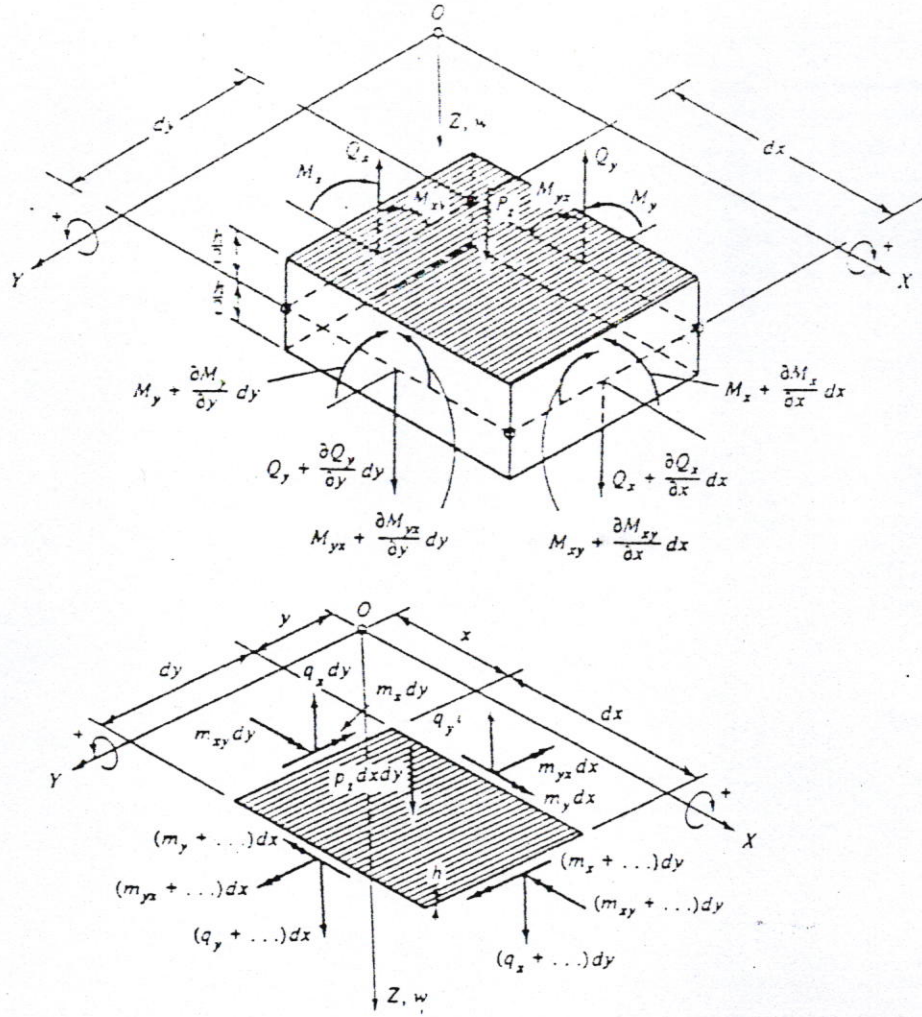




Şekil 2.4. Sonsuz küçük plak elemanının dengesi

$$1) \sum P_z = 0$$

$$p \, dx \, dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot dx \, dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot dx \, dy = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (2.16)$$

$$2) \sum M_x = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} \cdot dx \, dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \cdot dx \, dy - (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot dx) dy \, dx - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \, dx \cdot \frac{dx}{2} - p \, dx \, dy \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x \quad (2.17)$$

3) $\sum M_y = 0$ benzer şekilde :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (2.18)$$

(2.17) ve (2.18) bağıntıları ile (2.15) bağıntısının yardımıyla Q_x ve Q_y 'nin (w) cinsinden değerleri bulunabilir .

$$Q_x = -D (W_{xxx}''' + \mu \cdot W_{yyx}''') - D (1-\mu) W_{xyy}'''$$

$$Q_x = -D (W_{xxx}''' + W_{yyx}''') \quad (2.19)$$

$$Q_y = -D (W_{yyy}''' + W_{xx y}''') \quad (2.20)$$

veya

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial^2 y \partial x} \right) = -D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \quad (2.21)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -D \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad (2.22)$$

Δ : Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.23)$$

Q_x ve Q_y 'nin (2.21) ve (2.22) 'de bulunan değerleri (2.16) bağıntısında yerine yazılıp dış yükle deformasyonlar arasındaki diferansiyel denklem bulunabilir .

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial^2 y \partial x^2} \right) - D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = -p$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}} \quad (2.24)$$

Bunu Laplacien olarak gösterirsek

$$\Delta \Delta w = \Delta^2 w = \frac{p}{D}$$

$$\Delta^2 w = \nabla^2 w \quad \text{ile gösterilirse}$$

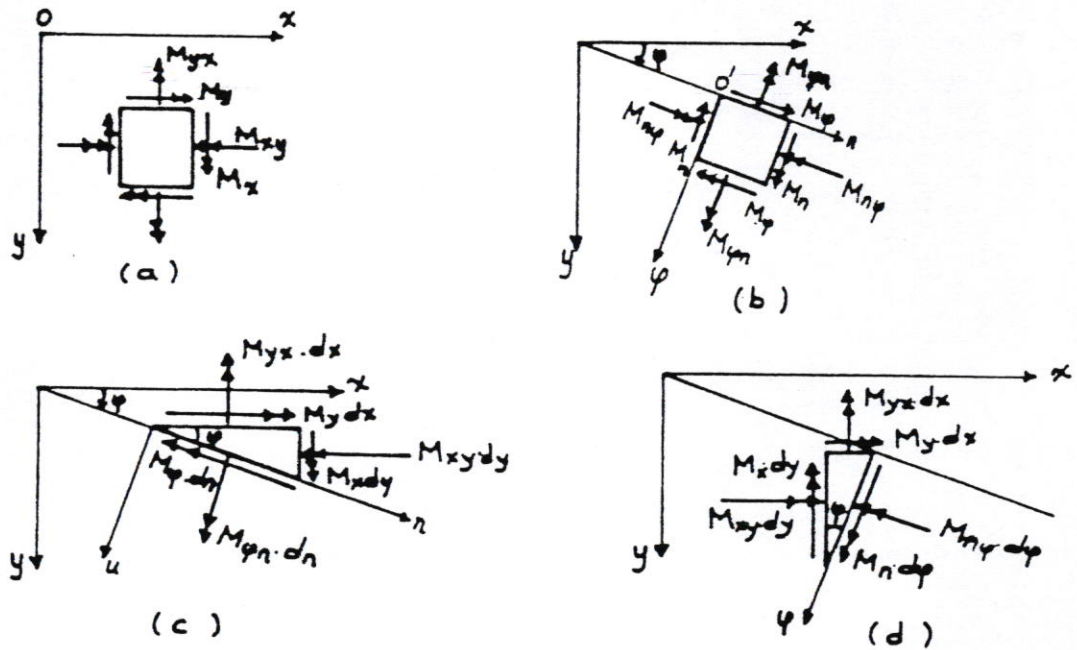
$$\nabla^2 W = \frac{p}{D} \quad (2.25)$$

∇ harfinin gösterdiği işleme Hamilton operatörü denir. (2.24) ya da (2.25) bağıntıları "Karteziyen koordinatlarda plak diferansiyel denklemi" olarak adlandırılır. Bu denklem çözülerek w 'ler p cinsinden bulunursa (2.15), (2.21) ve (2.22) bağıntıları yardımıyla her noktadaki iç kuvvetler (M_x, M_y, M_{xy}) hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} M_x &= -D(W''_{xx} + \mu W''_{yy}) & Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta W \\ M_y &= -D(W''_{yy} + \mu W''_{xx}) & Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta W \\ M_{xy} &= -D(1-\mu) W''_{xy} \end{aligned}$$

2.8. Eksen Takımının Değişmesi Durumunda Momentler

Bunlar birbirine dik (x, y) eksen takımına göre x, y doğrultusunda bulunan momentlerdir. Acaba yine birbirine dik, fakat değişik bir (n, φ) eksen takımına göre momentler ne olur?



Şekil 2.5. Eksen dönüştürme

Şekil (2.5.c) 'de

$$dx = dn \cdot \cos \varphi$$

$$dy = dn \cdot \sin \varphi$$

(n) ekseninde momentlerin izdüşümü alınır (n eksenine göre denge şartı) :

$$M_{\varphi} \cdot dn - M_y \cdot dx \cdot \cos \varphi - M_x \cdot dy \cdot \sin \varphi + M_{xy} \cdot dy \cdot \cos \varphi + M_{yx} \cdot dx \cdot \sin \varphi = 0$$

$$M_{\varphi} \cdot dn - M_y \cos^2 \varphi \cdot dn - M_x \sin^2 \varphi \cdot dn + 2 M_{xy} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot dn = 0$$

$$M_{\varphi} = M_x \cdot \sin^2 \varphi + M_y \cdot \cos^2 \varphi - M_{xy} \sin 2\varphi$$

Yine Şekil (2.5.c) 'de bu kez φ ekseninde izdüşüm alınır :

$$M_{\varphi n} \cdot dn - M_y \cdot dx \cdot \sin \varphi + M_{xy} \cdot dy \cdot \sin \varphi + M_x \cdot dy \cdot \cos \varphi - M_{yx} \cdot dx \cdot \cos \varphi = 0$$

$$M_{\varphi n} \cdot dn + (-M_y \sin \varphi \cos \varphi + M_{xy} \sin^2 \varphi + M_x \sin \varphi \cos \varphi - M_{yx} \cos^2 \varphi) \cdot dn = 0$$

$$M_{\varphi n} = M_{n\varphi} = \frac{1}{2} (M_y - M_x) \sin 2\varphi + M_{xy} \cdot \cos 2\varphi$$

Şekil (2.5.d) 'de : $dx = d\varphi \cdot \sin \varphi$ $dy = d\varphi \cdot \cos \varphi$

Şekil (2.5.d) 'de (φ) ekseninde izdüşüm denklemi yazılırsa :

$$M_n \cdot d\varphi - M_x \cdot \cos \varphi \cdot dy - M_y \cdot \sin \varphi \cdot dx - M_{yx} \cdot \cos \varphi \cdot dx - M_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot dy = 0$$

$$M_n d\varphi - (M_x \cos^2 \varphi + M_y \sin^2 \varphi + 2 M_{xy} \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi = 0$$

$$M_n = M_x \cdot \cos^2 \varphi + M_y \cdot \sin^2 \varphi + M_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$

$$M_{\varphi} = M_x \cdot \sin^2 \varphi + M_y \cdot \cos^2 \varphi - M_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$

$$M_n = M_x \cdot \cos^2 \varphi + M_y \cdot \sin^2 \varphi + M_{xy} \cdot \sin 2\varphi \quad (2.26)$$

$$M_{n\varphi} = M_{\varphi n} = \frac{1}{2} (M_y - M_x) \sin 2\varphi + M_{xy} \cdot \cos 2\varphi$$

Bu denklemler eksen dönüşümü (transformasyon) denklemleri olarak adlandırılır.

Sonuçların İrdelenmesi :

1) İlk iki denklem toplanırsa :

$$M_n + M_\varphi = M_x + M_y \quad (2.27)$$

Ortogonal (dik) iki doğrultudaki momentlerin toplamı sabittir.

$$M_x = -D(W''_{xx} + \mu \cdot W''_{yy})$$

$$M_y = -D(W''_{yy} + \mu \cdot W''_{xx})$$

$$M_x + M_y = -D(1 + \mu)(W''_{xx} + W''_{yy})$$

$$\frac{M_x + M_y}{1 + \mu} = -D(W''_{xx} + W''_{yy})$$

$$\frac{M_x + M_y}{1 + \mu} = \mathcal{M} \quad \text{denirse ,} \quad (2.28)$$

$$\mathcal{M} = -D \cdot \Delta W \quad (2.29)$$

$$\Delta W = -\frac{\mathcal{M}}{D} \quad (2.30)$$

Açık yazılırsa

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{\mathcal{M}}{D}$$

$$\Delta \Delta W = \nabla^2 W = -\frac{\Delta \mathcal{M}}{D} \quad (2.31)$$

$$\nabla^2 W = \frac{p}{D} \quad (2.24) \text{ ile bulunmuştur.}$$

$$-\frac{\Delta \mathcal{M}}{D} = \frac{p}{D}$$

$$\boxed{\Delta \mathcal{M} = -p} \quad (2.32)$$

Açık yazılırsa :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial y^2} = -p} \quad (2.32 a)$$

(2.30) ve (2.32) bağıntıları ile plak diferansiyel denklemi , 2.mer-

tebeden iki diferansiyel denkleme ayrılabilir .

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial y^2} = -p \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\mathcal{M}}{D}$$

Bir plak probleminde momentler toplamının sınır değerleri biliniyorsa (2.32) 'den w 'den bağımsız olarak $\mathcal{M}(x,y)$ bulunabilir . Sonra (2.30) dan $w(x,y)$ hesaplanabilir .

2) Asal momentlerin bulunması :

$$M_{nt} = 0 \quad \text{olmalı}$$

$$\frac{1}{2} (M_y - M_x) \sin 2\varphi + M_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2 M_{xy}}{M_x - M_y} \quad (2.33)$$

$\tan 2\varphi$ 'nin bu değeri (2.26) denklem takımında yerine yazılırsa :

$$\cos^2 2\varphi = \frac{1}{1 + \tan^2 2\varphi} \quad \cos 2\varphi = \frac{M_x - M_y}{\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 M_{xy}^2}}$$

$$\sin 2\varphi = \tan 2\varphi \cdot \cos 2\varphi = \frac{2 M_{xy}}{\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 M_{xy}^2}}$$

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \frac{1}{2} M_x (1 - \cos 2\varphi) + \frac{1}{2} M_y (1 + \cos 2\varphi) - M_{xy} \sin 2\varphi \\ &= \frac{1}{2} [(M_x + M_y) - \cos 2\varphi (M_x - M_y) - 2 M_{xy} \sin 2\varphi] \end{aligned}$$

$$M_\varphi = \frac{1}{2} (M_x + M_y) \pm \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 M_{xy}^2}$$

$$M_{\varphi n} = 0$$

(2.34)

Özel hal : $M_x = M_y$

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \mp M_{xy} \\ M_{\varphi n} &= 0 \end{aligned}$$

(2.35)

$M_x = M_y = 0$ $M_{xy} \neq 0$

$$\begin{aligned} M_n &= \mp M_{xy} \\ \varphi &= \pi/4, 3\pi/4 \end{aligned}$$

(2.36)

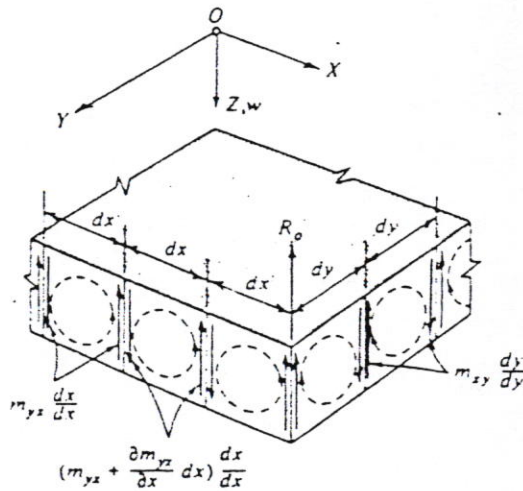
$M_x \neq 0$, $M_y \neq 0$, $M_{xy} = 0$

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \\ \varphi &= 0, \pi/2 \end{aligned}$$

(2.37)

2.9. Sınır Şartları

Bir plak probleminde $w(x,y)$ çözümü yardımıyla , plağın kenarında kesit büyüklüklerinin 3 sınır değeri elde edilir . Bunlar eğil-



Şekil 2.6. Serbest mesnetlerde burulma etkisi

me momenti M_x (ya da M_y), burulma momenti M_{xy} (ya da M_{yx}) ve kesme kuvveti Q_x (ya da Q_y) dir. Sınır şartlarının kesin olarak sağlanması durumunda bu kenar büyüklüklerinin , eğilme momenti , burulma momenti ve kesme kuvvetinin dış değerleri ile aynı olması gerekir . Oysa $w(x,y)$ çözümü ancak 2 sınır şartını sağlayacak biçimde tertiplenebilir . İki sınır şartının yeterli olabilmesi için şu yol izlenir: Kenarda etkiyen burulma momentleri , kuvvet çiftleri olarak ifade edilsin . Birim boya etkiyen burulma momenti M_{xy} , dy boyuna etkiyen burulma momenti $M_{xy} \cdot dy$ dir. (Şekil 2.6)

Şimdi her bir eleman için ortadan kesim yapıp , düşey kuvvetlerin toplamı yazılırsa , aşağıya doğru etkiyen $(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cdot dy)$ kuvvetleri bulunur . Birim boya etki eden kuvvet ise $(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y})$ olur . Demek ki burulma momenti yerine birim boya etkiyen $(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y})$ şiddetinde bir " eşdeğer kesme kuvveti " alınabilir . Literatürde bu kuvvetler "Kirchhoff'un ek kuvvetleri " olarak anılır .

$$\begin{aligned} V_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ V_y &= Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.38)$$

(2.19)da $Q_x = -D(w_{xxx} + w_{yyx})$ bulunmuştu. (2.15)de ise $M_{xy} = -D(1-\mu)w_{xy}''$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= -D(1-\mu)w_{xyy}''' \\ V_x &= -D[w_{xxx} + (2-\mu)w_{yyx}'''] \end{aligned}$$

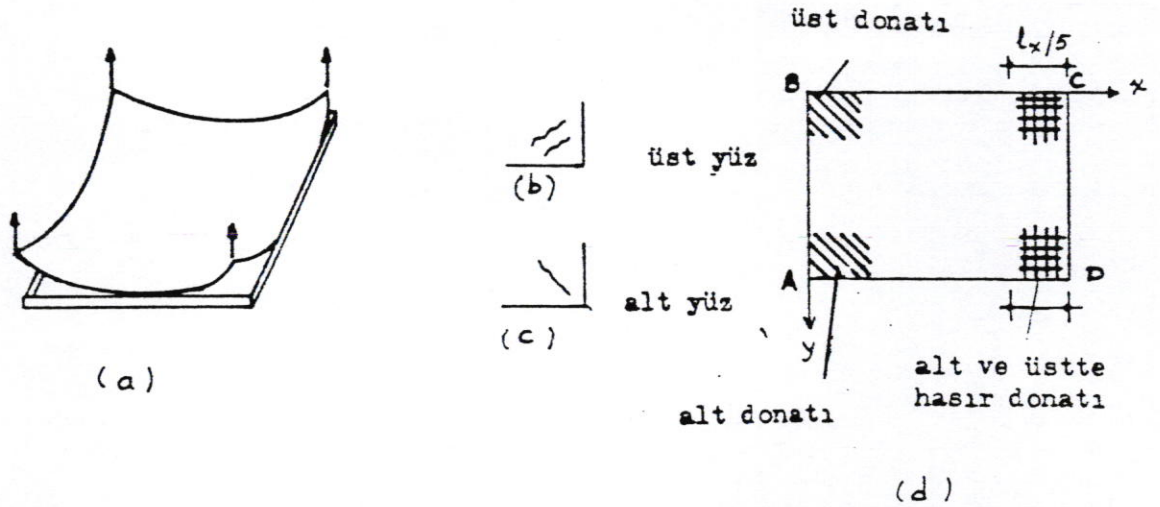
bulunur. Benzer şekilde V_y 'de yazılırsa :

$$\begin{aligned} V_x &= -D[w_{xxx} + (2-\mu)w_{yyx}'''] \\ V_y &= -D[w_{yyy} + (2-\mu)w_{xxy}'''] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Sadece köşelerde bir sorun çıkar . Diğer kuvvetler birbirini götürür , fakat uçtakiler toplanır ; buna " köşe kuvveti " denir .

$$R_o = 2 M_{xy} \quad (2.40)$$

Eğer plak köşelerde tutulmuyorsa , plağın köşeleri yukarı kalkacak ve kesit tesirleri değişecek demektir .



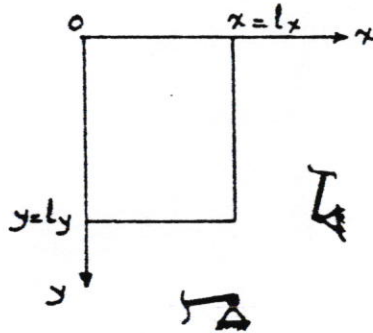
Şekil 2.7. Kenarlarından basit mesnetli plak

(a) Köşelerden tutulmamış , (b) ve (c) Köşelerden tutulmuş, köşe donatısı yok
(d) Köşe donatıları

Köşeler tutulur ve gerekli köşe donatısı konmazsa , (b) ve (c)'de görüldüğü gibi alt yüzde diyagonal ; üst yüzde ise buna dik çekme çatlakları görülür . Köşe donatılarının çekme çatlaklarına dik olması gerekir . (d) 'de A ve B köşelerindeki bu donatılar gösterilmiştir . Ancak donatıyı böyle yerleştirmek pratik olmaz : Çünkü her donatının boyu değişiktir . Bunun yerine C ve D köşelerinde görüldüğü gibi , $l_x/5$ uzunluğunda , alta ve üste her iki doğrultuda (hasır) köşe donatısı yerleştirilir .

