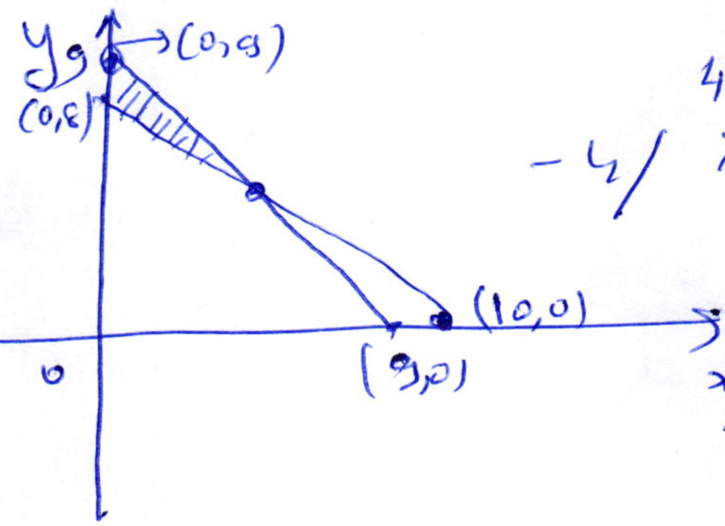
$40x + 50y \geq 400$

$x + y \leq 9$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

$4x + 5y = 40$ $\qquad y = 0 \quad x = 10$

$x + y \leq 9$ $\qquad x = 0 \quad y = 8$



$$4x + 5y = 40$$
$$-4/ \quad x + y = 9$$

$$4x + 5y = 40$$
$$-4x - 4y = -36$$
$$\boxed{y = 4}$$

$$4x + 5 \cdot 4 = 40$$
$$4x = 20$$
$$\boxed{x = 5}$$

$$\text{Min } z = 600x + 800y \Big|_{(5,4)} = 6200$$
$$= 600x + 800y \Big|$$

$\boxed{7}$

Bir şirket T_1, T_2, T_3 şeklinde 3 tür ürün üretmektedir. Bu ürünlerin ham maddesi M_1 ve M_2 dir. Aşağıdaki tabloda T_1, T_2 ve T_3'ün gereksinim duyduğu M_1 ve M_2 hammaddelerinin miktarlarını (sayılarını) vermektedir. Elde bulundurulan M_1 ve M_2 hammaddeleri sırasıyla 1000 ve 1200 tanedir. Araştırmalara göre T_1, T_2 ve T_3 ürünlerine toplam talep en az 500 tanedir. Bu şirket talebi karşılayabilir mi? Eğer karşılayamaz ise ne kadar T_1, T_2, T_3'e ihtiyacı olacak.

	Her T_1 T_2 ve T_3 için gerekli hammadde sayıları		
Hammadde sayıları	T_1	T_2	T_3
M_1	3	5	6
M_2	5	3	4

x_1: üretilecek T_1 ürününün sayısı

x_2: " T_2 " "

x_3: " T_3 " "

$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 1000$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1200$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 500$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Min } x_7$$

$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 1000$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 1200$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_6 + x_7 = 500$$

$\boxed{8}$

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	
			0	0	0	0	0	0	1	
j	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	OR
4	0	$x_4=1000$	3	5	6	1	0	0	0	1000/3
5	0	$x_5=1200$	5	3	4	0	1	0	0	1200/5
7	1	$x_7=500$	1	1	1	0	0	-1	1	500/1
c_j-z_j		500	-1	-1	-1	0	0	1	0	

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

V_1 girer V_5 çıkar.

$$(V_4, V_1, V_7) \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	
			0	0	0	0	0	0	1	
j	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	OR
4	0	$x_4=280$	0	16/5	18/5	1	3/5	0	0	87.5
1	0	$x_1=240$	1	3/5	4/5	0	1/5	0	0	400
7	1	$x_7=260$	0	2/5	1/5	0	-1/5	-1	1	650
c_j-z_j		$z_0=260$	0	-2/5	-1/5	0	1/5	1	0	

$$\begin{pmatrix} 5/16 & 0 & 0 \\ -3/16 & 1 & 0 \\ -2/16 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V_2 girdi V_4 çıktı

$$(V_2, V_1, V_7) \sim \begin{pmatrix} 16/5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5/16 & 0 & 5/16 & 0 & 0 \\ 3/5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/16 & 0 & 5/16 & 0 & 0 \\ 0 & -3/16 & 0 & -3/16 & 1 & 0 \\ 0 & -2/16 & 1 & -2/16 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	
			0	0	0	0	0	0	1	
j	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	Or
2	0	$x_2 = 87.5$	0	1	18/16	5/16	3/16	0	0	
1	0	$x_1 = 187.5$	1	0	1/8	-3/16	7/80	0	0	
7	1	$x_7 = 225$	0	0	-20/80	-2/16	-22/80	-1	1	
$c_j - z_j$		$z_0 = 225$	0	0	20/80	2/16	22/80	1	0	

$x_7 = 225$ birim karşılanamıyacak