Şimdi , mesnetlenme biçimine göre , (2.24) plak diferansiyel denkleminin sağlaması gereken sınır şartlarını araştıralım :

a) Basit mesnetlenmiş ve çökme-yen kenar



$$1) \quad x = l_x \quad \text{için} \quad w = 0$$

$$2) \quad x = l_x \quad \text{için} \quad M_x = 0$$

Şekil 2.8. Basit mesnet

$$1) \quad w \Big|_{x=l_x} = 0 \quad \longrightarrow \quad w''_{yy} \Big|_{x=l_x} = 0$$

$$2) \quad w''_{xx} + \mu w''_{yy} \Big|_{x=l_x} = 0 \quad \longrightarrow \quad w''_{yy} = w''_{xx} \Big|_{x=l_x} = 0$$

Şu halde sınır şartları şöyle ifade edilebilir :

$$1) \quad w \Big|_{x=l_x} = 0 \quad \text{Navier sınır şartları} \quad (2.41)$$

$$2) \quad \Delta w \Big|_{x=l_x} = 0$$

$\Delta w = 0$ olması w''_{xy} 'nin sıfır olmasını gerektirmez . 0 zaman

$$M_x \Big|_{x=l_x} = 0$$

$$M_y \Big|_{x=l_x} = 0$$

$$M_{xy} \Big|_{x=l_x} \neq 0$$

olur . Benzer şekilde :

$$1) \quad w \Big|_{y=l_y} = 0$$

(2.41 a)

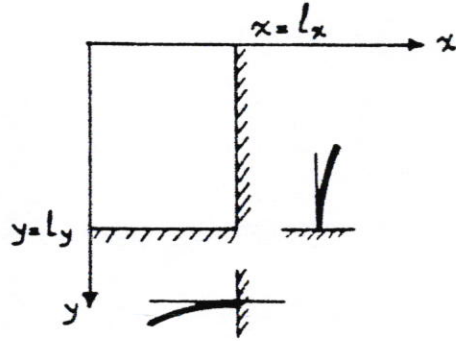
$$2) \quad \Delta w \Big|_{y=l_y} = 0$$

$$M_y \Big|_{y=l_y} = 0$$

$$; \quad M_x \Big|_{y=l_y} = 0$$

$$; \quad M_{yx} \Big|_{y=l_y} \neq 0$$

b) Ankastre mesnet



$$1) \quad x = l_x \quad \text{için} \quad w = 0$$

$$2) \quad x = l_x \quad \text{için} \quad \theta = 0$$

Şekil 2.9. Ankastre mesnet

$$1) \quad w \Big|_{x=l_x} = 0$$

$$2) \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l_x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad M_{xy} = 0$$

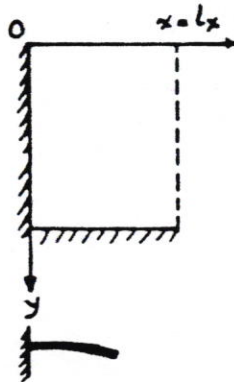
(2.42)

Buradan şu önemli sonuç çıkar : Ankastre mesnetlerde burulma momenti meydana gelmez ve reaksiyon kuvvetleri :

$$V_x = Q_x$$

olur.

c) Boşta kenar



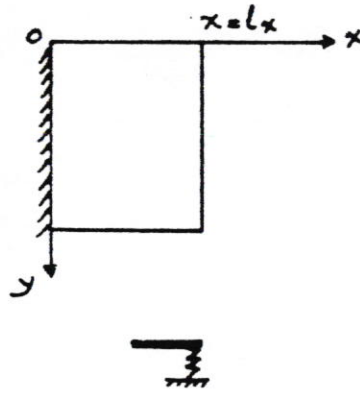
$$1) \quad x = l_x \quad \text{için} \quad M_x = 0$$

$$2) \quad x = l_x \quad \text{için} \quad V_x = 0$$

Şekil 2.10

$$\begin{aligned}
 1) \quad M_x \Big|_{x=l_x} &= 0 \longrightarrow w''_{xx} + \mu w''_{yy} \Big|_{x=l_x} = 0 \\
 2) \quad V_x \Big|_{x=l_x} &= 0 \longrightarrow w'''_{xxx} + (2-\mu) w'''_{yyx} \Big|_{x=l_x} = 0
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

d) Serbestçe dönebilen ve elastik çökebilen kenar



$$1) \quad x = l_x \quad \text{için} \quad M_x = 0$$

$$2) \quad x = l_x \quad \text{için} \quad w = f_1(y)$$

Şekil 2.11

$$1) \quad M_x \Big|_{x=l_x} = 0 \longrightarrow (w''_{xx} + \mu w''_{yy}) \Big|_{x=l_x} = 0$$

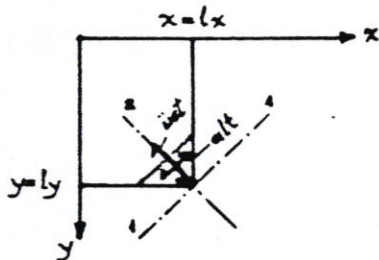
$$2) \quad w = f_1(y)$$

$$w = \frac{V_x}{C} \quad C = C(y) \longrightarrow \text{yay sabiti}$$

$$V_x = w \cdot C(y) = D \left[w'''_{xxx} + (2-\mu) w'''_{yyx} \right]$$

$$w \Big|_{x=l_x} = \frac{D}{C(y)} \left[w'''_{xxx} + (2-\mu) w'''_{yyx} \right]$$

e) İki kenarın dik olarak kesiştiği köşe



$$M_x \Big|_{\substack{x=l_x \\ y=l_y}} = 0$$

$$M_y \Big|_{\substack{y=l_y \\ x=l_x}} = 0$$

$$M_{xy} \Big|_{\substack{x=l_x \\ y=l_y}} \neq 0$$

Şekil 2.12

Burulma momentinin tesir etmediği iki asal moment doğrultusu (2.33)de bulunmuştur .

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 M_{xy}}{M_x - M_y} = \infty$$

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}$$

(2.34)'de $M_x = M_y = 0$ yazılırsa $M_1 = -M_2 = M_{xy}$ bulunur .

f) Ankastre iki kenarın köşesi

Kenarlarda $M_{xy} = 0$ olduğu için köşede $R = 0$ olur .
Plak kenarları asal moment düzlemleridir .

g) Boşta iki kenarın köşesi :

Boşta kenarlar boyunca M ve V sıfır olmalıdır .
Şu halde köşede reaksiyon kuvveti olmaz .

$$M_{xy} = 0$$

olur.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

BÖLÜM . 3. PLAK DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜM METOTLARI

3.1. G i r i s

Şekli , sınır şartları ve üzerindeki yük belirli olan bir plak problemini çözmek demek :

$$\Delta \Delta W = \frac{P(x,y)}{D}$$

L a g r a n g e denkleminin , sınır şartlarını da sağlayan $w(x,y)$ ifadesini bulmak demektir . Matematik olarak bu denklem , dördüncü mertebeden iki taraflı , parsiel türevli , sabit katsayılı lineer bir denklemdir. (Lineerdir , çünkü türevlilerin herhangi bir üssü denkleme kullanılmıyor). Plak diferansiyel denkleminin homojen formu :

$$\Delta \Delta W = 0 \quad (3.1)$$

" Biharmonik denklem " olarak adlandırılır .

(2.24)'de verilen plak diferansiyel denklemi , kirişlerin diferansiyel denklemi

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = \frac{P}{EI} \quad (3.2)$$

ile analogdur . Ancak (3.2) denklemi kolaylıkla çözülebilirken (2.24) plak denkleminin çözümü büyük güçlükler gösterir . Bu nedenle mevcut kapalı - çözümler sayılıdır . (2.24) 'ün genel çözümü :

$$W(x,y) = W_h(x,y) + W_p(x,y) \quad (3.3)$$

W_h : (3.1) denkleminin homojen çözümüdür . Yükle ilgisi yoktur . Sınır şartlarının bazısını sağlar , bazısını sağlamaz .

W_p : (2.24) genel denklemini sağlayan bir özel çözümdür . Yükle ilgilidir . Homojen çözümde sağlanamayan sınır şartları özel çözümle sağlanmaya çalışılır .

Genellikle kapalı - çözüm bulunamaz ; yaklaşık metotlarla sonuca gidilir . Bu yaklaşık çözüm metotlarını incelemeye geçmeden önce, karteziyen koordinatlarda , (3.1) homojen denkleminin bazı basit çözümlerini araştıralım .

3.2. Homojen plak denkleminin karteziyen koordinatlardaki basit çözümleri

$\Delta \Delta W = 0$ homojen denkleminin çözümünün fiziksel anlamı , yalnız kenar kuvvetlerin etkisindeki bir plağın $W_h(x,y)$ sehimalerinin bulunmasıdır . Problemin türüne uygun bir şekil fonksiyonu seçilmesi önemlidir .

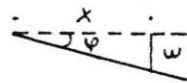
Aşağıda bazı basit şekil fonksiyonlarının seçilmesinin ne sonuç vereceği araştırılmıştır .

a) $W = C$ olsun . $W'_x = W'_y = 0$

$\omega = c$

Herhangi bir elastik yüzey meydana gelmez . Bir rijit cisim hareketi söz konusudur .

b) $W = C \cdot x$ olsun . $W'_x = C$ $W'_y = 0$



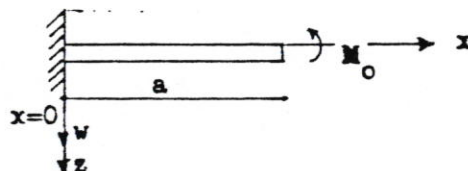
$c = \tan \varphi$

$W''_{xx} = 0$ $W''_{yy} = 0$ $W''_{xy} = 0$

Bütün momentler sıfırdır . Bu da rijit cisim hareketidir .

c) $W = C \cdot x^2$ olsun .

$W'_x = 2C x$ $W'_y = 0$



$W''_{xx} = 2C$ $W''_{yy} = 0$ $W''_{xy} = 0$

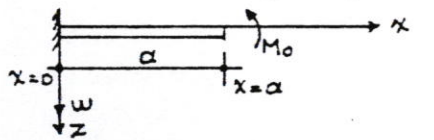
$W'''_{xxx} = W'''_{yyy} = W'''_{xyy} = 0$

$M_x = -D (W''_{xx} + \mu W''_{yy}) = -2C.D$

$M_y = -2C\mu D = \mu M_x$; $M_{xy} = 0$

$Q_x = Q_y = V_x = V_y = 0$

Bu çözüm , örneğin $x = 0$ kenarından ankastre , $x = a$ ucundan uniform bir M_0 momenti etkisinde olan sonsuz uzun konsol bir plağı gösterir .

$$M_x = M_0 = -2 C.D \longrightarrow C = -\frac{M_0}{2D}$$


$$W = -\frac{M_0}{2D} \cdot x^2 \quad (3.4)$$

Elastik yüzey parabolik silindirdir. $M_y = \mu M_x$ momentinin ortaya çıkması şöyle açıklanabilir : Plak şeritlere ayrılrsa idi , y doğrultusunda çekme yüzünde bir daralma , basınç yüzünde bir genişleme olacaktı . Sürekli bir plak olduğu için bu mümkün değildir . y doğrultusunda

$\sigma_y = \mu \sigma_x$ gerilmeleri , bunların bileşkesi olarak da $M_y = \mu M_x$ momenti doğar .

d) $W = C (x^2 + y^2)$ olsun.

$$W'_x = 2 C x$$

$$W'_y = 2 C y$$

$$W''_{xx} = 2C$$

$$W''_{yy} = 2C$$

$$W''_{xy} = 0$$

$$W''''_{xxx} = 0$$

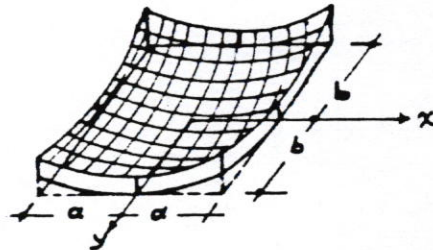
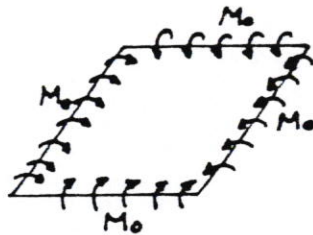
$$M_x = -D (2C + \mu 2C) = -2C (1 + \mu) D = M_y$$

$$M_{xy} = 0$$

$$Q_x = Q_y = V_x = V_y = 0$$

Demek ki kesitin her noktasında , (x,y) 'den bağımsız olarak

$$M_x = M_y = M_0 \quad \text{sabittir .}$$



Şekil 3.1 Uniform eğilme

. Bu, plağın kenarlarından uniform yayılı M_0 momentinin etkisinde olması demektir . Bu duruma "uniform eğilme" denir . Meydana gelen elastik yüzeyi araştıralım :

$$C = - \frac{M_0}{2(1 + \mu)D}$$

$$W = - \frac{M_0}{2(1 + \mu)D} (x^2 + y^2) \quad (3.5)$$

Elastik yüzey bir dönel paraboloid'dir .

e) $W = C \cdot xy$ olsun .

$$W'_x = C \cdot y \quad W'_y = C \cdot x$$

$$W''_{xx} = 0 \quad W''_{yy} = 0 \quad W''_{xy} = C$$

$$W'''_{xxy} = W'''_{xxx} = W'''_{yyx} = 0$$

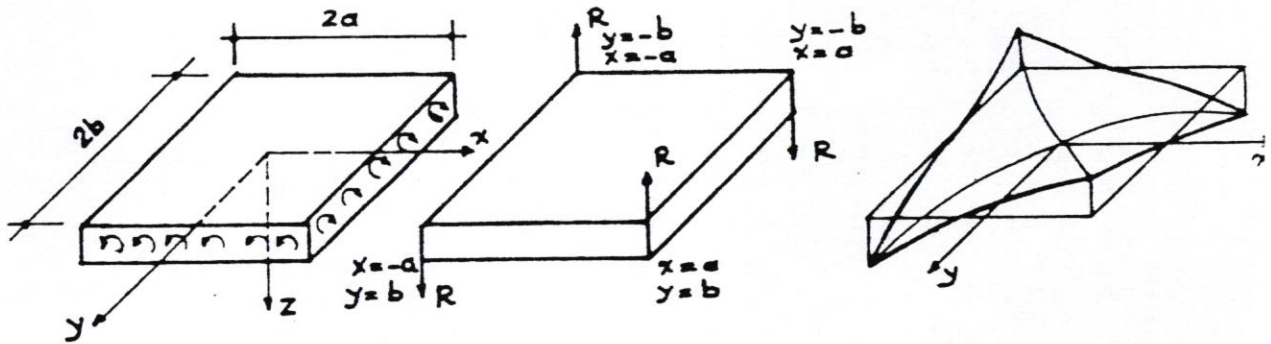
$$M_x = M_y = 0$$

$$Q_x = Q_y = 0$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1 - \mu)C$$

$$R = 2 M_{xy}$$

Basit burulma durumu . Asal eğilme momentleri $m_n = \pm m_{xy}$ olur . Şekildeki gibi dört kenarı boyunca sabit M_{xy} momentinin etkisinde bir dikdörtgen plak göz önüne alınsın :



Şekil 3.2. Basit burulma etkisinde plak

$$C = - \frac{M_{xy}}{D(1-\mu)}$$

$$W = - \frac{M_{xy}}{D(1-\mu)} xy \quad (3.6)$$

$$x = -a \quad y = -b \quad W = - \frac{M_{xy}}{D(1-\mu)} ab$$

$$x = +a \quad y = +b \quad W = - \frac{M_{xy}}{D(1-\mu)} ab$$

$$x = +a \quad y = -b \quad W = + \frac{M_{xy}}{D(1-\mu)} ab$$

$$x = -a \quad y = +b \quad W = + \frac{M_{xy}}{D(1-\mu)} ab$$

$$f) \quad W = C_1 x^3 + C_2 x^2 \quad \text{olsun.}$$

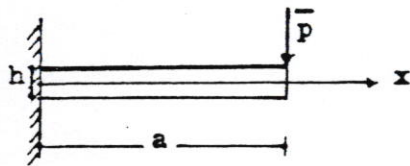
$$W'_x = 3C_1 x^2 + 2C_2 x \quad W'_y = 0$$

$$W''_{xx} = 6C_1 x + 2C_2 \quad W''_{yy} = 0 \quad W''_{xy} = 0$$

$$W'''_{xxx} = 6C_1 \quad W'''_{yyy} = W'''_{xyy} = 0$$

$$M_x = -D(6C_1 x + 2C_2) \quad M_y = \mu M_x \quad M_{xy} = 0$$

olur. Böyle bir çözüm, örneğin, $x = 0$ kenarından ankastre $x = a$ kenarı boşta ve bu kenar boyunca $\bar{p}$ şiddetinde düzgün yayılı çizgisel yük etkisinde, y doğrultusunda sonsuz uzun bir plâğı gösterir.



$x=a$ kenarı boyunca kenar şartları yazılırsa :

$$1) \quad M_x \Big|_{x=a} = 0 \quad 2) \quad V_x \Big|_{x=a} = \bar{p}$$

$$1) \quad 6C_1 \cdot a + 2C_2 = 0 \longrightarrow C_2 = -3C_1 a$$

$$2) \quad -D \cdot 6C_1 = \bar{p} \longrightarrow C_1 = -\frac{\bar{p}}{6D}$$

$$C_2 = +\frac{\bar{p} \cdot a}{2D}$$

Plak elastik yüzeyinin denklemi :

$$W = -\frac{\bar{P}}{6D} \cdot x^3 + \frac{\bar{P} \cdot a}{2D} \cdot x^2 = \frac{\bar{P}}{2D} \cdot x^2 \left(a - \frac{x}{3} \right)$$

$$W = \frac{\bar{P}}{2D} x^2 \left(a - \frac{x}{3} \right) \quad (3.7)$$

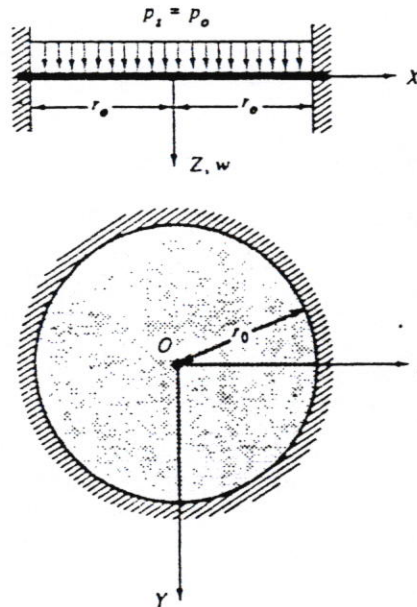
$$M_x = -D \left[6 \cdot \left(-\frac{1}{6D} \right) \cdot x + 2 \cdot \frac{\bar{P} a}{2D} \right] = -\bar{P} (a - x) ; M_y = \mu M_x$$

$$M_{xy} = 0 \quad R_x = V_x = \bar{P}$$

bulunur .

$\Delta \Delta W = \frac{P}{D}$ diferansiyel denkleminin kapalı çözümüyle ilgili bir örnek : /2/

Kapalı çözüm bulunmasının çok ender olduğu belirtilmişti .Düzgün yayılı yük etkisinde ankastre dairesel plak bu ender örneklerden biridir .



Şekil 3.3. Düzgün yayılı yükle yüklü ankastre dairesel plak

Seçilen şekil fonksiyonu :

$$W(x,y) = C \left(\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{r_0^2} - 1 \right)^2$$

olsun. Bu fonksiyonun sınır şartlarını sağlayıp sağlamadığını araştıralım. Çevre boyunca

$$r_0^2 = x^2 + y^2$$

olduğundan

$$W = 0$$

olur. Acaba ikinci sınır şartı sağlanıyor mu?

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} \stackrel{?}{=} 0$$

$$F = \left(\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{r_0^2} - 1 \right)$$

diyelim.

$$W = C \cdot F^2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= 2C \cdot F \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= 2C \cdot F \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned} \right\} = 0$$

Her iki bağıntı da F 'i içerdiğinden ve F çevre boyunca (0) olduğundan mesnetlerde sınır şartları sağlanmaktadır.

Diferansiyel denklemden, aynı değişken dönüşümü yaparak parsiyel türevleri alalım :

$$F = \left(\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{r_0^2} - 1 \right)$$

$$F'_x = \frac{2x}{r_0^2}$$

$$F'_y = \frac{2y}{r_0^2}$$

$$F''_{xx} = \frac{2}{r_0^2}$$

$$F''_{yy} = \frac{2}{r_0^2}$$

$$F''_{xy} = 0$$

$$F'''_{xxx} = F'''_{yyy} = 0$$

$$W = C F^2$$

$$W'_x = 2 C F \cdot F'_x$$

$$W''_{xx} = 2C(F'^2_x + F \cdot F''_{xx})$$

$$W'''_{xy} = 2C(0 + F'_y \cdot F''_{xx} + 0)$$

$$W''''_{xxx} = 2C(2F'_x \cdot F''_{xx} + F''_{xx} + 0) = 6C(F'_x \cdot F''_{xx})$$

$$W^{1v}_{xxxx} = 6C(F''_{xx})^2 = 6C\left(\frac{2}{r_o^2}\right)^2 = 24 \frac{C}{r_o^4} \quad W^{1v}_{yyyy} = 24 \frac{C}{r_o^4}$$

$$W^{1v}_{xyxy} = 2C(F''_{xx} \cdot F''_{yy} + 0) = 2C \cdot \frac{4}{r_o^4} = 8 \frac{C}{r_o^4}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{C}{r_o^4} (24 + 16 + 24) = 64 \frac{C}{r_o^4} = \frac{p_o}{D}$$

$$C = \frac{p_o r_o^4}{64 D}$$

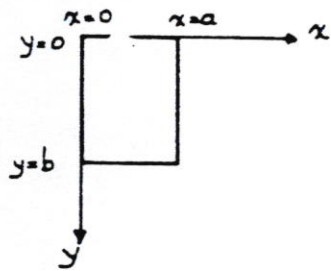
$$W(x,y) = \frac{p_o r_o^4}{64 D} \left(\frac{x^2}{r_o^2} + \frac{y^2}{r_o^2} - 1 \right)^2$$

$$W = \frac{p_o}{64 D} (x^2 + y^2 - r_o^2)^2$$

3.3. Çift Fourier serileriyle plak
diferansiyel denkleminin çözümü
(Navier çözümü) (*)

Navier, 1820 yılında, Fransız Bilimler Akademisine, dört kenarından serbestçe mesnetlenmiş dikdörtgen plakların çift trigonometrik serilerle çözümü konusunda bir makale verdi. Daha sonra bu çözümden diğer mesnetlenme biçimindeki plakların çözümünde de yararlandı.

Serbestçe mesnetlenmiş dikdörtgen plaklarda sınır şartları :



$$\begin{array}{cccc} W|_{x=0} = 0 & W|_{x=a} = 0 & W|_{y=0} = 0 & W|_{y=b} = 0 \\ \Delta W|_{x=0} = 0 & \Delta W|_{x=a} = 0 & \Delta W|_{y=0} = 0 & \Delta W|_{y=b} = 0 \end{array}$$

Şekil 3.4. Dört kenarından basit mesnetli plakta sınır şartları

$\Delta \Delta W = \frac{p}{D}$ plak denkleminin çözümü için Navier metodunda izlenen yol şöyledir :

1) Plak üzerindeki p yükü çift sinüs serisine açılır :

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m,n=1,2,3,\dots) \quad (3.8)$$

Buradaki p_{mn} katsayılarının bulunuşu, çeşitli yük biçimlerine göre, ek A'da incelenmiş olup, p_{mn} 'ler bilinen değerlerdir.

2) Düşey sehimler (w) de çift sinüs serisine açılır :

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.9)$$

* Fourier serileri için Ek A'ya bakınız.

Buradaki w_{mn} katsayıları bilinmiyor . Acaba $w(x,y)$ serisi sınır şartlarını sağlıyor mu ? $w = 0$ şartının sağlandığı kolayca görülebilir .

$$\Delta w \stackrel{?}{=} 0 \quad W'_x = \sum \sum W_{mn} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$W''_{xx} = - \sum \sum W_{mn} \cdot \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Benzer şekilde :

$$W''_{yy} = - \sum \sum W_{mn} \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\Delta W = - \sum \sum W_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Altı çizili olan çarpan $w(x,y)$ idi ve sınır şartını sağladığı görülmüştü . Bu da sağlar .

3) $p(x,y)$ ve $w(x,y)$ 'in yukardaki açılımları plak diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa , cebirsel bir denklem elde edilir . w_{mn} değerleri buradan bulunur .

$$\Delta \Delta W = \sum \sum W_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\sum \sum W_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum \sum \frac{1}{D} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.10)$$

$$W_{mn} \cdot \pi^4 \left[\left(\frac{m^2}{a^2} \right) + \left(\frac{n^2}{b^2} \right) \right]^2 = \frac{p_{mn}}{D}$$

$$W_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m^2}{a^2} \right) + \left(\frac{n^2}{b^2} \right) \right]^2} \quad (3.11)$$

$$W(x,y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\left[\left(\frac{m^2}{a^2} \right) + \left(\frac{n^2}{b^2} \right) \right]^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.12)$$

Elastik yüzeyi belirten $w(x,y)$ böylece belirlendikten sonra iç kuvvetler :

$$M_x = \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \mu \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.13)$$

$$M_y = \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n}{b} \right)^2 + \mu \left(\frac{m}{a} \right)^2 \right] W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.14)$$

$$M_{xy} = -\pi^2 D (1-\mu) \sum_m \sum_n \frac{mn}{ab} W_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3.15)$$

$$Q_x = \pi^3 D \sum_m \sum_n W_{mn} \frac{m}{a} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.16)$$

$$Q_y = \pi^3 D \sum_m \sum_n W_{mn} \frac{n}{b} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3.17)$$

$$V_x = \pi^3 D \sum_m \sum_n W_{mn} \frac{m}{a} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 (2-\mu) \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.18)$$

$$V_y = \pi^3 D \sum_m \sum_n W_{mn} \frac{n}{b} \left[\left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{m}{a} \right)^2 (2-\mu) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3.19)$$

$$R = 2M_{xy} = -2\pi^2 D (1-\mu) \sum_m \sum_n \frac{mn}{ab} W_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3.20)$$

Kenarlarından serbestçe oturan dikdörtgen plaklarla ilgili N a v i e r çözümü , başka türlü mesnetlenmiş dikdörtgen plakların çözümünde par-tiküler çözüm olarak da kullanılır . Yani serbestçe oturan plâga ait w_p çözümü , sınır kuvvetleri ve momentlerle süperpoze edilir .

$$w(x,y) = w_p + \sum w_h \quad (3.21)$$

W sehimlerinin bulunmasında sonsuz serilerin kullanılması , genellikle hızlı yakınsak oldukları için , yalnızca birkaç terimin göz önüne alın-masıyla yeterli yaklaşıklık sağlanır . Sadece tek kuvvetlerin etkisin-de yakınsaklık yavaş olur . İç kuvvetlerin bulunması $w(x,y)$ 'in ikin-ci ve üçüncü türevleri ile ilgili olduğu için yakınsaklık hızı bi-raz azalır . Fakat yaklaşıklık yine yeterlidir . Çünkü istenen sayıda terimi göz önüne almak olanağı her zaman vardır .

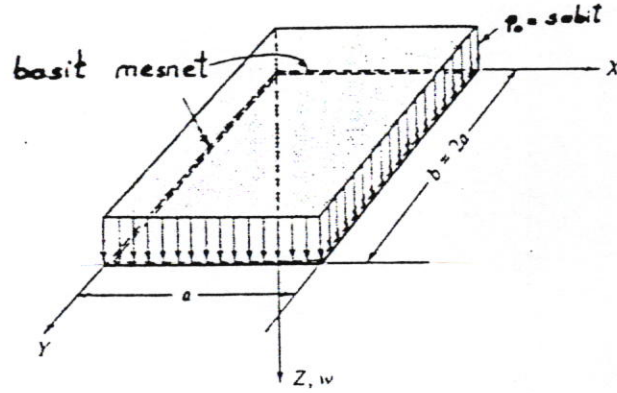
Ö z e t : Serbestçe oturan dikdörtgen plakların çözümünde ,

N a v i e r metodunun kullanılması , diferansiyel denk-lemin çözümünü basit bir cebirsel denkleme indirgediği için , büyük kolaylık sağlar . N a v i e r metodunun uygulama tekniğini özetlersek:

- 1) Yük bir çift F o u r i e r (sinüs) serisine açılır .
- 2) W sehimleri de çift sinüs serisine açılır .
- 3) Yukardaki değerler plak denkleminde yerlerine yazılarak bi-linmeyen w_{mn} değerleri bulunur ve $w(x,y)$ hesaplanır .
- 4) w_{mn} değerlerine göre iç kuvvetleri veren bağıntılar ($M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, V_x, V_y$) yazılır .
- 5) Bütün bu bağıntılar m ve n 'e değişik değerler verilerek açı-lır ;yeterli sayıda terim alınarak bunların toplanması ile sonuç bulunur .

Ö r n e k 3.1

(a x 2a) boyutunda serbestçe mesnetlenmiş dikdörtgen bir plak düzgün yayılı yüklerle yüklenmiştir. Elastik yüzeyi belirleyen w ifadesini, maksimum eğilme momentlerini ve kenar reaksiyonlarını bulunuz.



Şekil 3.5. Düzgün yayılı yük etkisinde basit mesnetli plak

- 1) p yükünü $p_{mn} = \frac{16 p_0}{\pi^2 mn}$ olacak şekilde çift sinüs serisine açalım

$$p(x, y) = \frac{16 p_0}{\pi^2} \sum \sum \frac{1}{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$m = (1, 3, 5, \dots) ; n = (1, 3, 5, \dots)$$

- 2) w sehimini de çift sinüs serisine açalım. w_{mn} değeri için $b = 2a$ yazarak :

$$W_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2a} \right)^2 \right]^2} = \frac{16 p_0 a^4}{D \cdot \pi^6 mn \left[m^2 + \frac{n^2}{4} \right]^2}$$

$$W(x, y) = \frac{16 p_0 a^4}{D \cdot \pi^6} \sum \sum \frac{\sin(m\pi x/a) \cdot \sin(n\pi y/2a)}{mn \left[m^2 + \frac{n^2}{4} \right]^2}$$

$$m = (1, 3, 5, \dots) ; n = (1, 3, 5, \dots)$$

- 3) Maksimum sehim $x = a/2$, $y = a$ noktasında $(\partial w / \partial x = 0)$
 $(\partial w / \partial y = 0)$

$$W_{max} = \frac{16 p_0 a^4}{D \cdot \pi^6} \sum \sum \frac{\sin m \frac{\pi}{2} \cdot \sin n \frac{\pi}{2}}{mn \left[m^2 + \frac{n^2}{4} \right]^2}$$

$$w_{\max.} = \frac{16 p_o a^4}{D \cdot \pi^6} (0,640 - 0,032 - 0,004 + 0,004 + \dots)$$

$$\approx \frac{0,0101 p_o a^4}{D}$$

Görüldüğü gibi çift sinüs serisinin yakınsaklığı hızlıdır , iki terim almak yeterlidir .

$$(M_x)_{\max} = \frac{16 p_o a^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{[m^2 + \mu \cdot \frac{n^2}{4}] \cdot \sin \frac{m\pi}{2} \cdot \sin \frac{n\pi}{2}}{mn [m^2 + \frac{n^2}{4}]^2}$$

$$(M_y)_{\max} = \frac{16 p_o a^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{[(n^2/4) + \mu m^2] \sin(m\pi/2) \cdot \sin(n\pi/2)}{mn [m^2 + (n^2/4)]^2}$$

$$m = (1, 3, 5, \dots) ; \quad n = (1, 3, 5, \dots)$$

Bu seriler daha az hızlı yakınsaktır . İlk dört terimi almak yeterli yaklaşıklık sağlar .

$$(V_x)_{m,n} = \frac{16 p_o a}{\pi^3} \left[\frac{m^3}{mn [m^2 + (n^2/4)]^2} + (2-\mu) \frac{m \cdot (n/2)^2}{mn [m^2 + (n^2/4)]^2} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(V_x)_{x=0} = -\frac{16 p_o a}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + (2-\mu) \frac{n^2}{4}}{n (m^2 + \frac{n^2}{4})^2} \cdot \sin \frac{n\pi y}{2a}$$

$$(V_y)_{y=0} = -\frac{16 p_o a}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{n^2 + (2-\mu) \frac{m^2}{4}}{n (m^2 + \frac{n^2}{4})^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$m = (1, 3, 5, \dots) ; \quad n = (1, 3, 5, \dots)$$

Maksimum momentlerin değerlerini bulursak ($p = 0,20$ için)

$$(M_x)_{\max.} = \frac{16 p_o a^2}{4} (0,672 - 0,046 - 0,036 + 0,008 + 0,009 + 0,008 - 0,0008 - 0,0003 + \dots)$$

$$= 0,100 p_o a^2$$

$$(M_y)_{\max.} = \frac{16 p_o a^2}{4} (0,288 - 0,065 - 0,010 + 0,003 + 0,021 + 0,002 - 0,008 + \dots)$$

$$= 0,038 p_o a^2$$

Marcus metodu ile karşılaştırma:

$$w_x = \frac{5}{384} \frac{P_x l_x^4}{E I}$$

$$\frac{P_x}{P_y} = \left(\frac{l_y}{l_x} \right)^4 = 16$$

$$w_y = \frac{5}{384} \frac{P_y l_y^4}{E I}$$

$$P_x = \frac{16}{17} P_o$$

$$P_y = \frac{1}{17} P_o$$

$$M_x = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{16}{17} \right) P_o a^2 = 0.118 P_o a^2 ; M_{ox} = \frac{1}{8} P_o a^2$$

$$M_y = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{17} P_o \right) (2a)^2 = 0.029 P_o a^2 ; M_{oy} = \frac{1}{8} P_o (2a)^2$$

$$M_x = v_x \cdot M_x \quad v_x = 1 - \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{l_x}{l_y} \right)^2 \frac{M_{ox}}{M_{oy}} = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0.944 = 0.748 ; M_x = 0.088 P_o a^2$$

$$M_y = v_y \cdot M_y \quad v_y = 1 - \frac{5}{6} \left(\frac{l_y}{l_x} \right)^2 \frac{M_{oy}}{M_{ox}} = 1 - \frac{5}{6} \cdot 4 \cdot 0.058 = 0.807 ; M_y = 0.023 P_o a^2$$

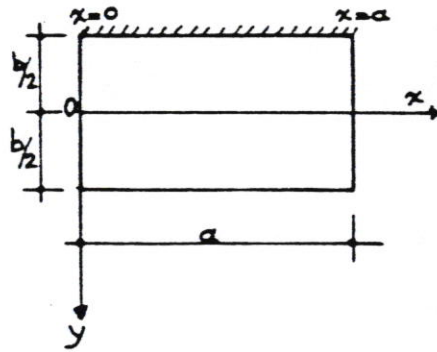
3.4. Tek Fourier serileriyle çözüm (Levy Metodu)

$$w(x,y) = w_h + w_p \quad (3.21)$$

Levy metodunda birinci adım partiküler çözümü elde etmektir. Bunun için :

- 1) Plakın karşılıklı iki kenarının serbestçe mesnetlenmesi istenir
- 2) Diğer doğrultuda plak uzunluğunun ∞ olduğu varsayılır .
- 3) x eksenine paralel kesitlerde yük dağılımının aynı olduğu varsayılır .

$x = 0$ ve $x = a$ kenarlarından serbestçe mesnetlendiğini kabul edelim .



Şekil 3.6. Levy metodunda koordinat sistemi

$b = \infty$ varsayıldığına göre plak denklemi şu şekle girer :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{D} \quad (3.22)$$

Görüldüğü gibi bu denklem (3.2) kiriş diferansiyel denklemiyle analogdur . Kiriş diferansiyel denklemi :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{EI} \longrightarrow D = \frac{EI}{1 - \mu^2}$$

idi.

$$w = w^* (1 - \mu^2) \quad (3.23)$$

(3.22) denkleminin çözümü için Navier metodunu kullanalım :

$$p(x) = \sum_m p_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.24)$$

$$W_p(x) = \sum_m W_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.25)$$

$$W'_x = \sum_m W_m \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$W''_{xx} = - \sum_m W_m \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$W'''_{xxx} = - \sum_m W_m \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \cdot \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$W^{IV}_x = W_m \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sum_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.26)$$

Bu değer ve (3.24)'de verilen $p(x)$, (3.22) diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa :

$$W_m \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sum_m \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{D} p_m \sum_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.27)$$

$$W_m = \frac{p_m a^4}{D \cdot m^4 \pi^4} \quad (3.28)$$

$$p(x) = p_0 \text{ için } \rightarrow p_m = \frac{4 p_0}{m \pi} \quad (m = 1, 3, 5, \dots)$$

$$W_m = \frac{4 p_0 a^4}{D \pi^5 m^5}$$

olur .

İkinci adım W_h homojen çözümünün bulunmasıdır .

$$\Delta \Delta W_h = 0$$

Homojen denkleminin çözümü :

$$W_h = X(x) \cdot Y(y) \quad (3.29)$$

şeklinde ifade edilirse :

$$X^{IV} \cdot Y + 2 X'' \cdot Y'' + X \cdot Y^{IV} = 0 \quad (3.30)$$

W_h 'ı tek sinüs serisi olarak yazalım :

$$W_h(x, y) = \sum_m Y_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.31)$$

Bu ifade $x = 0$ ve $x = a$ için $w = 0$, $\Delta W = 0$ sınır şartlarını sağlar . $\Delta \Delta W_h = 0$ denkleminde yerine yazılırsa :

$$\sum_m \left[\frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m''(y) + Y_m^{IV}(y) \right] = 0 \quad (3.32)$$

Buradan ,

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m''(y) + Y_m^{IV}(y) = 0 \quad (3.33)$$

(3.33) denklemi dördüncü mertebeden sabit katsayılı lineer homojen bir diferansiyel denklemdir . Bunun çözümü :

$$Y_m(y) = A_m \cdot \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \cdot \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cdot \cosh \frac{m\pi y}{a} \quad (3.34)$$

Burada A_m , B_m , C_m , D_m dört kenardaki sınır şartlarından bulunacak integrasyon sabitleridir . Eğer sınır şartları x eksenine göre simetrik ise elastik yüzey (y) 'ye göre çift fonksiyon olur .

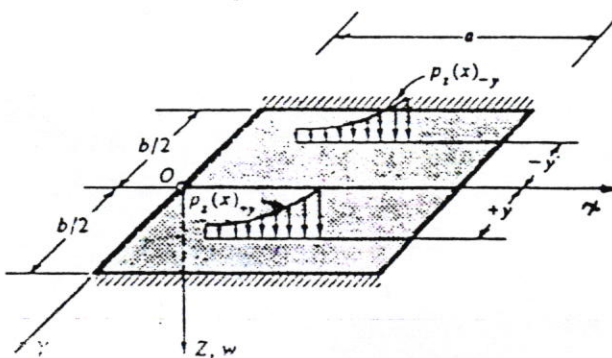
$$W(y) = W(-y) \quad (3.35)$$

O zaman C_m ve D_m katsayıları (0) olur ve :

$$Y_m(y) = A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cdot \frac{m\pi y}{a} \cdot \sinh \frac{m\pi y}{a} \quad (3.36)$$

Böylece $y = \pm b/2$ için eşit sınır şartları mevcut olduğunda :

$$W(x, y) = \left[\sum_m W_m + \sum_m \left(A_m \cdot \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cdot \frac{m\pi y}{a} \cdot \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.37)$$



Levy metodunu uygulama şartları:

- 1) Karşılıklı iki kenarı serbestçe mesnetli
- 2) Yük fonksiyonunun şekli, diğer iki kenara paralel bütün kesitlerde aynı olacak .

Şekil 3.7. Levy metodunda simetriden yararlanma

Ö r n e k 3 . 2

Dört kenarından serbestçe oturan uniform yayılı yüklü ($p=p_0$) bir dikdörtgen plağın sehimlerini Levy y metoduyla hesaplayın .

$$p(x) = \sum_m P_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$P_m = \frac{2}{a} \int_0^a p(x) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot dx$$

$$p(x) = p_0 \text{ için ; } P_m = \frac{2p_0}{a} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{2p_0}{m\pi} (1 - \cos m\pi)$$

$$P_m \begin{cases} = \frac{4p_0}{m\pi} & (m=1, 3, 5, \dots) \\ = 0 & (m=2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

Buna göre $p(x)$ i sinüs serisine açarsak :

$$p(x) = \frac{4p_0}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m=1, 3, 5, \dots)$$

$$W_m = \frac{P_m \cdot a^4}{D \cdot m^4 \pi^4} \quad P_m = \frac{4p_0}{m\pi} \quad W_m = \frac{4p_0 a^4}{D m^5 \pi^5} ; (m=1, 3, 5, \dots)$$

Böylece partiküler çözüm :

$$W_p = \frac{4p_0 a^4}{D \pi^5} \sum_m \frac{1}{m^5} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m=1, 3, 5, \dots)$$

Homojen çözüm ise :

$$W_h = \sum_m \left(A_m \cdot \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cdot \frac{m\pi y}{a} \cdot \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$W(x, y) = \left[\frac{4p_0 a^4}{D \pi^5} \sum_m \frac{1}{m^5} + \sum_m \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \cdot \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Sınır şartları $y = \pm \frac{b}{2}$ için 1) $W=0$, 2) $\Delta W=0$ buradan iki denklem elde edilir :

$$A_m \cdot \cosh \frac{m\pi b}{2a} + B_m \frac{m\pi b}{2a} \cdot \sinh \frac{m\pi b}{2a} = - \frac{4p_0 a^4}{D \pi^5 \cdot m^5}$$

$$A_m \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \cosh \frac{m\pi b}{2a} + B_m \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\frac{m\pi b}{2a} \cdot \sinh \frac{m\pi b}{2a} + 2 \cosh \frac{m\pi b}{2a} \right) = 0$$

Bu ifadelerden A_m ve B_m bulunur. Sonuçta elastik yüzey :

$$W(x,y) = \frac{4p_0q^4}{115D} \sum_m \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{2\cosh\alpha_m \cosh\eta_m + \alpha_m \sinh\alpha_m \cosh\eta_m - \eta_m \sinh\eta_m \cosh\alpha_m}{1 + \cosh 2\alpha_m} \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Burada :

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad ; \quad \eta_m = \frac{m\pi y}{a}$$

Şimdi tekrar plak diferansiyel denkleminin çözüm metotlarına dönelim. Problemin kesin çözümünün, genellikle, mümkün olmadığını, bu nedenle yaklaşık çözüm yollarının araştırıldığını belirtmiştik.

3.5. Yaklaşık çözüm metotları

Elde bazı $f_i(x,y)$ çözümleri var. Bunların kesin çözüm olabilmesi için :

$$\Delta \Delta W = \frac{p}{D}$$

denklemini ve sınır şartlarını sağlaması gerekir. Bunlardan birini sağlayan; fakat diğerini sağlamayan $f_i(x,y)$ fonksiyonlarının eksiklikleri giderilmeye çalışılır.

3.5.1 - Çözümün Plak Denklemini Sağlayıp, Sınır Şartlarını Sağlamaması Durumu :

Bu durumda W fonksiyonu f_i fonksiyonlarının toplamı olarak ifade edilir . :

$$W = \sum_{i=1}^r a_i f_i = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_r f_r \quad (3.38)$$

f_i fonksiyonları plak denklemini sağladığına göre w fonksiyonu da plak denklemini sağlayacak; sınır şartlarının ise bazılarını sağlayacak bazılarını ise sağlayamayacaktır. $a_1, a_2, \dots, a_r$ sabitleri, geri kalan sınır şartlarını mümkün olduğu kadar sağlayabilecek biçimde saptanmalıdır. O halde problem şudur :

a_i 'leri nasıl seçelim ki, hataların toplamı minimum olsun ?

İşaret farklarının ($\pm$) etkisinden kaçınabilmek için bunu şu şekilde ifade etmek daha doğru olur :

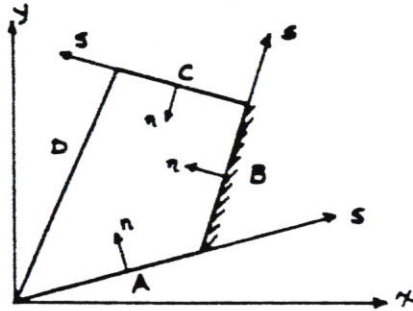
a_1 'leri nasıl seçelim ki , bütün kenarlar boyunca yapılan hataların kareleri toplamı, minimum olsun .

Hataların kareleri toplamı F olsun :

$$F = F (a_1 , a_2 \dots a_r)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0 , \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0 \dots \dots \frac{\partial F}{\partial a_r} = 0 \quad (3.39)$$

Böylece ($a_1 , a_2 \dots a_r$)'e göre r adet denklem bulunur . Bunlardan $a_1 , a_2 \dots a_r$ değerleri hesaplanır .



Şekil 3.8

Genel durumda şekildeki gibi bir plak olsun . Farklı kenarlarda farklı sınır şartları sağlanması gerekir . Örneğin :

A kenarında $W = 0$

B kenarında $\frac{\partial W}{\partial n} = 0$

C kenarında $M_n = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0$

Farklı mesnetlerde , farklı cinsten hataların karelerinin toplamı minimum olacak :

$$F = \int_A W^2 ds + \ell^2 \int_B \left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)^2 ds + \ell^4 \int_C \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right)^2 ds \quad (3.40)$$

Öncelikle boyutları (dimensiyonları) düzeltmek gerekir ki , bir toplam söz konusu olsun . l birim boyu karakterize etmekte olup , l^2 , l^4

toplamin boyutunu homojen kılmak amacıyla konmuş faktörlerdir . 1 'in boyutunu seçmek ön plana alınan sınır şartına bağlıdır . Örneğin $l = 0$ seçmek demek sehim şartını dikkate almak demektir .

3.5.2 - Çözümün Sınır Şartlarını Sağlayıp , Plak Denklemini Sağlamaması Durumu :

$$W = \sum_{i=1}^r a_i f_i = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_r f_r \quad (3.38)$$

$\Delta \Delta W = p/D$ 'i mümkün mertebe sağlayacak şekilde $a_1, a_2 \dots a_r$ belirlenecek . Bunun için farklı yollardan gidilebilir .

a) Yine hataların karelerinin toplamının minimum olmasından hareket edilir .

$$D. \Delta \Delta W \neq p$$

$$D. \Delta \Delta W = p'$$

diyelim . Fark

$$p - p' = p - \Delta \Delta W$$

Bu hataların karelerinin toplamının minimum olması isteniyor .

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \int_A (p - D. \Delta \Delta W)^2 dF & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} &= 0 \text{ olmalı .} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} &= \int_A 2 (p - D. \Delta \Delta W) (-D. \frac{\partial \Delta \Delta W}{\partial a_i}) dF = 0 \\ & \int_A (p - D. \Delta \Delta W) \frac{\partial (\Delta \Delta W)}{\partial a_i} dF = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

Buradan r tane denklem elde edilir ve a_1 'ler hesaplanır .

b) R i t z metodu : Minimum potansiyel enerji prensibinden hareket eder . Sistemin gerçek deforme durumu öyle bir durumdur ki , yük ve moment şartlarına uygun bu durumda potansiyel enerji , diğer bütün durumdakilerden daha küçüktür . Herhangi bir andaki potansiyel enerji Π ise $\partial \Pi = 0$ olmalıdır .

Bir cisme etki eden hacimsel kuvvetler X, Y, Z

Yer değiştirmeleri u, v, w

Yüzeysel kuvvetler p_x, p_y, p_z

Yer değiştirmeleri $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$

$$\Pi = A_i - \left(\int_V (X.u + Y.v + Z.w) dV + \int_A (p_x \bar{u} + p_y \bar{v} + p_z \bar{w}) dA \right) \quad (3.41)$$

Burada A_i deformasyon işidir.

$$\begin{array}{lll} \text{Plaklarda} & : & \begin{array}{ll} X = 0 & p_x = 0 \\ Y = 0 & p_y = 0 \\ Z = 0 & p_z = p \quad \bar{w} = w \end{array} \end{array}$$

$$\Pi = A_i - \int_A p \cdot w \cdot dF \quad (3.42)$$

olur. A_i deformasyon işi ise ($\sigma_z = 0$, $\varepsilon_z = 0$ olduğu hatırlanarak)

$$A_i = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (3.43)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2\tau_{xy}(1+\mu)}{E}$$

değerleri yerlerine yazılırsa :

$$A_i = \frac{1}{2E} \int_V [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu \sigma_x \sigma_y) + 2(1+\mu) \tau_{xy}^2] dV \quad (3.44)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ yerine, (2.9), (2.10), (2.11) 'de bulunan w cinsinden eşdeğerleri yazılırsa :

$$A_i = \frac{E}{1-\mu^2} \int_V \left\{ \frac{1}{2} (w''_{xx} + w''_{yy})^2 - (1-\mu) [w''_{xx} w''_{yy} - (w''_{xy})^2] \right\} z^2 dV$$

$dV = dF \cdot dz$ yazılıp $z = \pm h/2$ sınırları arasında z 'e göre integrasyon yapılırsa :

$$A_i = D \int_A \left\{ \frac{1}{2} (w''_{xx} + w''_{yy})^2 - (1-\mu) [w''_{xx} w''_{yy} - (w''_{xy})^2] \right\} dF \quad (3.45)$$

Serbestçe mesnetlenmiş, kalınlığı sabit ve kenarları doğru olan plaklarda bu ifade daha basitleşerek (G a u s s eğriligi diye adlandırılan ikinci terim sıfır olur) :

$$A_i = \frac{D}{2} \int_A (w''_{xx} + w''_{yy})^2 dF \quad (3.46)$$

halini alır. Genel halde :

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_D \left\{ (W''_{xx} + W''_{yy})^2 - 2(1-\mu) [W''_{xx} \cdot W''_{yy} - (W''_{xy})^2] \right\} dx dy - \iint_D p W dx dy \quad (3.47)$$

$$W = c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + c_3 f_3(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x, y) \quad (3.48)$$

Burada $f_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) fonksiyonları sınır şartlarını sağlamalı ve deforme plak yüzeyini temsil edebilmelidir.

$\partial \Pi = 0$ olması gerekir. Bu demektir ki :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial c_3} = 0 \dots \dots \frac{\partial \Pi}{\partial c_n} = 0 \quad (3.49)$$

Buradan c_i değerleri hesaplanır.

Buraya kadar anlatılanlardan, Ritz metoduyla plak probleminin çözümünde sınır şartlarını sağlayan ve plağın gerçek deforme yüzeyini yaklaşık olarak belirleyebilecek uygun $f_i(x, y)$ fonksiyonlarının seçiminin önemi hemen anlaşılır. Metodun istenilen yaklaşıklıkla sağlanması buna bağlıdır.

Uygun şekil fonksiyonlarının seçilmesi için de burada, trigonometrik fonksiyonlardan ve kirişlerin sehim formüllerinden yararlanılacaktır.

Düşey sehimleri, değişkenlerine ayrılmış sonsuz bir seri olarak ifade edelim.

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n W_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (3.50)$$

Burada $X_m(x)$ ve $Y_n(y)$, seri ifadesi içinde, tek başına (hiç değilse) geometrik sınır şartlarını sağlayan ve her biri x 'in veya y 'in fonksiyonları olan terimleri ifade ediyor.

$x = 0$ ve $x = a$ da serbestçe mesnetlenmiş kenarlarda, örneğin

$$\sum_m W_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.51)$$

biçiminde bir sinüs serisi kullanılabilir. Benzer şekilde y doğrultusunda $y = 0$ ve $y = b$ için serbestçe mesnetlenmiş kenarlarda

$$\sum_n W_n \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.52)$$

serisi kullanılabilir . Eğer $x = 0$ ve $x = a$ kenarları ankastre ise :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} W_m \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \quad (m = 1, 3, 5 \dots) \quad (3.53)$$

tipinde bir cosinüs serisi kullanmak yararlı olur. Koordinat eksenlerinin başlangıcı plağın ortası alınır :

$$X_m = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \left[1 - (-1)^m \cos \frac{2m\pi x}{a} \right] \quad (m = 1, 3, 5 \dots) \quad (3.54)$$

Benzer şekilde $y = 0$, $y = a$ kenarları ankastre ise :

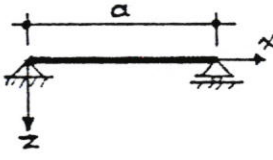
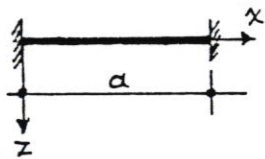
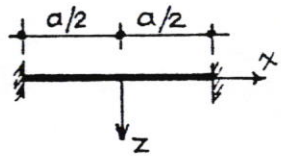
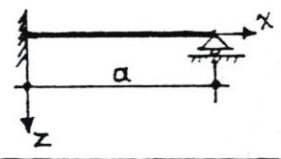
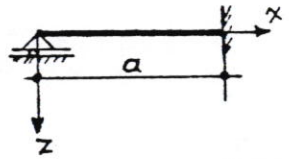
$$Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} W_n \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (3.55)$$

Karşılıklı kenarlar serbestçe mesnetlenmiş ve diğerleri ankastre ise sinüs ve cosinüs serilerinin bir kombinasyonunu birlikte kullanmak faydalı olur .

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \sum_m \sum_n W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) \\ (m = 1, 2, 3 \dots ; n = 1, 3, 5 \dots)$$

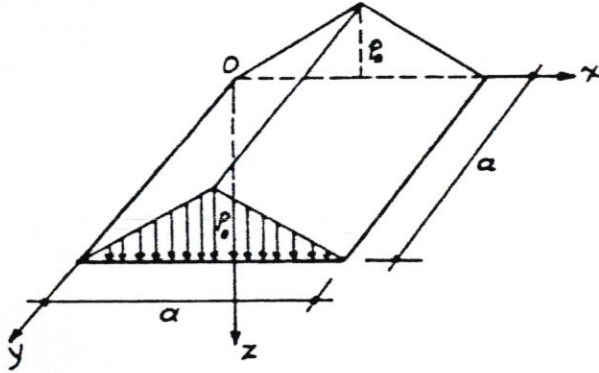
Trigonometrik fonksiyonlar ,şekil fonksiyonu için tek seçenek değildir . Şekil fonksiyonları aynı zamanda kirişlerin sehim ifadelerinden yararlanarak da bulunabilir . Bunun için (dy) genişliğinde bir şerit kiriş gibi düşünülür ve kiriş diferansiyel denklemini integre ederek elastik eğri denklemi elde edilir . Kirişin sehim formülü ile trigonometrik serilerin kombinasyonu da şekil fonksiyonu için yeni bir olanak sağlar .

T a b l o 3 . 1 . DİKDÖRTGEN PLAKLARIN YAKLAŞIK ANALİZİ İÇİN
BAZI ŞEKİL FONKSİYONLARI /2/

Durum	Sınır şartları	$w(x,y) = \sum \sum W_{mn} \cdot X_m(x) \cdot Y_n(y)$ ifadesindeki $\sum X_m(x)$ şekil fonksiyonları
1		$\sum X_m(x) = \sum \sin \frac{m\pi x}{a}$
2		$\sum X_m = \sum \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \quad (m=1,3,5\dots)$ $\sum X_m = \sum \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$ $\sum X_m = \frac{x}{a} \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^2 + \sum \frac{(-1)^m}{m^3} \cdot \frac{x^2}{a^2} \left(\frac{x}{a} - 1 \right) - \sum \frac{1}{m^3 \pi} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$
3		$\sum X_m = \sum (a^2 - 4x^2)^2 \cdot x^m \quad (m=0,1,2\dots)$
4		$\sum X_m = \frac{x}{a} \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \left(\frac{x}{2a} - 1 \right) - \sum \frac{1}{m^3 \pi} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$
4a		$\sum X_m = \sum \frac{x}{2a} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) (-1)^m - \sum \frac{1}{m^3 \pi} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$

Ö r n e k 3. 3 .

Dört kenarından serbestçe mesnetlenmiş kare bir plak , şekil (3.9)'da görüldüğü gibi üçgen prizma şeklinde bir yük etkisi altındadır . Maksimum sehim bulunuz .



$$0 < x < \frac{a}{2} \quad \text{ için } p = \frac{2 p_0 x}{a}$$

$$\frac{a}{2} < x < a \quad \text{ için } p = 2p_0 - \frac{2p_0 x}{a}$$

Şekil 3.9

Kenarlardan serbestçe mesnetlendiği için , bir çift sinüs serisi elastik yüzeyi belirtebilir .

$$W(x,y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(m = 1, 3, 5 \dots ; \quad n = 1, 3, 5 \dots)$$

Burada $w_{mn} = c_1$; $\sin \frac{m\pi x}{a} = X_m(x)$; $\sin \frac{n\pi y}{a} = Y_n(y)$ yerine geçiyor . Dış yüklerin potansiyel enerjisi :

$$V_d = \int_0^a \int_0^a [p(x,y) w(x,y)] dx dy$$

$$= -2 \sum_m \sum_n \int_0^{a/2} \int_0^a \frac{2 p_0 x}{a} \cdot W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} dx dy$$

$$= - \sum_m \sum_n \frac{8 p_0 a^2}{m^2 n \pi^3} \cdot W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{2}$$

$$A_i = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^a \sum_m \sum_n \left[W_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} \right]^2 dx dy$$

$$= \frac{D \pi^4 a^2}{8} \sum_m \sum_n W_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)$$

$$\Pi = \frac{D \pi^4 a^2}{8} \sum_m \sum_n W_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2} \right) - \sum_m \sum_n \frac{8 p_0 a^2}{m^2 n \pi^3} W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{2}$$

Toplam potansiyel enerjinin minimum olması için $\frac{\partial \Pi}{\partial W_{mn}} = 0$ olmalı.

$$\frac{D\pi^4 a^2}{4} W_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)^2 - \frac{8p_0 a^2}{m^2 n \pi^3} \cdot \sin \frac{m\pi}{2} = 0$$

$$W_{mn} = \frac{32 p_0 a^4 \sin \frac{m\pi}{2}}{m^2 n \pi^7 D (m^2 + n^2)^2}$$

$$W(x,y) = \frac{32 p_0 a^4}{D \pi^7} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\pi/2)}{m^2 n (m^2 + n^2)^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a}$$

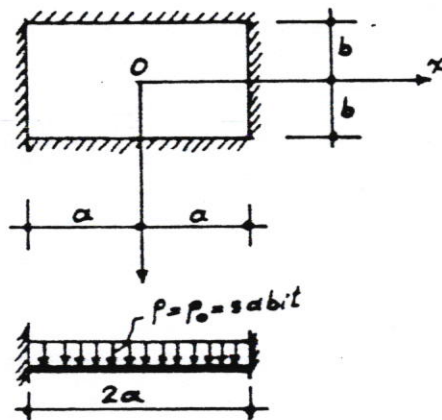
$$(m, n = 1, 3, 5, \dots)$$

Maksimum sehim $x = y = a/2$ noktasındadır. Serinin ilk üç terimini alarak ($m = 1, n = 1$; $m = 1, n = 3$; $m = 3, n = 1$)

$$W_{\max.} = \frac{7,9289 p_0 a^4}{7 D} = 0,002625 \frac{p_0 a^4}{D} \quad (\text{Kesin çözüm : } 0,00263 \frac{p_0 a^4}{D})$$

Ö r n e k 3.4.

Kenarlarının oranı $a/b = 1,5$ olan, düzgün yayılı yükle yüklü ankastre bir plağın maksimum sehimini bulunuz.



Şekil 3.10

Deforme plak yüzeyinin iki doğrultuda da simetrik olmasından yararlanmak için koordinat eksenlerinin başlangıç noktasını plağın orta noktası seçiyoruz.

$$W(x,y) = \sum_m \sum_n \frac{W_{mn}}{4} \left[1 - (-1)^m \cos \frac{m\pi x}{a} \right] \left[1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi y}{b} \right]$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots ; n = 1, 3, 5, \dots)$$

Bu ifade sınır şartlarını sağlar :

$$\begin{aligned} (W)_{x=\pm a} &= 0 & \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=\pm a} &= 0 \\ (W)_{y=\pm b} &= 0 & \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=\pm b} &= 0 \end{aligned}$$

Basitliği sağlamak için yukardaki $W(x,y)$ ifadesinin sadece ilk terimini alalım :

$$W = \frac{W_{11}}{4} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{a}\right)$$

Deformasyon enerjisi :

$$A_i = \frac{D}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\Delta W)^2 dx dy = \frac{D\pi^4 W_{11}^2}{32} \left(\frac{3b}{a^3} + \frac{3a}{b^3} + \frac{2}{ab}\right)$$

Dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi :

$$V_d = -p_0 \int_{-a}^a \int_{-b}^b W(x,y) dx dy = -p_0 W_{11} a.b$$

$$\Pi = \frac{D\pi^4 W_{11}^2}{32} \left(\frac{3b}{a^3} + \frac{3a}{b^3} + \frac{2}{ab}\right) - p_0 W_{11} a.b$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_{11}} = 0 \rightarrow \frac{2W_{11} D\pi^4}{32} \left(\frac{3b}{a^3} + \frac{3a}{b^3} + \frac{2}{ab}\right) = p_0 a.b$$

$$\frac{W_{11} \cdot D \cdot \pi^4}{16} \cdot \frac{3b^4 + 3a^4 + 2a^2b^2}{a^3b^3} = p_0 a.b$$

$$W_{11} = \frac{16 p_0 a^4}{D \cdot \pi^4} \cdot \frac{1}{3 + 3a^4/b^4 + 2\frac{a^2}{b^2}}$$

$x = 0$, $y = 0$ için $W_{11} = W_{\max}$ olur . $a/b = 1,5$ alınırsa :

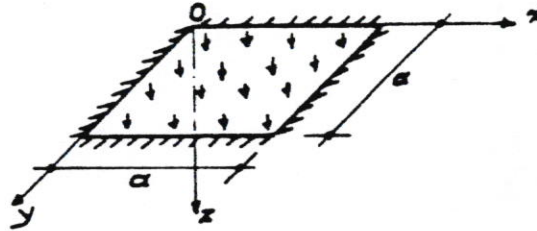
$$W_{\max} = 0,0072398 \frac{p_0 a^4}{D}$$

$$W_{\max} \approx 0,079 \frac{p_0 a^4}{E h^3} \quad (\mu = 0,3)$$

(3.57) 'deki w değerleri (3.60) 'da yerine yazıldıktan sonra plak yüzeyince integrasyon yapılırsa , plak diferansiyel denkleminin çözümü , basit fonksiyonların belirli integrallerine indirgenmiş olur . Bunun sonucu da elde edilen lineer denklemlerden bilinmeyen ($c_1, c_2 \dots c_n$) katsayıları bulunur . Bütün enerji yaklaşımlarında olduğu gibi , metodun yaklaşıklığı , uygun şekil fonksiyonlarının seçilmesine bağlıdır .

Ö r n e k 3 . 5 .

Şekilde verilen dört kenarından ankastre kare plağın , $p = p_0$ düzgün yayılı yük etkisinde , sehım ifadesini ve maksimum sehimini bulunuz .



Şekil 3.11. Düzgün yayılı yükle yüklü kare plak

$$W(x,y) = \sum \sum W_{mn} \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{a} \right)$$

($m, n = 1, 3, 5 \dots$)

seçelim . Bu şekil fonksiyonu ($x=0$ ve $x=a$ için) $w=0$ ve $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ şartlarını sağlar . Çözümü basitleştirmek için sadece ilk terimi ($m=1 ; n=1$) gözönüne alalım . Böylece varyasyon ifadesi :

$$\int_0^a \int_0^a [D \cdot W_{11} \cdot \Delta \Delta f_1(x,y) - p_0] f_1(x,y) dx dy = 0$$

haline gelir . Burada :

$$f_1(x,y) = \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$

dir. Bu değer yerine yazılırsa :

1. Terim :

$$\begin{aligned}
 W_{11} D \int_0^a \int_0^a [\Delta \Delta f_1(x,y)] f_1(x,y) dx dy &= W_{11} D \int_0^a \int_0^a \left[-\frac{1}{16} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 (1 - \cos \frac{2\pi y}{a}) \cos \frac{2\pi x}{a} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 \cos \frac{2\pi x}{a} \cdot \cos \frac{2\pi y}{a} - \frac{1}{16} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 (1 - \cos \frac{2\pi x}{a}) \cos \frac{2\pi y}{a} \right] (1 - \cos \frac{2\pi x}{a}) (1 - \cos \frac{2\pi y}{a}) \\
 &= W_{11} D \left(\frac{3\pi^4}{4a^2} + \frac{\pi^4}{2a^2} + \frac{3\pi^4}{4a^2} \right) = \frac{2W_{11} D \pi^4}{a^2}
 \end{aligned}$$

2. Terim :

$$P_0 \int_0^a \int_0^a f_1(x,y) dx dy = \frac{P_0}{4} \int_0^a \int_0^a (1 - \cos \frac{2\pi x}{a}) (1 - \cos \frac{2\pi y}{a}) dx dy = \frac{P_0 a^2}{4}$$

Böylece :

$$\frac{2W_{11} D \pi^4}{a^2} = \frac{P_0 a^2}{4}$$

$$W_{11} = \frac{P_0 a^4}{8 D \pi^4}$$

$$W_{\max} \Big|_{\substack{x=a/2 \\ y=a/2}} = \frac{P_0 a^4}{8 D \pi^4} \cdot \frac{1}{4} (1+1)(1+1) = 0.00128 \frac{P_0 a^4}{D}$$

$W_{\max.}$ için kesin değer :

$$W_{\max.} = 0.00126 \frac{P_0 a^4}{D}$$

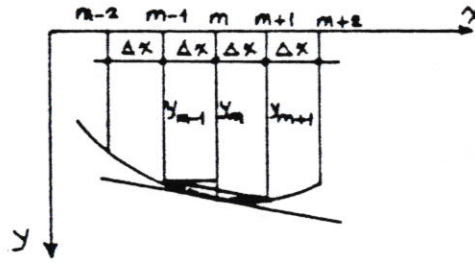
Yalnız bir terim alındığı halde hata :

$$\frac{(0.00128 - 0.00126)}{0.00126} = 1.6 \%$$

3.7. Sonlu farklar metodu

3.7.1 - Kirişler için sonlu farklar :

Sonlu farklar metodu , analitik çözümü güç olan birçok plak probleminde başvurulan , uygulama alanı çok geniş , yaklaşık bir nümerik metottur . Metodun özü , plak diferansiyel denklemini sonlu farklardan (finite differences) oluşan bir yaklaşık cebirsel denkleme dönüştürmektir . Problemi önce tek boyutlu olarak dikkate alalım . Yani $y = f(x)$ eğrisini göz önüne alalım :



Şekil 3.12. Kirişte sonlu farklar

$$x_m - x_{m-1} = x_{m+1} - x_m = \dots = \Delta x$$

olsun . Bu eğrinin m noktasındaki teğetin eğimini yani $(\frac{dy}{dx})_m$ 'i sonlu farklar cinsinden ifade etmek istiyoruz .

$$(\frac{dy}{dx})_m \approx (\frac{\Delta y}{\Delta x})_m \quad (3.61)$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ için iki değer yazılabilir : (1) İleri değer ; (2) geri değer

(1) İleri değer :

$$\frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta x} = (\frac{\Delta y}{\Delta x})_{m+1,m}$$

(2) Geri değer :

$$\frac{y_m - y_{m-1}}{\Delta x} = (\frac{\Delta y}{\Delta x})_{m,m-1}$$

(3) Ortalama(merkezi) değer:

$$\frac{1}{2} \left[(\frac{\Delta y}{\Delta x})_{m+1,m} + (\frac{\Delta y}{\Delta x})_{m,m-1} \right]$$

$$(\frac{\Delta y}{\Delta x})_m = \frac{y_{m+1} - y_m}{2\Delta x} + \frac{y_m - y_{m-1}}{2\Delta x} = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_m \cong \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2\Delta x} \quad (3.62)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_m = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)_m \cong \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 'in birim boydaki değişimini arayalım .

$$\frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m+1,m} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m,m-1} \right]$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta x} - \frac{y_m - y_{m-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cong \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{(\Delta x)^2} \quad (3.63)$$

Acaba $\frac{d^4 y}{dx^4}$ sonlu farklar cinsinden nasıl ifade edilir ?

$$\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)_m \cong \left(\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}\right)_m$$

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_m = \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{(\Delta x)^2} = \phi(x)_m$$

diyelim .

$$\left(\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}\right) = \left(\frac{\Delta^2 \phi}{\Delta x^2}\right)$$

olacaktır. (3.63) ifadesi yardımıyla :

$$\frac{\Delta^2 \phi}{\Delta x^2} = \frac{\phi_{m+1} - 2\phi_m + \phi_{m-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\phi_{m+1} = \frac{y_{m+2} - 2y_{m+1} + y_m}{(\Delta x)^2}$$

$$\phi_{m-1} = \frac{y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}}{(\Delta x)^2}$$

Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa :

$$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = \frac{(y_{m+2} - 2y_{m+1} + y_m) - (y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1})2 + (y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2})}{(\Delta x)^4}$$

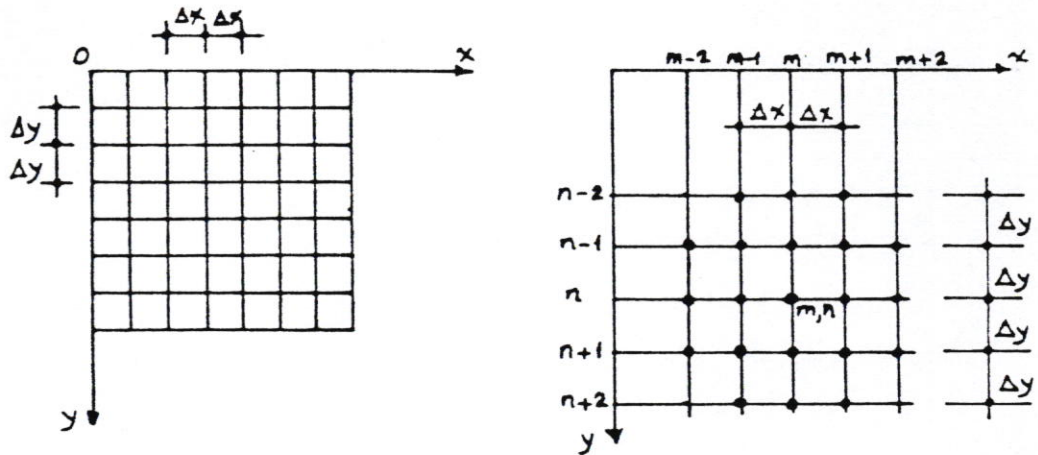
$$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = \frac{y_{m+2} - 4y_{m+1} + 6y_m - 4y_{m-1} + y_{m-2}}{(\Delta x)^4} \quad (3.64)$$

TÜREV	K A T S A Y I L A R	ÇARPAN
y'	$\begin{array}{ccccc} & & (-1) & \text{---} & (+1) & & \\ & & & & & & \end{array}$	$\frac{1}{2 \Delta x}$
y''	$\begin{array}{ccccc} & & (+1) & -2 & (+1) & & \\ & & & & & & \end{array}$	$\frac{1}{(\Delta x)^2}$
y'''	$\begin{array}{ccccc} & & (-1) & +2 & & -2 & (+1) \\ & & & & & & \end{array}$	$\frac{1}{2(\Delta x)^3}$
$y^{(4)}$	$\begin{array}{ccccc} & & (+1) & -4 & +6 & -4 & (+1) \\ & & & & & & \end{array}$	$\frac{1}{(\Delta x)^4}$
NOKTA	$\begin{array}{ccccc} & & m-2 & m-1 & m & m+1 & m+2 \\ & & & & & & \end{array}$	

Tablo 3.2. Kirişte türevlerin sonlu farklarla ifadesi için katsayılar şeması

3.7.2 - Plaklar için sonlu farklar :

Şimdi plak denkleminde gelelim : $W = W(x,y)$; yani iki doğrultuda değişkenlik söz konusudur . Fakat parsiyel türev alınırken , diğer değişken sabit kabul edileceğinden , tek bir değişkene göre türevlerde bulunan ifadeler geçerli olur .



Şekil 3. 13 . Plaklarda sonlu farklar ağı

Plaşı şekilde görüldüğü gibi , bir ağ biçiminde Δx ve Δy genişliğinde dilimlere ayırdığımızı , ağın kesim noktalarındaki sehimleri sonlu farklar olarak gösterdiğimizi düşünelim . (m,n) noktasını merkez noktası kabul edelim .

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_{mn} \cong \frac{w_{m-2,n} - 4w_{m-1,n} + 6w_{mn} - 4w_{m+1,n} + w_{m+2,n}}{(\Delta x)^4} \quad (3.65)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{mn} \cong \frac{w_{m,n-2} - 4w_{m,n-1} + 6w_{mn} - 4w_{m,n+1} + w_{m,n+2}}{(\Delta y)^4} \quad (3.66)$$

İki değişkene göre alınan türevleri yeniden inceleyelim .

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{mn} \cong \frac{w_{m+1,n} - w_{m-1,n}}{2\Delta x} = \phi_{mn} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{mn} \cong \frac{w_{m,n+1} - w_{m,n-1}}{2\Delta y}$$

Burada $\phi_{m,n} = \phi(x,y)_{m,n}$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{mn} \cong \frac{\Delta}{\Delta y} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{mn} = \left[\frac{\Delta \phi(x,y)}{\Delta y}\right]_{mn} = \frac{\phi_{m,n+1} - \phi_{m,n-1}}{2\Delta y}$$

$$\phi_{m,n+1} = \frac{w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1}}{2\Delta x}; \phi_{m,n-1} = \frac{w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cong \frac{\Delta^2 w}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{(w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n-1}) - (w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1})}{4\Delta x \Delta y} \quad (3.67)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{mn} \cong \frac{w_{m+1,n} - 2w_{mn} + w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (3.68)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{mn} \cong \frac{w_{m,n+1} - 2w_{mn} + w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.69)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{mn} \cong \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2} = \frac{\Delta^2}{\Delta y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{mn} = \frac{\Delta^2 \phi}{\Delta y^2} = \frac{\phi_{m,n+1} - 2\phi_{mn} + \phi_{m,n-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2}\right)_{mn} = \frac{(w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1}) - 2(w_{m+1,n} - 2w_{mn} + w_{m-1,n})}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} + \frac{(w_{m+1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m-1,n-1})}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{mn} = \left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2}\right)_{mn} = \frac{4w_{mn} - 2(w_{m,n+1} + w_{m+1,n} + w_{m-1,n} + w_{m,n-1})}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{W_{m+1,n+1} + W_{m-1,n+1} + W_{m+1,n-1} + W_{m-1,n-1}}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} \quad (3.70)$$

Plak diferansiyel denklemi sonlu farklar cinsinden yazılırsa :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w}{\Delta y^4} = \frac{P}{D}$$

Sonlu farklar için (3.65), (3.66), (3.70) de bulunan değerler yerlerine yazılırsa :

$$\begin{aligned} & \frac{W_{m-2,n} - 4W_{m-1,n} + 6W_{m,n} - 4W_{m+1,n} + W_{m+2,n}}{(\Delta x)^4} + \dots \\ & + \frac{8W_{m,n} - 4(W_{m,n+1} + W_{m+1,n} + W_{m-1,n} + W_{m,n-1}) + 2(W_{m+1,n+1} + W_{m-1,n+1} + W_{m+1,n-1} + W_{m-1,n-1})}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} + \dots \\ & + \frac{W_{m,n-2} - 4W_{m,n-1} + 6W_{m,n} - 4W_{m,n+1} + W_{m,n+2}}{(\Delta y)^4} = \frac{P}{D} \quad (3.71) \end{aligned}$$

Denklemin her iki tarafı $(\Delta x)^2 (\Delta y)^2$ ile çarpılır ve $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \alpha$ denirse :

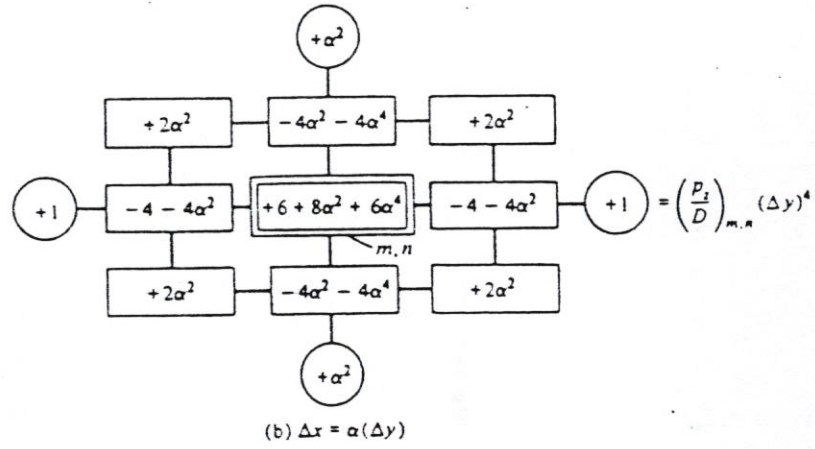
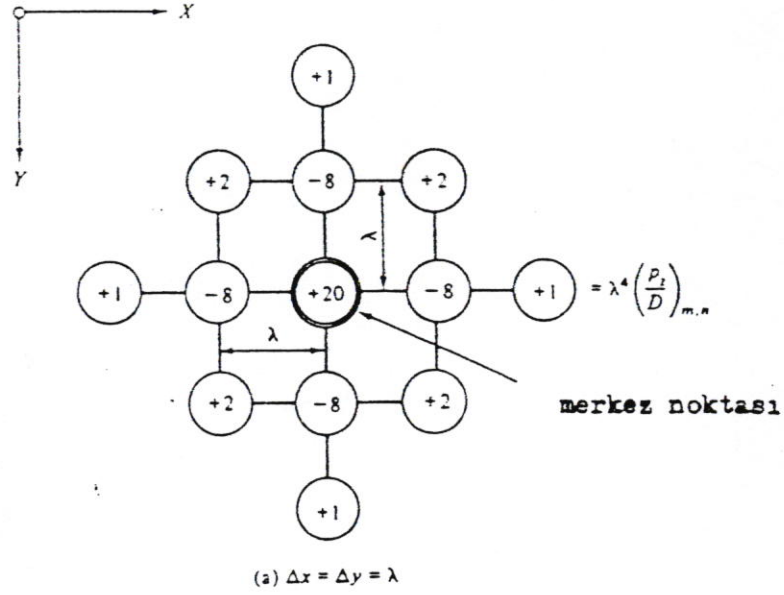
Dikdörtgen elemanlar için, plak denkleminin sonlu farklarla ifadesi

$$\begin{aligned} & W_{m,n} \left[6\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + 8 \right] - 4 \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) (W_{m-1,n} + W_{m+1,n}) + (1 + \alpha^2) (W_{m,n-1} + W_{m,n+1}) \right] + \dots \\ & + 2 \left(\frac{W_{m+1,n+1}}{\alpha} + \frac{W_{m-1,n+1}}{\alpha} + \frac{W_{m+1,n-1}}{\alpha} + \frac{W_{m-1,n-1}}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha^2} (W_{m-2,n} + W_{m+2,n}) + \alpha^2 (W_{m,n-2} + W_{m,n+2}) = \frac{P}{D} \cdot \alpha^2 (\Delta y)^4 \quad (3.72) \end{aligned}$$

Eğer $\Delta x = \Delta y$ olarak alınırsa $\alpha = 1$ olur .

Kare elemanlar için plak denklemi .

$$\begin{aligned} & 20W_{m,n} - 8(W_{m-1,n} + W_{m+1,n} + W_{m,n-1} + W_{m,n+1}) + 2(W_{m+1,n+1} + W_{m-1,n+1} + W_{m+1,n-1} + W_{m-1,n-1}) + \dots \\ & + (W_{m-2,n} + W_{m+2,n} + W_{m,n-2} + W_{m,n+2}) = \frac{P}{D} \cdot (\Delta y)^4 \quad (3.73) \end{aligned}$$



Tablo 3.3. Plaklarda Sonlu Farklar Ağı için
Katsayılar Şeması

3.7.3 - İç kuvvetler

$$\begin{aligned} (M_x)_{mn} &= -D \left[\frac{W_{m+1,n} - 2W_{mn} + W_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} + \mu \frac{W_{m,n+1} - 2W_{mn} + W_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \right] \\ (M_y)_{mn} &= -D \left[\frac{W_{m,n+1} - 2W_{mn} + W_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} + \mu \frac{W_{m+1,n} - 2W_{mn} + W_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \right] \\ (M_{xy})_{mn} &= -D(1-\mu) \frac{(W_{m+1,n+1} + W_{m-1,n-1}) - (W_{m-1,n+1} + W_{m+1,n-1})}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y} \end{aligned} \quad (3.74)$$

$\Delta x = \Delta y = \lambda$ ise :

$$\begin{aligned} (M_x)_{mn} &= -\frac{D}{\lambda^2} \left[(W_{m+1,n} - 2W_{mn} + W_{m-1,n}) + \mu (W_{m,n+1} - 2W_{mn} + W_{m,n-1}) \right] \\ (M_y)_{mn} &= -\frac{D}{\lambda^2} \left[(W_{m,n+1} - 2W_{mn} + W_{m,n-1}) + \mu (W_{m+1,n} - 2W_{mn} + W_{m-1,n}) \right] \\ (M_{xy})_{mn} &= \frac{(1-\mu)D}{4\lambda^2} (W_{m+1,n+1} - W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n+1} + W_{m-1,n-1}) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Q_x ve Q_y değerlerini bulmak için önce : $(\Delta W) \cong \frac{\Delta^2 W}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta^2 W}{(\Delta y)^2}$

$$(\Delta W)_{mn} = \frac{W_{m-1,n} - 2W_{mn} + W_{m+1,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{W_{m,n-1} - 2W_{mn} + W_{m,n+1}}{(\Delta y)^2}$$

$\Delta x = \Delta y = \lambda$:

$$(\Delta W)_{mn} = \frac{1}{\lambda^2} (W_{m-1,n} + W_{m+1,n} + W_{m,n-1} + W_{m,n+1} - 4W_{mn})$$

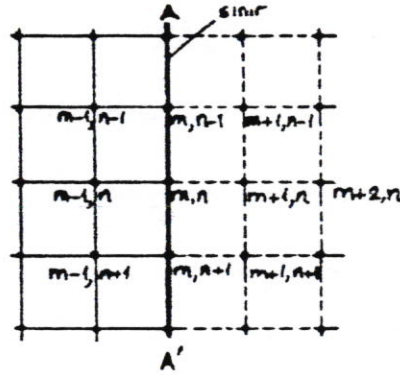
$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta W)_{mn} = -D \frac{(\Delta W)_{m+1,n} - (\Delta W)_{m-1,n}}{2\Delta x} \\ &= -\frac{D}{2\lambda} \left\{ \left[\left(\frac{\Delta^2 W}{\Delta x^2} \right)_{m+1,n} - \left(\frac{\Delta^2 W}{\Delta x^2} \right)_{m-1,n} \right] + \left[\left(\frac{\Delta^2 W}{\Delta y^2} \right)_{m+1,n} - \left(\frac{\Delta^2 W}{\Delta y^2} \right)_{m-1,n} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Q_x)_{mn} &= -\frac{D}{2\lambda^3} (W_{m+2,n} - 4W_{m+1,n} + 4W_{m,n} - W_{m-1,n} + W_{m-2,n} + W_{m+1,n+1} - W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n+1} + W_{m-1,n-1}) \\ (Q_y)_{mn} &= -\frac{D}{2\lambda^3} (W_{m,n+2} - 4W_{m,n+1} + 4W_{m,n} - W_{m,n-1} + W_{m,n-2} + W_{m+1,n+1} - W_{m-1,n+1} - W_{m+1,n-1} + W_{m-1,n-1}) \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} (V_x)_{mn} &= -\frac{D}{2\lambda^3} \left[2(3-\mu)(W_{m-1,n} - W_{m+1,n}) + (2-\mu)(W_{m+1,n+1} + W_{m-1,n+1} - W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n-1}) + W_{m+2,n} - W_{m-2,n} \right] \\ (V_y)_{mn} &= -\frac{D}{2\lambda^3} \left[2(3-\mu)(W_{m,n-1} - W_{m,n+1}) + (2-\mu)(W_{m+1,n+1} + W_{m-1,n+1} - W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n-1}) + W_{m,n+2} - W_{m,n-2} \right] \end{aligned} \quad (3.77)$$

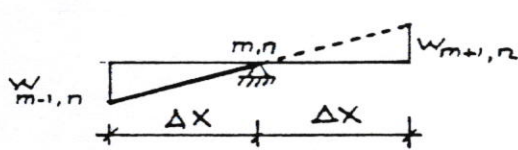
3.7.4 - Sınır şartları

Çözümün tam olması için, diferansiyel denklemin çözümü yetmez; sınır şartlarının da sağlanması gerekir. Bunun için merkez noktası, sınır üzerine taşınır ve plağın fiktif olarak devam ettiği varsayılır.



Şekil 3.14

a) $A - A'$ basit mesnetlenmiş kenar ise :



$$1) W|_{AA'} = 0$$

$$2) \Delta W|_{AA'} = 0$$

$$1) W_{m,n} = W_{m,n+1} = W_{m,n-1} = W_{m,n+2} = W_{m,n-2} = 0$$

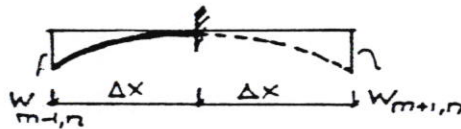
$$2) \Delta W_{m,n} = \frac{W_{m+1,n} - 2W_{m,n} + W_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{W_{m,n+1} - 2W_{m,n} + W_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

$$W_{m+1,n} + W_{m-1,n} = 0$$

$$W_{m+1,n} = -W_{m-1,n}$$

(3.78)

b) $A - A'$ ankastre kenar ise :



$$1) W|_{AA'} = 0$$

$$2) \frac{\partial W}{\partial x}|_{AA'} = 0$$

$$1) W_{m,n} = W_{m,n-1} = W_{m,n+1} = W_{m,\dots} = 0$$

$$2) \frac{W_{m+1,n} - W_{m-1,n}}{2\Delta x} = 0$$

$$W_{m+1,n} = W_{m-1,n}$$

(3.79)

1) $M_x|_{AA'} = 0$

2) $V_x|_{AA'} = 0$

1) $(M_x)_{m,n} \cong -2(1+\mu)W_{m,n} + W_{m+1,n} + W_{m-1,n} + \mu(W_{m,n+1} + W_{m,n-1}) = 0$

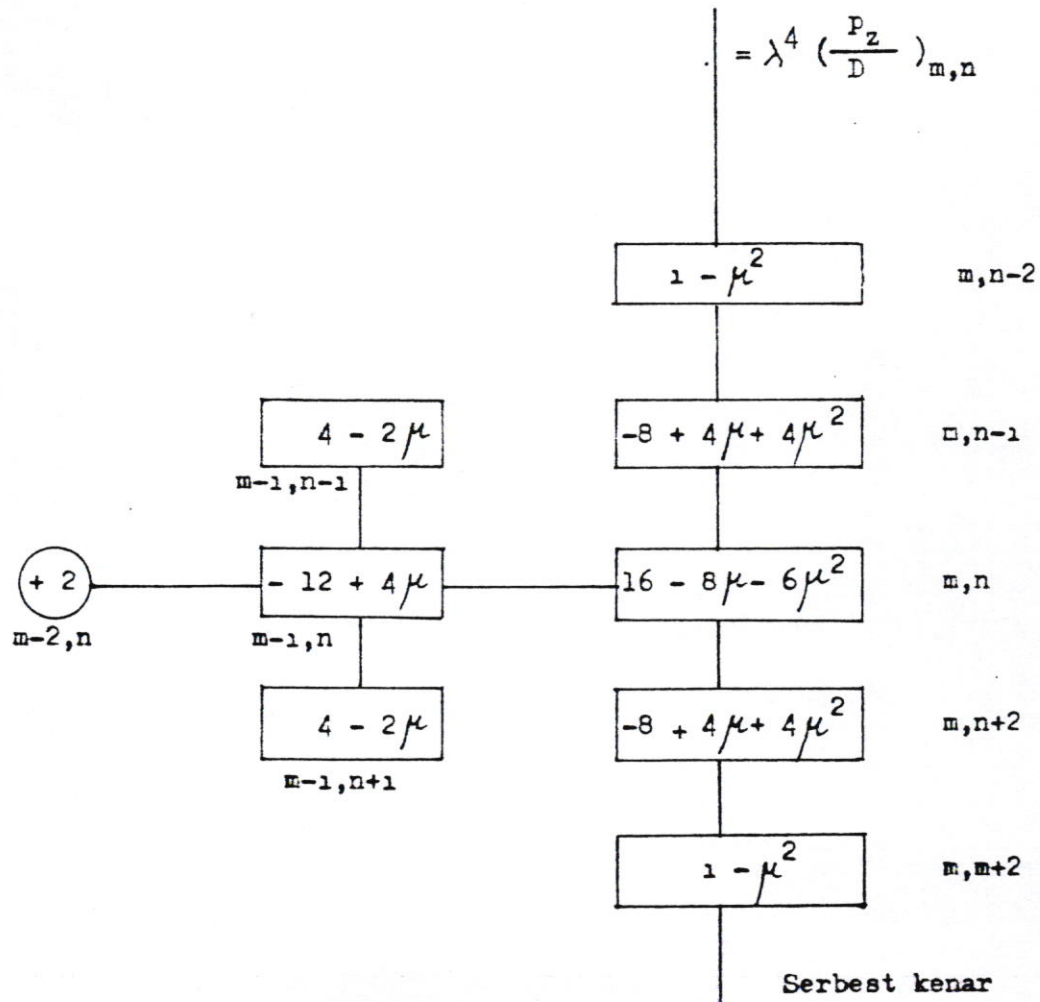
2) $(V_x)_{m,n} \cong 2(3-\mu)(W_{m-1,n} - W_{m+1,n}) + (2-\mu)(W_{m+1,n+1} - W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n-1}) + W_{m+2,n} - W_{m-2,n} = 0$

Fiktif noktaların sehimlerini elimine etmek için iki ek ifade gerekli.

3) $(M_x)_{m,n-1} \cong -2(1+\mu)W_{m,n-1} + W_{m-1,n-1} + W_{m+1,n-1} + \mu(W_{m,n-2} + W_{m,n}) = 0$

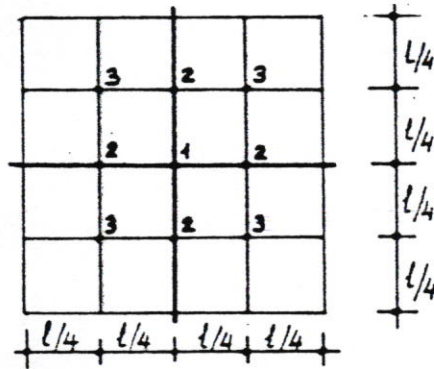
4) $(M_x)_{m,n+1} \cong -2(1+\mu)W_{m,n+1} + W_{m-1,n+1} + W_{m+1,n+1} + \mu(W_{m,n+2} + W_{m,n}) = 0$

Bu ifadelerden $W_{m+2,n}$, $W_{m+1,n}$, $W_{m+1,n-1}$, $W_{m+1,n+1}$ yok edilirse boşta (serbest) kenar için katsayılar şeması elde edilir .



Ö r n e k 3. 5 .

Düzgün yayılı yük etkisinde , kenarlarından serbestçe mesnetlenmiş kare plak



a) $\Delta x = \Delta y = l/4$ olsun.

W_1, W_2, W_3 bulunacak .

Şekil 3.15

1 noktası için :

$$20 W_1 - 8(4 W_2) + 2(4 W_3) = \frac{p_0 \left(\frac{l}{4}\right)^4}{D}$$

$$a = p_0 \cdot \frac{\left(\frac{l}{4}\right)^4}{D} = \frac{p_0 l^4}{256 D}$$

$$\underline{20 W_1 - 32 W_2 + 8 W_3 = a} \quad (1)$$

2 noktası için :

$$20 W_2 - 8(2 W_3 + W_1 + 0) + (2 W_2 + 0 + 0)2 + (W_2 + 0 + 0 + W'_2) = a$$

$$20 W_2 - 8(W_1 + 2 W_3) + 4 W_2 = a$$

$$\underline{24 W_2 - 8 W_1 - 16 W_3 = a} \quad (2)$$

3 noktası için :

$$20 W_3 - 8(2 W_2 + 0 + 0) + 2 W_1 + 2 W_1 + 2 W'_1 = a$$

$$\underline{20 W_3 - 16 W_2 + 2 W_1 = a} \quad (3)$$

$$W_3 = \frac{35}{64} a$$

$$W_2 = \frac{3}{4} a$$

$$W_1 = \frac{33}{32} a$$

$$W = \frac{33}{32} \cdot \frac{p_0 l^4}{256 D} = 0,004028 \frac{p_0 l^4}{D}$$

Kesin çözüm (serilerle bulunmuş değer : $0,0041 \frac{p_0 l^4}{D}$)

Momentler :

$$\begin{aligned} \max M_x = M_{x(1)} &= -D \left(\frac{-2W_1 + W_2 + W_2}{\frac{l^2}{16}} + \mu \frac{-2W_1 + 2W_2}{\frac{l^2}{16}} \right) \\ &= -\frac{32D}{l^2} (1 + \mu) (W_2 - W_1) \\ &= \frac{32}{256} \cdot \frac{9}{32} p_0 l^2 (1 + \mu) = 0,0351 p_0 l^2 (1 + \mu) \end{aligned}$$

Betonarme için $\mu = 0,15$ alınırsa $\max. M_x = 0,040365 p_0 l^2$

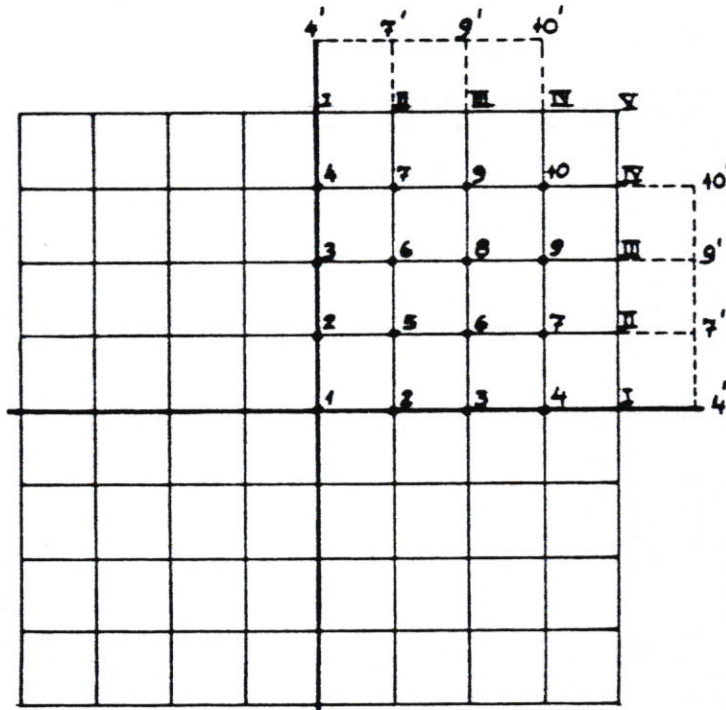
$\mu = 0,20$ için $M_x = 0,04212 p_0 l^2$

$\mu = 0,25$ için $M_x = 0,04390 p_0 l^2$

Serilerle hesaplanmış kesin çözüm :

$\mu = 0,25$ için $M_{x(1)} = 0,046 p_0 l^2$

b) $\Delta x = \Delta y = 1/8$ olsun



Şekil 3.16

Sınır şartlarından :

$$W_1 = W_{11} = W_{111} = W_{1V} = 0$$

$$W'_4 = -W_4, W'_7 = -W_7, W'_9 = -W_9, W'_{10} = -W_{10}$$

Diferansiyel denklemi düğüm noktaları için yazılırsa, $a = p_0 \frac{(1/8)^4}{D}$ olmak üzere :

i	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}	ikinci taraf
1	5	-8	1	-	2	-	-	-	-	-	$a/4$
2	-8	25	-8	1	-16	6	-	-	-	-	a
3	1	-8	20	-8	4	-16	4	2	-	-	a
4	-	1	-8	19	-	4	-16	-	2	-	a
5	1	-8	2	-	11	-8	1	1	-	-	$a/2$
6	-	3	-8	2	-8	23	-7	-8	3	-	a
7	-	-	2	-8	1	-8	20	2	-8	1	a
8	-	-	1	-	1	-8	2	10	-8	1	$a/2$
9	-	-	-	1	-	3	-8	-8	21	-8	a
10	-	-	-	-	-	1	1	-	-8	9	$a/2$

$$W_1 = 16,6081 a$$

$$W_2 = 15,4436 a$$

$$W_3 = 12,0311 a$$

$$W_4 = 6,6634 a$$

$$W_5 = 14,3636 a$$

$$W_6 = 11,1962 a$$

$$W_7 = 6,2065 a$$

$$W_8 = 8,7427 a$$

$$W_9 = 4,8598 a$$

$$W_{10} = 2,7144 a$$

$$M_x = -D \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_i + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{(1)} &= \frac{+W_2 - 2W_1 + W_2}{(\Delta x)^2} = - \frac{2(W_1 - W_2)}{(\Delta x)^2} \\ &= -2 \frac{1,1645}{(\Delta x)^2} a = - \frac{2,3290}{(\Delta x)^2} a \end{aligned}$$

$$M_x = + D \frac{2,3290}{(\Delta x)^2} (1 + \mu) z = \frac{2,3290}{(1/8)^2} \cdot p (1/8)^4 = \frac{2,3290}{64} p_0 l^2$$

$$M_x = 0,0364 (1 + \mu) p_0 l^2$$

$$\mu = 0,25 \text{ için}$$

$$M_x = 1,25 \cdot 0,0364 p_0 l^2 = 0,0455 p_0 l^2$$

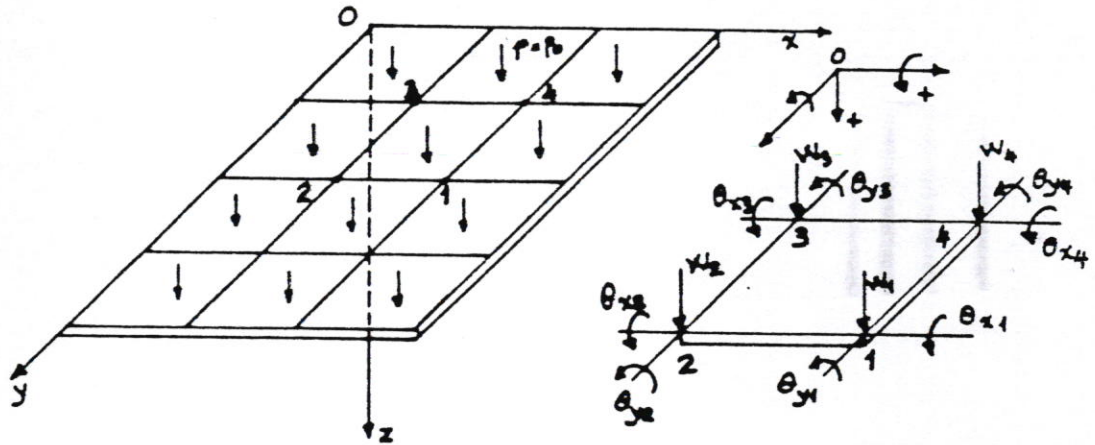
$$\mu = 0,25 \text{ için kesin çözüm : } 0,046 p_0 l^2$$

$$w_{\max.} = 16,6081 \frac{p_0 (1/8)^4}{D} = \frac{16,6081}{64,64} \cdot \frac{p_0 l^4}{D} = 0,00406 \frac{p_0 l^4}{D}$$

$$\text{kesin çözüm : } 0,0041 \frac{p_0 l^4}{D}$$

3.8. Sonlu elemanlar metodu

Sürekli bir ortam olan plak , fiktif (iyali) sınırlarla sonlu sayıda elemana bölünür . Bu sonlu elemanların , birbirleriyle bağlantısının , yalnızca , "düğüm noktaları" denilen köşe noktalarında olduğu varsayılır. Aynı şekilde elemanların kenarlarında yayılı durumdaki iç kuvvetler ya da deplasmanlar , düğüm noktalarında yoğunlaşmış kabul edilir .

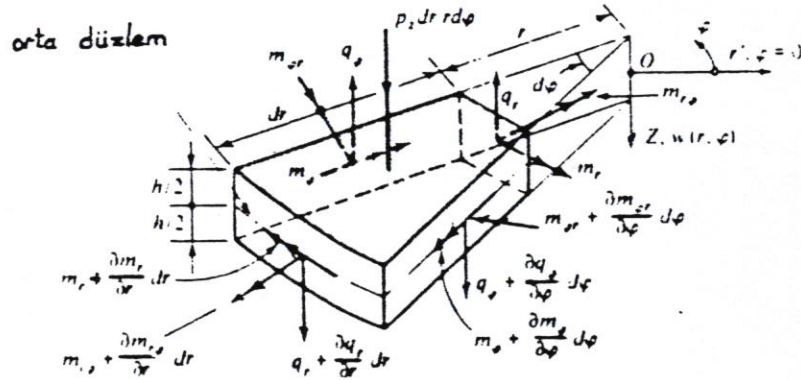
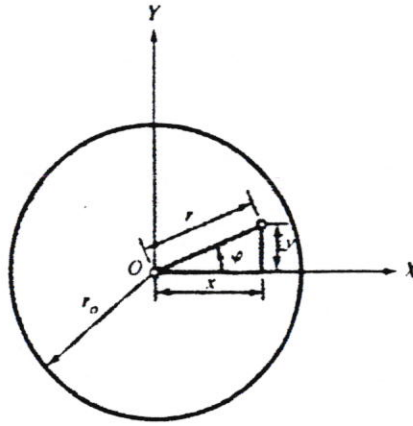


Şekil 3.17.(a) Dikdörtgen bir plakta sonlu eleman ağı

(b) Dikdörtgen bir sonlu elemanın düğüm noktalarındaki deplasmanlar

Seçilen metoda göre bilinmeyen olarak düğüm noktalarındaki deplasmanlar ya da kuvvetler alınır . Buna göre sonlu eleman " deplasman modeli" ya da " denge modeli" olarak adlandırılır . Geometrik bir bakış açısı sağladığı için genellikle deplasman modeli kullanılır . Düğüm noktaları için süreklilik şartları yazılarak lineer bir cebirsel denklem takımı elde edilir . Böylece plak diferansiyel denkleminin çözümü , cebirsel bir denklem takımının çözümüne dönüştürülmüş olur . Ancak çözüm hızlı bir bilgisayar yardımı olmaksızın mümkün değildir . Konuyla ilgilenenler daha geniş bilgiyi kaynak /2/ ve /5/ de bulabilirler .

BÖLÜM. 4 . DAİRESSEL PLAKLAR

4.1. Polar koordinatlara geçiş

Şekil 4.1. Dairesel plak

Dairesel plakların incelenmesinde polar koordinatların kullanılması büyük kolaylık sağlar . Bunun için karteziyen koordinatlardan polar'a geçiş gereklidir .

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

(4.1)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)$$

x , r ve φ 'nin fonksiyonu olduğuna göre $W(r, \varphi)$ nin x 'e göre türevi :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{r} \cdot \sin \varphi \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \cos \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) W \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) = \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\cos \varphi \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \sin^2 \varphi \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin 2\varphi \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi \frac{\partial W}{\partial \varphi} \quad (4.5)$$

Benzer şekilde :

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi \text{ ve } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \varphi$$

olduğu için

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \sin \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin 2\varphi \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi \frac{\partial W}{\partial \varphi} \quad (4.7)$$

(4.4) ve (4.6) bağıntıları dikkate alınarak ve $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)$ olduğu hatırlanarak :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \sin 2\varphi \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cos 2\varphi \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{1}{2r^2} \sin 2\varphi \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{2r} \sin 2\varphi \frac{\partial W}{\partial r} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{r} \cos 2\varphi \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} \end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.5) ve (4.7) yardımıyla $\Delta_p W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ aranırsa :

$$\Delta_p W = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \quad (4.9)$$

bulunur . Şu halde polar koodinatlarda Laplace operatörü :

$$\Delta_P = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (4.10)$$

Buna göre polar koordinatlarda plak diferansiyel denklemi :

$$\Delta_P \Delta_P W = \frac{p(r, \varphi)}{D} \quad (4.11)$$

Açık yazılırsa :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) = \frac{p(r, \varphi)}{D} \quad (4.11a)$$

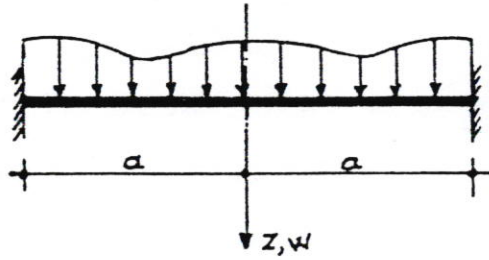
İç kuvvetlerin Polar koordinatlarda ifadesi :

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right] \\ M_\varphi &= -D \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right) \\ M_{r\varphi} = M_{\varphi r} &= -D(1-\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) = -D(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \\ Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta_P W) \\ Q_\varphi &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Delta_P W) \\ V_r &= Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} \\ V_\varphi &= Q_\varphi + \frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial r} \end{aligned}$$

(4.12)

4.2. Merkeze göre Simetrik yüklü Dairesel Plaklar

4.2.1 - Genel



Şekil 4.2. Merkeze göre simetrik yüklü dairesel plak

Yükün merkeze göre simetrik olması demek , yük yalnızca r 'e bağlı olarak değişiyor demektir . $p(r, \varphi) = p(r)$
Plak da merkeze göre simetrik ve her yerde mesnet şartları aynı . Böyle olunca W de sadece r 'e bağlı olarak değişir ; φ 'den bağımsızdır . İç kuvvetler için de aynı şey söylenebilir . Demek ki hiçbir şekilde φ 'e göre değişme söz konusu değildir . $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ olur.

Bu durumda polar koordinatlarda Laplace operatörü :

$$\Delta_p = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \quad (4.13)$$

biçimini alır . Plak diferansiyel denklemi :

$$\Delta_p \Delta_p W(r) = \frac{p(r)}{D} \quad (4.14)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) = \frac{p(r)}{D}$$

$$\frac{d^4 W}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3 W}{dr^3} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{2}{r^3} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^3 W}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W}{dr^2} \right) = \frac{p(r)}{D}$$

$$\boxed{\frac{d^4 W}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 W}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dW}{dr} = \frac{p(r)}{D}} \quad (4.15)$$

Merkezinine göre simetrik dairesel plakların diferansiyel denklemi .

Polar koordinatlarda iç kuvvetler için bulunan ifadelerde $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ yazılırsa :

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dW}{dr} \right)$$

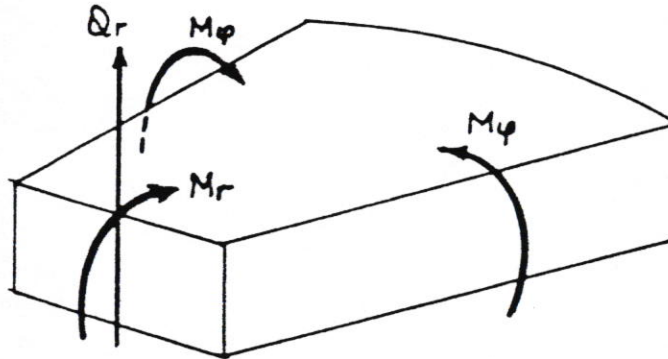
$$M_\varphi = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \mu \frac{d^2 W}{dr^2} \right)$$

$$M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = 0$$

(4.16)

$$Q_r = V_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) = -D \left(\frac{d^3 W}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} \right)$$

$$Q_\varphi = 0$$



$$M_r \neq 0$$

$$M_\varphi \neq 0 \text{ (sabit)}$$

$$M_{r\varphi} = 0$$

$$Q_\varphi = 0$$

Şekil 4.3. Dairesel plâk elemanında momentler

Diferansiyel denklemin çözümü :

$$\frac{r}{a} = \rho \text{ değişken dönüşümünü yapalım. } dr = a \cdot d\rho$$

$$\frac{d^4 W}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{d^3 W}{d\rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \frac{dW}{d\rho} = \frac{\rho a^4}{D}$$

(4.17)

$$W = W_H + W_P$$

(4.18)

4.2.2 - Homojen çözüm :

76

Denklemin homojen kısmı Euler tipi bir diferansiyel denklemdir .
Katsayıların üsleri ile türev mertebesi toplamı her terimde sabittir.

$$w^{iv} + \frac{2}{\rho} w''' - \frac{1}{\rho^2} w'' + \frac{1}{\rho^3} \cdot w' = 0$$

Her iki tarafı ρ^4 ile çarpalım :

$$\rho^4 w^{iv} + 2\rho^3 w''' - \rho^2 w'' + \rho w' = 0 \quad (4.19)$$

Böyle bir denklemin genel çözümü :

$$W = C \cdot \rho^\lambda$$

$$W' = C \cdot \lambda \cdot \rho^{\lambda-1}$$

$$W'' = \lambda(\lambda-1) C \rho^{\lambda-2}$$

$$W''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) C \rho^{\lambda-3}$$

$$W^{iv} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) C \rho^{\lambda-4}$$

Bu değerleri (4.19) denkleminde yerleştirirsek :

$$C \cdot \rho^\lambda [\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - \lambda(\lambda-1) + \lambda] = 0$$

Parantez içindeki değer , $f(\lambda)$, karakteristik denklemdir .

Bu denklemin kökleri : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

Farklı kökler ise :

$$W_h = C_1 \rho^{\lambda_1} + C_2 \rho^{\lambda_2} + C_3 \rho^{\lambda_3} + C_4 \rho^{\lambda_4}$$

şeklinde olacaktır . Bu köklerden örneğin ikisi katlı kök ise :

$(\lambda_i = \lambda_{i+1})$ bu köklere ait terimler :

$$C_i \rho^{\lambda_i} + \ln \rho C_{i+1} \cdot \rho^{\lambda_{i+1}}$$

biçiminde olur .

Şimdi karakteristik denkleme dönelim ; önce λ parantezine alalım

$$f(\lambda) = \lambda [(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 2(\lambda-1)(\lambda-2) - (\lambda-1) + 1]$$

Köşeli parantezi sadeleştirelim .

$$f(\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda) = 0$$

$$f(\lambda) = \lambda^2(\lambda-2)^2 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = \lambda_4 = 2 \end{array}} \quad (4.20)$$

$$W_h = C_1 \rho^{\lambda_1} + \ln \rho C_2 \rho^{\lambda_2} + C_3 \rho^{\lambda_3} + \ln \rho C_4 \rho^{\lambda_4}$$

$$W_h = C_1 + \ln \rho \cdot C_2 + C_3 \cdot \rho^2 + C_4 \cdot \rho^2 \cdot \ln \rho \quad (4.21)$$

$$p(\rho) = p_0 (B_0 + B_1 \cdot \rho + B_2 \rho^2 + \dots + B_r \rho^r) \quad (4.22)$$

Buna göre W_p partiküler çözümünü de yine ρ 'ya bağlı bir polinomla :

$$W_p(\rho) = A_0 + A_1 \cdot \rho + A_2 \rho^2 + A_3 \rho^3 + \dots + A_n \cdot \rho^n \quad (4.23)$$

biçiminde ifade edilebilir . (4.22) ve (4.23) ifadelerinde :

$B_0, B_1, B_2, B_3, \dots, B_r$ katsayıları biliniyor .

$A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ katsayıları bilinmiyor .

$W_p(\rho)$ 'yu türetip (4.23) denkleminde yerlerine yazalım :

$$W_p'(\rho) = A_1 + 2A_2\rho + 3A_3\rho^2 + 4A_4\rho^3 + 5A_5\rho^4 + A_r\rho^{r-1} + \dots + n \cdot A_n \cdot \rho^{n-1}$$

$$W_p''(\rho) = 2A_2 + 6A_3\rho + 12A_4\rho^2 + 20A_5\rho^3 + (r-1)r \cdot A_r\rho^{r-2} + \dots + (n-1)n \cdot A_n \rho^{n-2}$$

$$W_p'''(\rho) = 6A_3 + 24A_4\rho + 60A_5\rho^2 + (r-2)(r-1)r \cdot A_r\rho^{r-3} + \dots + (n-2)(n-1)n \cdot A_n \rho^{n-3}$$

$$W_p^{(4)}(\rho) = 24A_4 + 120A_5\rho + (r-3)(r-2)(r-1)r \cdot A_r\rho^{r-4} + \dots + (n-3)(n-2)(n-1)n \cdot A_n \rho^{n-4}$$

$$\begin{aligned} & \left[24A_4 + 120A_5 + \dots + (n-3)(n-2)(n-1)n \cdot A_n \rho^{n-4} \right] + 2\rho^{-1} \left[6A_3 + 24A_4 \rho + 60A_5 \rho^2 + \dots \right. \\ & \left. + (n-2)(n-1)n \cdot A_n \rho^{n-3} \right] - \rho^{-2} \left[2A_2 + 6A_3 \rho + 12A_4 \rho^2 + 20A_5 \rho^3 + \dots + (n-1)n \cdot A_n \rho^{n-2} \right] + \\ & + \rho^{-3} \left[A_1 + 2A_2 \rho + 3A_3 \rho^2 + 4A_4 \rho^3 + 5A_5 \rho^4 + n \cdot A_n \rho^{n-1} \right] = \frac{a^4}{D} p(\rho) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^{-3} A_1 + 9\rho^{-1} A_3 + 64A_4 + 225\rho A_5 + \dots + n^2(n-2)^2 A_n \rho^{n-4} &= \\ &= \frac{a^4}{D} p_0 (B_0 + B_1 \rho + B_2 \rho^2 + B_3 \rho^3 + \dots + B_r \rho^r) \end{aligned} \quad (4.24)$$

İki polinomun eşitliği için aynı kuvvetteki terimlerin katsayıları eşit olmalıdır .

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0$$

$$64 A_4 = \frac{p_0 a^4}{D} B_0 \longrightarrow A_4 = \frac{p_0 a^4}{D} \cdot \frac{B_0}{64} \quad (4.25)$$

$$225 A_5 = \frac{p_0 a^4}{D} B_1 \longrightarrow A_5 = \frac{p_0 a^4}{D} \cdot \frac{B_1}{225} \quad (4.26)$$

Genel terimleri inceleyelim . Genel terimin sıfırdan farklı olması için $n - 4 = r$, $n = r + 4$ olmalı . Yani partiküler çözüm yük polinomu -
mundan 4 fazla kuvvete kadar yazılmalıdır .

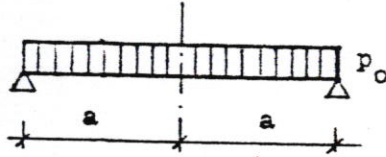
$$\begin{aligned} n^2(n-2)^2 A_n &= \frac{p_0 a^4}{D} B_r \\ A_n &= \frac{p_0 a^4}{D} \cdot \frac{B_r}{n^2(n-2)^2} \\ A_{r+4} &= \frac{p_0 a^4}{D} \cdot \frac{B_r}{(r+4)^2(r+2)^2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} W_p &= A_4 \rho^4 + A_5 \rho^5 + \dots + A_{r+4} \rho^{r+4} = \sum_{i=4}^{r+4} A_i \rho^i \\ W_p &= \frac{p_0 a^4}{D} \left(\frac{B_0}{64} \rho^4 + \frac{B_1}{225} \rho^5 + \dots + \frac{B_r}{(r+4)^2(r+2)^2} \rho^{r+4} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$W = W_H + W_p = C_1 + C_2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \rho^2 \cdot \ln \rho + \sum_{i=4}^{r+4} A_i \rho^i \quad (4.29)$$

4.2.3 - Değişik yükler için partiküler çözümler :

a) Düzgün yayılı yük :



$$p = p_0$$

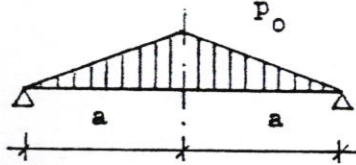
$$B_0 = 1 ; B_2 = B_3 = \dots = 0$$

$$r = 0 ; n = r + 4 = 4$$

$$A_{r+4} = \frac{p_0 a^4}{D} \cdot \frac{B_r}{(r+4)^2 (r+2)^2} = \frac{p_0 a^4}{D} \cdot \frac{1}{64}$$

$$W_p = \frac{p_0 a^4}{64 D} \cdot \rho^4 \quad (4.30)$$

b) Kenarda sıfır, merkeze doğru lineer artan yük :



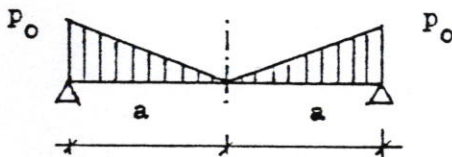
$$p(\rho) = (1 - \rho) p_0$$

$$B_0 = 1 \quad B_1 = -1 \quad r = 1 \quad n = r + 4 = 5$$

$$A_4 = \frac{p_0 a^4}{64 D} ; \quad A_5 = -\frac{p_0 a^4}{225 D}$$

$$W_p = \frac{p_0 a^4}{D} \left(\frac{\rho^4}{64} - \frac{\rho^5}{225} \right) \quad (4.31)$$

c) Merkezde sıfır, kenara doğru lineer artan yük :



$$p(\rho) = p_0 \cdot \rho \quad B_0 = 0 \quad r = 1$$

$$B_1 = 1 \quad r + 4 = 5$$

$$A_5 = \frac{p_0 a^4}{225 D}$$

$$W_p = \frac{p_0 a^4}{225 D} \cdot \rho^5 \quad (4.32)$$

d) Kenarlarda sıfır, merkeze doğru parabolik artan yük :



$$p(\rho) = (1 - \rho^2) p_0$$

$$B_0 = 1 ; B_1 = 0 ; B_2 = -1$$

$$r = 2 \quad r + 4 = 6$$

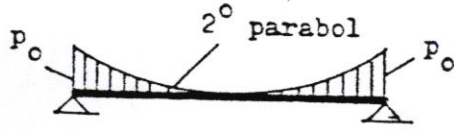
$$A_4 = \frac{p_0 a^4}{64 D}$$

$$A_5 = 0$$

$$A_6 = -\frac{p_0 a^4}{6^2 \cdot 4^2 \cdot D} = -\frac{p_0 a^4}{576 D}$$

$$W_p = \frac{p_0 a^4}{D} \left(\frac{\rho^4}{64} - \frac{\rho^6}{576} \right) \quad (4.33)$$

e) Merkezde sıfır, kenarlara doğru parabolik artan yük :



$$p(\rho) = \rho^2 \cdot p_0$$

$$B_2 = 1 ; \quad B_0 = B_1 = 0$$

$$r = 2 \quad r+4 = 6$$

$$A_6 = \frac{p_0 a^4}{576 D}$$

$$w_p = \frac{p_0 a^4}{576 D} \cdot \rho^6 \quad (4.34)$$

4.2.4 - Ortasında boşluğu olmayan dairesel plaklarda Homojen çözümün özel durumu

$$w_h = C_1 + C_2 \cdot \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \rho^2 \cdot \ln \rho$$

idi .

$$w = \sum_{i=4}^{r+4} A_i \rho^i + C_1 + C_2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \rho^2 \cdot \ln \rho$$

$\rho = 0$ için $\ln \rho = \infty$ olur. Plakın ortasında maddi bir nokta bulunduğundan, burada $w = \infty$ olamayacağına göre $C_2 = 0$ olmalıdır .

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cdot \ln \rho = 0 \cdot \infty \rightarrow \text{Belirsiz \u0131ekil}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln \rho}{\rho^{-2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1/\rho}{-2 \cdot \rho^{-3}} = -\frac{\rho^2}{2} = 0$$

demek ki $C_4 \neq 0$ olabilir .

$$\left(\frac{d^2 w}{d \rho^2} \right) \text{ de\u011ferini arayalım :}$$

$$\frac{dw}{d \rho} = \left(\sum i \cdot A_i \cdot \rho^{i-1} \right) + 2 C_3 \rho + C_4 (2 \rho \cdot \ln \rho + \rho)$$

$$\frac{d^2 w}{d \rho^2} = \sum (i-1) i A_i \rho^{i-2} + 2 C_3 + C_4 (2 \ln \rho + 3)$$

$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{d^2 w}{d \rho^2} \right) = \infty$ olur . Bu da plak merkezindeki momentin sonsuz b\u00fcy\u00fck $\frac{d^2 w}{d \rho^2}$ olması demektir . Bu olanaksız oldu\u011funa g\u00f6re $C_4 = 0$ olmalı .

Şu halde ortasında boşluğu olmayan simetrik yüklü dairesel plaklarda :

$$C_2 = C_4 = 0 \quad (4.35)$$

$$W_h = C_1 + C_3 \rho^2 \quad (4.36)$$

$$W = C_1 + C_3 \rho^2 + \sum_{i=4}^{r+4} A_i \rho^i \quad (4.37)$$

İç tesirlerin ρ cinsinden ifadesi :

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dW}{dr} \right) = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{dW}{d\rho} \right)$$

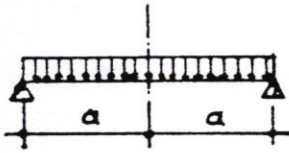
$$M_\varphi = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \mu \frac{d^2 W}{dr^2} \right) = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dW}{d\rho} + \mu \frac{d^2 W}{d\rho^2} \right) \quad (4.38)$$

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 W}{dr^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dW}{dr} \right) = -\frac{D}{a^3} \left(\frac{d^3 W}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 W}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dW}{d\rho} \right)$$

$$Q_\varphi = 0$$

$$M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = 0$$

Ö r n e k 4 . 1 .



Çevresi boyunca serbestçe oturan ., düzgün yayılı yüklü yüklü , boşluksuz dairesel plak

$$W_p = \frac{p_0 a^4}{64 D} \cdot \rho^4$$

$$W_H = C_1 + C_3 \cdot \rho^2$$

$$W = C_1 + C_3 \rho^2 + \frac{p_0 a^4}{64 D} \cdot \rho^4$$

Sınır şartları :

$$1) \quad W \Big|_{\rho=1} = 0$$

$$2) \quad M_\rho \Big|_{\rho=1} = 0$$

$$1) \quad C_1 + C_3 + \frac{p_0 a^4}{64 D} = 0$$

$$2) -\frac{D}{a^2} \left(\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{dW}{d\rho} \right)_{\rho=1} = 0$$

$$\frac{dW}{d\rho} = 2 C_3 \rho + \frac{p_0 a^4}{16 D} \cdot \rho^3$$

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} = 2 C_3 + \frac{3 p_0 a^4}{16 D} \cdot \rho^2$$

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{dW}{d\rho} = 2 C_3 + \frac{3 p_0 a^4}{16 D} + \mu \left(2 C_3 + \frac{p_0 a^4}{16 D} \right) = 0$$

$$2 C_3 (1 + \mu) = -\frac{p_0 a^4}{16 D} (3 + \mu) \rightarrow C_3 = -\frac{3 + \mu}{(1 + \mu)} \cdot \frac{p_0 a^4}{32 D}$$

$$C_1 - \frac{3 + \mu}{(1 + \mu)} \cdot \frac{p_0 a^4}{32 D} + \frac{p_0 a^4}{64 D} = 0 \rightarrow C_1 = \frac{5 + \mu}{1 + \mu} \cdot \frac{p_0 a^4}{64 D}$$

$$W = \frac{p_0 a^4}{64 D (1 + \mu)} \left[\rho^4 (1 + \mu) - 2(3 + \mu) \rho^2 + 5 + \mu \right]$$

$$W_{\max.} = W|_{\rho=0} = \frac{p_0 a^4}{64 D} \cdot \frac{5 + \mu}{1 + \mu}$$

İç kuvvetlerin bulunması :

C_1 ve C_3 'ün bulunan değerleri yerlerine yazılarak :

$$\frac{dW}{d\rho} = \frac{p_0 a^4}{16 D} \cdot \rho \left(\rho^2 - \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right)$$

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} = \frac{p_0 a^4}{16 D} \left(3\rho^2 - \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right)$$

$$M_r = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{dW}{d\rho} \right) = -\frac{D}{a^2} \cdot \frac{p_0 a^4}{16 D} \left[3\rho^2 - \frac{3 + \mu}{1 + \mu} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \rho \left(\rho^2 - \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right) \right]$$

$$= -\frac{p_0 a^2}{16} \left[\frac{\rho^2 (3 + \mu)(1 + \mu) - (3 + \mu)(1 + \mu)}{1 + \mu} \right]$$

$$M_r = \frac{p_0 a^2}{16} (3 + \mu) (1 - \rho^2)$$

$$M_\theta = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dW}{d\rho} + \mu \frac{d^2 W}{d\rho^2} \right) = -\frac{D}{a^2} \cdot \frac{p_0 a^4}{16 D} \left[\frac{1}{\rho} \rho \left(\rho^2 - \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right) + \mu \left(3\rho^2 - \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right) \right]$$

$$M_\varphi = -\frac{P_0 a^2}{16} \left[\frac{\rho^2(3+\mu)(1+\mu) - (3+\mu)(1+\mu)}{1+\mu} \right] = -\frac{P_0 a^2}{16} \left[(\rho^2 - 1)(3+\mu) \right]$$

$$M = \frac{P_0 a^2}{16} \left[3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2 \right]$$

$$M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = 0 \quad ; \quad Q_\varphi = 0$$

$$Q_r = -\frac{D}{a^3} \left(\frac{d^3 W}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 W}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dW}{d\rho} \right)$$

$$\frac{d^3 W}{d\rho^3} = \frac{3P_0 a^4}{8D} \cdot \rho$$

$$Q_r = -\frac{D}{a^3} \left[\frac{3P_0 a^4}{8D} \cdot \rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{P_0 a^4}{16D} \left(3\rho^2 - \frac{3+\mu}{1+\mu} \right) - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{P_0 a^4}{16D} \cdot \rho \left(\rho^2 - \frac{3+\mu}{1+\mu} \right) \right]$$

$$Q_r = -P_0 a \left(\frac{3}{8} \rho + \frac{3}{16} \rho - \frac{1}{16} \rho \right)$$

$$Q_r = -\frac{P_0 a}{2} \cdot \rho$$

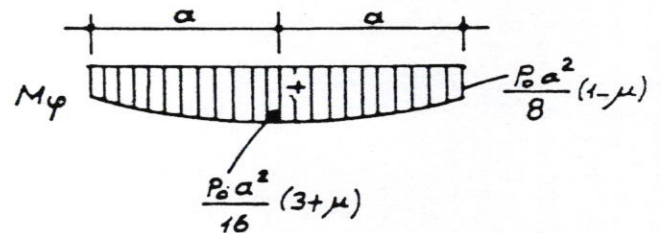
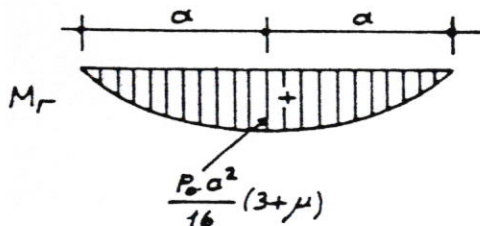
Q_r 'in bu değerini , genel olarak , $\sum P_z = 0$ şartından da bulabilirdik.

$$\pi r^2 \cdot p_0 + 2\pi r Q_r = 0$$

$$Q_r = -\frac{p_0 \cdot r}{2} ; r = a \cdot \rho \quad Q_r = -\frac{P_0 a}{2} \cdot \rho$$

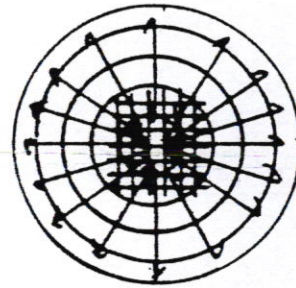
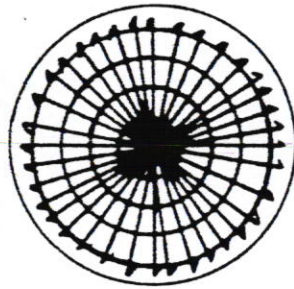
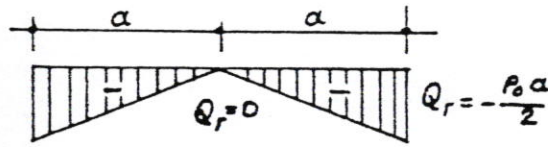
M_r ve M_φ diyagramları :

$$M_r = \frac{P_0 a^2}{16} (3 + \mu)(1 - \rho^2) \left\{ \begin{array}{l} \rho=0 \text{ için } M_r = (M_r)_{\max} = \frac{P_0 a^2}{16} (3 + \mu) \\ \rho=1 \text{ için } M_r = 0 \end{array} \right.$$



$$M_\varphi = \frac{P_0 a^2}{16} \left[3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2 \right] \left\{ \begin{array}{l} \rho=0 \text{ için } M_\varphi = (M_\varphi)_{\max} = \frac{P_0 a^2}{16} (3 + \mu) \\ \rho=1 \text{ için } M_\varphi = \frac{P_0 a^2}{16} \cdot 2(1 - \mu) \end{array} \right.$$

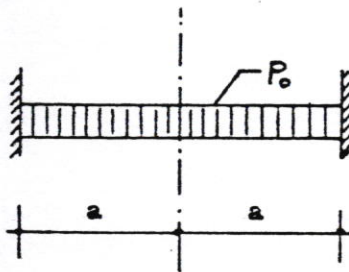
$$c_r = -\frac{p_o a}{2} \cdot \rho \begin{cases} \rho=0 \text{ için} & c_r = 0 \\ \rho=1 \text{ için} & c_r = (c_r)_{\max} = -\frac{p_o a}{2} \end{cases}$$



Bu detay radyal donatının üst üste binmesi nedeniyle mümkün değildir.

Ö r n e k 4 . 2 :

Düzgün yayılı yükle yüklü ankastre plak .



$$w_p = \frac{p_o a^4}{64 D} \cdot \rho^4 ; \quad w_h = c_1 + c_3 \rho^2$$

$$w = c_1 + c_3 \rho^2 + \frac{p_o a^4}{64 D} \cdot \rho^4$$

Sınır şartları :

$$1) \quad w|_{\rho=1} = 0$$

$$2) \quad \frac{dw}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = 0$$

$$1) \quad c_1 + c_3 + \frac{p_o a^4}{64 D} = 0$$

$$2) \quad 2c_3 + \frac{p_o a^4}{16 D} = 0$$

$$c_3 = -\frac{p_o a^4}{32 D}$$

$$1) \quad c_1 - \frac{p_o a^4}{32 D} + \frac{p_o a^4}{64 D} = 0 \quad c_1 = +\frac{p_o a^4}{64 D}$$

$$w = \frac{p_o a^4}{64 D} - \frac{p_o a^4}{32 D} \rho^2 + \frac{p_o a^4}{64 D} \rho^4$$

$$W = \frac{p_0 a^4}{64 D} (1 - 2\rho^2 + \rho^4)$$

$$W = \frac{p_0 a^4}{64 D} (1 - \rho^2)^2$$

$$\rho = 0 \text{ için } W = W_{\max} = \frac{p_0 a^4}{64 D}$$

İç kuvvetler hesabı :

$$\frac{dW}{d\rho} = - \frac{p_0 a^4}{16 D} \cdot \rho + \frac{p_0 a^4}{16 D} \cdot \rho^3 = \frac{p_0 a^4}{16 D} (\rho^3 - \rho)$$

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} = \frac{p_0 a^4}{16 D} (3\rho^2 - 1)$$

$$M_r = - \frac{D}{a^2} \left(\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right) = - \frac{D}{a^2} \cdot \frac{p_0 a^4}{16 D} \left[3\rho^2 - 1 + \frac{\mu}{\rho} \cdot \rho (\rho^2 - 1) \right]$$

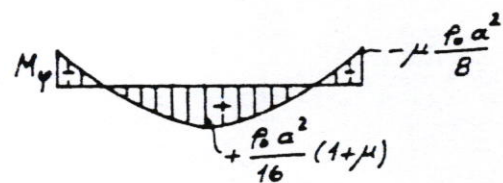
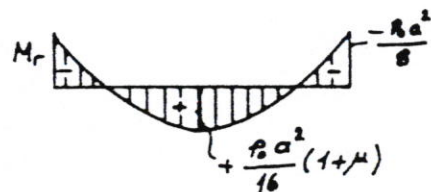
$$M_r = \frac{p_0 a^2}{16} \left[1 + \mu - (3 + \mu) \rho^2 \right]$$

$$M_\varphi = - \frac{D}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dW}{d\rho} + \mu \frac{d^2 W}{d\rho^2} \right) = - \frac{D}{a^2} \left[\frac{1}{\rho} \cdot \rho (\rho^2 - 1) + \mu (3\rho^2 - 1) \right] \frac{p_0 a^4}{16 D}$$

$$M_\varphi = \frac{p_0 a^2}{16} \left[1 + \mu - (1 + 3\mu) \rho^2 \right]$$

$$\rho = 0 \text{ için } M_r = M_\varphi = \frac{p_0 a^2}{16} (1 + \mu)$$

$$\rho = 1 \text{ için } M_r = - \frac{p_0 a^2}{8} \quad ; \quad M_\varphi = - \mu \frac{p_0 a^2}{8}$$



Serbest ve ankastre mesnetlenmiş plakların karşılaştırılması :

Sehimler

$$W_{\max} (\text{ankastre}) = \frac{p_0 a^4}{64 D}$$

$$W_{\max} (\text{serbest}) = \frac{p_0 a^4}{64 D} \cdot \frac{5 + \mu}{1 + \mu}$$

$$\frac{W_{\text{ank.}}}{W_{\text{ser.}}} = \frac{1 + \mu}{5 + \mu} \approx \frac{1}{5}$$

Momentler

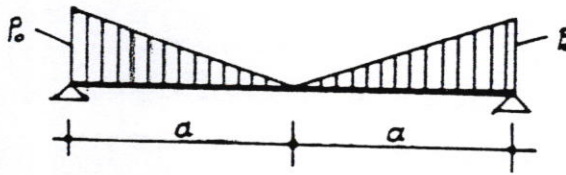
$\rho=0$ için

$$M_r (\text{ankastre}) = \frac{p_0 a^2}{16} (1 + \mu)$$

$$M_r (\text{serbest}) = \frac{p_0 a^2}{16} (3 + \mu)$$

$$\frac{M_r (\text{ank})}{M_r (\text{ser})} = \frac{1 + \mu}{3 + \mu} \approx \frac{1}{3}$$

Ö r n e k 4 . 3 . Serbest mesnetli , lineer artan yük altındaki dairesel plak :



$$W_p = \frac{p_0 a^4}{225 D} \cdot \rho^5$$

$$W = C_1 + C_3 \rho^2 + \frac{p_0 a^4}{225 D} \cdot \rho^5$$

sınır şartları : 1) $W|_{\rho=1} = 0 \quad C_1 + C_3 + \frac{p_0 a^4}{225 D} = 0$

2) $M_r|_{\rho=1} = 0 \quad -\frac{D}{a^2} \left(\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right)_{\rho=1} = 0$

$$\frac{dW}{d\rho} = 2 C_3 \rho + \frac{p_0 a^4}{45 D} \cdot \rho^4$$

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} = 2 C_3 + \frac{4 p_0 a^4}{45 D} \rho^3$$

$$\left[2C_3 + \frac{4p_0 a^4}{45 D} \rho^3 + \frac{\mu}{\rho} \left(2C_3 \rho + \frac{p_0 a^4}{45 D} \cdot \rho^4 \right) \right]_{\rho=1} = 0$$

$$2 C_3 + \frac{4 p_0 a^4}{45 D} + \mu \left(2 C_3 + \frac{p_0 a^4}{45 D} \right) = 0$$

$$2 C_3 (1 + \mu) = - \frac{p_0 a^4}{45 D} (4 + \mu)$$

$$C_3 = - \frac{p_o a^4}{90 D} \cdot \frac{4 + \mu}{1 + \mu}$$

$$C_1 = - C_3 - \frac{p_o a^4}{225 D} = \frac{p_o a^4}{90 D} \cdot \frac{4 + \mu}{1 + \mu} - \frac{p_o a^4}{225 D}$$

$$C_1 = \frac{p_o a^4}{45 D} \left[\frac{4 + \mu}{2(1 + \mu)} - \frac{1}{5} \right]$$

$$W = \frac{p_o a^4}{45 D} \left[\frac{4 + \mu}{2(1 + \mu)} - \frac{1}{5} \right] - \frac{p_o a^4}{90 D} \cdot \frac{4 + \mu}{1 + \mu} \cdot \rho^2 + \frac{p_o a^4}{225 D} \cdot \rho^5$$

$$W = \frac{p_o a^4}{45 D} \left[\frac{4 + \mu}{2(1 + \mu)} - \frac{1}{5} - \frac{4 + \mu}{2(1 + \mu)} \cdot \rho^2 + \frac{1}{5} \rho^5 \right]$$

$$W = \frac{p_o a^4}{45 D} \left[\frac{4 + \mu}{2(1 + \mu)} (1 - \rho^2) - \frac{1}{5} (1 - \rho^5) \right]$$

$$\frac{dW}{d\rho} = \frac{p_o a^4}{45 D} \left(\rho^4 - \rho \cdot \frac{4 + \mu}{1 + \mu} \right)$$

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} = \frac{p_o a^4}{45 D} \left(4\rho^3 - \frac{4 + \mu}{1 + \mu} \right)$$

$$M_r = - \frac{D}{a^2} \left(\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{dW}{d\rho} \right)$$

$$M_\varphi = - \frac{D}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dW}{d\rho} + \mu \cdot \frac{d^2 W}{d\rho^2} \right)$$

Yukardaki değerler yerlerine yazılırsa :

$$M_r = \frac{p_o a^2}{45} (4 + \mu) (1 - \rho^3)$$

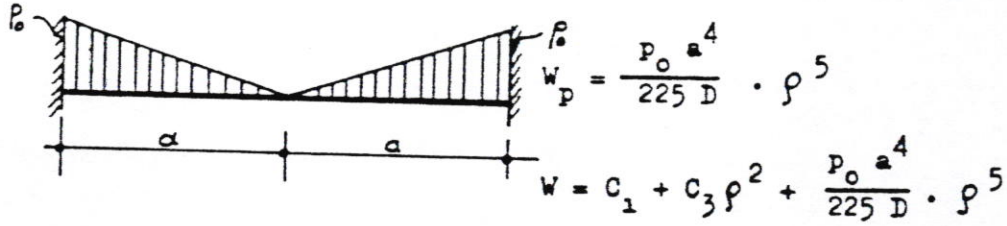
$$M_\varphi = \frac{p_o a^2}{45} \left[(4 + \mu) - (1 + 4\mu) \rho^3 \right]$$

bulunur .

$$\rho = 0 \text{ için } M_r = M_\varphi = \frac{p_o a^2}{45} (4 + \mu)$$

$$\rho = 1 \text{ için } M_r = 0 \quad ; \quad M_\varphi = \frac{p_o a^2}{15} (1 - \mu)$$

Ö r n e k 4 . 4 . Lineer artan yük etkisinde ankastre dairesel plak



Sınır şartları :

$$w \Big|_{\rho=1} = 0 \quad ; \quad \frac{dw}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = 0$$

$$1) \quad c_1 + c_3 + \frac{p_0 a^4}{225 D} = 0$$

$$c_3 = -\frac{p_0 a^4}{90 D}$$

$$2) \quad 2c_3 + \frac{p_0 a^4}{45 D} = 0$$

$$c_1 = \frac{p_0 a^4}{150 D}$$

$$w = \frac{p_0 a^4}{225 D} \cdot \rho^5 - \frac{p_0 a^4}{90 D} \cdot \rho^2 + \frac{p_0 a^4}{150 D} = \frac{p_0 a^4}{15 D} \left(\frac{\rho^5}{15} - \frac{\rho^2}{6} + \frac{1}{10} \right)$$

$$\frac{dw}{d\rho} = \frac{p_0 a^4}{45 D} \cdot \rho^4 - \frac{p_0 a^4}{45 D} \cdot \rho = \frac{p_0 a^4}{45 D} \cdot \rho (\rho^3 - 1)$$

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} = \frac{4 p_0 a^4}{45 D} \cdot \rho^3 - \frac{p_0 a^4}{45 D} = \frac{p_0 a^4}{45 D} (4\rho^3 - 1)$$

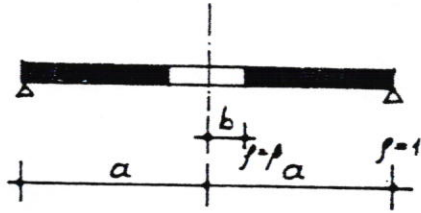
$$M_r = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{dw}{d\rho} \right) = \frac{p_0 a^2}{45} \left[1 + \mu - (4 + \mu) \rho^3 \right]$$

$$M_\varphi = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dw}{d\rho} + \mu \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right) = \frac{p_0 a^2}{45} \left[1 + \mu - (1 + 4\mu) \rho^3 \right]$$

$$\rho=0 \text{ için } M_r = M_\varphi = \frac{p_0 a^2}{45} (1 + \mu)$$

$$\rho=1 \text{ için } M_r = -\frac{p_0 a^2}{15} \quad ; \quad M_\varphi = -\frac{p_0 a^2}{15} \cdot \mu$$

4.2.5 - Ortasında boşluğu olan dairesel plaklar



- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)
- 6)
- 7)
- 8)

Şekil 4.4. Boşluklu dairesel plaklarda çeşitli mesnetlenme şekilleri

$\beta = b/a$ diyelim . Ortada maddi bir noktada olmadığı için $C_2 \neq 0$, $C_4 \neq 0$ olur.

$$W_h = C_1 + C_2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \rho^2 \cdot \ln \rho$$

olur . Hesaplanması gereken 4 integ - rasyon sabiti vardır. Bu sabitler mesnetlerdeki sınır şartları yardımıyla hesaplanır. Değişik mesnet şartları olabilir.

Mesnetler için genel olarak şunlar söylenebilir.

Serbest mesnet:

$$1) \quad W \Big|_{\rho=\rho_0} = 0$$

$$2) \quad M_r \Big|_{\rho=\rho_0} = 0$$

Ankastre mesnet:

$$1) \quad W \Big|_{\rho=\rho_0} = 0$$

$$2) \quad \frac{dW}{dr} \Big|_{\rho=\rho_0} = 0$$

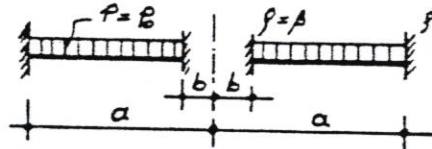
Boşta kenar:

$$1) \quad M_r \Big|_{\rho=\rho_0} = 0$$

$$2) \quad Q_r \Big|_{\rho=\rho_0} = 0$$

Böylece iç mesnet ve dış mesnet için yazılacak ikişer sınır şartı yardımıyla C_1 , C_2 , C_3 , C_4 sabitleri hesaplanır .

Ö r n e k 4 . 5 . Dış ve iç kenarlarından ankastre , düzgün yayılı yük-
le yüklü ortasında boşluğu olan dairesel
plak :



$$W = C_1 + C_2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \rho^2 \cdot \ln \rho + \frac{p_0 a^4}{64 D} \rho^4$$

$$\frac{dW}{d\rho} = C_2 \cdot \frac{1}{\rho} + 2C_3 \rho + C_4 (2\rho \cdot \ln \rho + \rho) + \frac{p_0 a^4}{16 D} \cdot \rho^3$$

Mesnet şartları :

a) iç mesnet :

$$1) \quad W \Big|_{\rho=b} = 0 \quad 2) \quad \frac{dW}{d\rho} \Big|_{\rho=b} = 0$$

$$1) \quad C_1 + C_2 \cdot \ln b + C_3 \cdot b^2 + C_4 \cdot b^2 \ln b + \frac{p_0 a^4}{64 D} b^4 = 0$$

$$2) \quad C_2 \frac{1}{b} + 2C_3 b + C_4 b (2 \ln b + 1) + \frac{p_0 a^4}{16 D} b^3 = 0$$

b) Dış mesnet :

$$3) \quad W \Big|_{\rho=a} = 0 \quad 4) \quad \frac{dW}{d\rho} \Big|_{\rho=a} = 0$$

$$3) \quad C_1 + 0 + C_3 + 0 + \frac{p_0 a^4}{64 D} = 0$$

$$4) \quad C_2 + 2C_3 + C_4 + \frac{p_0 a^4}{16 D} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \ln b & b^2 & b^2 \cdot \ln b \\ 0 & \frac{1}{b} & 2b & b(2 \ln b + 1) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = - \frac{p_0 a^4}{64 D} \begin{Bmatrix} b^4 \\ 4b^3 \\ 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Katsayılar determinantı :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{b} & 2b & b(2 \ln b + 1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ln b & b^2 & b^2 \cdot \ln b \\ \frac{1}{b} & 2b & b(2 \ln b + 1) \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{\beta} + \beta^3 - 2\beta [1 + 2(\ln\beta)^2]$$

$$\Delta_1 = -\frac{p_o a^4}{64 D} \begin{vmatrix} \beta^4 & \ln\beta & \beta^2 & \beta^2 \ln\beta \\ 4\beta^3 & \frac{1}{\beta} & 2\beta & \beta(2\ln\beta + 1) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{p_o a^4}{64 D} \left\{ \beta \left[(\beta^2 - 1)^2 (1 - 2\ln\beta) - (2\ln\beta)^2 \right] \right\}$$

$$\Delta_2 = -\frac{p_o a^4}{64 D} \begin{vmatrix} 1 & \beta^4 & \beta^2 & \beta^2 \ln\beta \\ 0 & 4\beta^3 & 2\beta & \beta(2\ln\beta + 1) \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \frac{p_o a^4}{16 D} \left\{ \beta (\beta^2 - 1) \left[(\beta^2 - 1) - \ln\beta (\beta^2 + 1) \right] \right\}$$

veya

$$\Delta_2 = \frac{p_o a^4}{16 D} \left\{ \beta \left[(\beta^2 - 1)^2 - \ln\beta (\beta^4 - 1) \right] \right\}$$

$$\Delta_3 = -\frac{p_o a^4}{64 D} \begin{vmatrix} 1 & \ln\beta & \beta^4 & \beta^2 \ln\beta \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 4\beta^3 & \beta(2\ln\beta + 1) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \frac{p_o a^4}{64 D} \left\{ \beta \left[1 + \beta^2(1 - \beta^2) + 2\ln\beta(\beta^2 - 1)^2 + 2(2\ln\beta)^2 \right] - \frac{1}{\beta} \right\}$$

$$\Delta_4 = -\frac{p_o a^4}{64 D} \begin{vmatrix} 1 & \ln\beta & \beta^2 & \beta^4 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 2\beta & 4\beta^3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \frac{p_0 a^4}{32 D} \left\{ \beta \left[(\beta^2 - 1) (4 \ln \beta - \beta^2) + 1 \right] - \frac{1}{\beta} \right\}$$

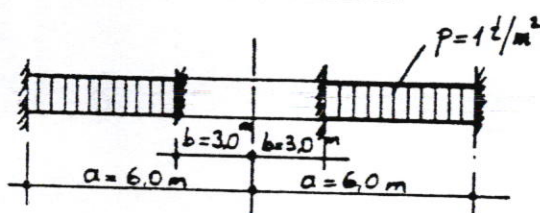
$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$c_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$c_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}$$

Sayısal uygulama :



$$a = 6,0 \text{ m} ; \quad b = 3,0 \text{ m} ; \quad h = 0,30 \text{ m}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$\mu = 0,15$$

$$D = 4,84 \cdot 10^3 \text{ tm}$$

$$\beta = b/a = 0,5$$

$$\ln \beta = -0,693$$

$$\Delta = \frac{1}{\beta} + \beta^3 - 2\beta \left[1 + (\ln \beta)^2 \right] = \frac{1}{0,5} + 0,5^3 - 2 \cdot 0,5 \left[1 + 2(-0,693)^2 \right]$$

$$\Delta = 2 + 0,125 - (1 + 0,96)$$

$$\Delta = 0,165$$

$$\Delta_1 = \frac{p_0 a^4}{64 D} \left\{ \beta \left[(\beta^2 - 1)^2 (1 - 2 \ln \beta) - (2 \ln \beta)^2 \right] \right\}$$

$$\frac{p_0 a^4}{64 D} = \frac{1 \cdot 6^4}{64 \cdot 4,84 \cdot 10^3} = 4,18 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta_1 = 4,18 \cdot 10^{-3} \left\{ 0,5 \left[(0,25 - 1)^2 (1 + 2 \cdot 0,693) - (2 \cdot (-0,693))^2 \right] \right\}$$

$$\Delta_1 = -1,21 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta_2 = \frac{p_0 a^4}{16 D} \left\{ \beta (\beta^2 - 1) \left[(\beta^2 - 1) - \ln \beta (\beta^2 + 1) \right] \right\}$$

$$\Delta_2 = 4 \cdot 4,18 \cdot 10^{-3} \left[0,5(-0,75) (-0,75 + 0,693 \cdot 1,25) \right]$$

$$\Delta_2 = -0,729 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta_3 = \frac{p_0 a^4}{64 D} \left\{ \beta \left[1 + \beta^2 (1 - \beta^2) + 2 \ln \beta (\beta^2 - 1)^2 + 2 (2 \ln \beta)^2 \right] - \frac{1}{\beta} \right\}$$

$$\Delta_3 = 4,18 \cdot 10^{-3} \left\{ 0,5 \left[1 + 0,25 \cdot 0,75 - 2 \cdot 0,693 \cdot 0,75^2 + 2 (2 \cdot 0,693)^2 \right] - 2 \right\}$$

$$\Delta_3 = 0,522 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta_4 = \frac{p_0 a^4}{32 D} \left\{ \beta \left[(\beta^2 - 1) (4 \ln \beta - \beta^2) + 1 \right] - \frac{1}{\beta} \right\}$$

$$\Delta_4 = 2 \cdot 4,18 \cdot 10^{-3} \left\{ 0,5 \left[-0,75 (-4 \cdot 0,693 - 0,25) + 1 \right] - 2 \right\}$$

$$\Delta_4 = -3,066 \cdot 10^{-3}$$

$$C_1 = -7,333 \cdot 10^{-3}$$

$$C_3 = +3,164 \cdot 10^{-3}$$

$$C_2 = -4,418 \cdot 10^{-3}$$

$$C_4 = -18,582 \cdot 10^{-3}$$

$$W = C_1 + C_2 \cdot \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \cdot \rho^2 \cdot \ln \rho + \frac{p_0 a^4}{64 D} \cdot \rho^4$$

$$W = 10^{-3} (-7,333 - 4,418 \cdot \ln \rho + 3,164 \rho^2 - 18,582 \rho^2 \cdot \ln \rho + 4,18 \rho^4)$$

$$\frac{dW}{d\rho} = 10^{-3} (-4,418 \cdot \frac{1}{\rho} + 6,328 \rho - 18,582 \rho (2 \ln \rho + 1) + 16,72 \rho^3)$$

$$\frac{dW}{d\rho} = 10^{-3} (-4,418 \cdot \frac{1}{\rho} - 12,254 \rho - 37,164 \rho \cdot \ln \rho + 16,72 \rho^3)$$

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} = 10^{-3} (+4,418 \cdot \frac{1}{\rho^2} - 12,254 - 37,164 \cdot (\ln \rho + 1) + 50,16 \rho^2)$$

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} = 10^{-3} (50,16 \rho^2 - 37,164 \ln \rho + 4,418 \cdot \frac{1}{\rho^2} - 49,418)$$

$$M_r = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right)$$

$$= -\frac{4,84}{36} \left[50,16 \rho^2 - 37,164 \cdot \ln \rho + 4,418 \cdot \frac{1}{\rho^2} - 49,418 + 0,15 (16,72 \rho^2 - 37,164 \ln \rho - 4,418 \cdot \frac{1}{\rho^2} - 12,254) \right]$$

$$M_r = -7,081 \rho^2 + 5,746 \ln \rho - 0,505 \cdot \frac{1}{\rho^2} + 6,891$$

$$M_\varphi = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dW}{d\rho} + \mu \frac{d^2 W}{d\rho^2} \right)$$

$$M_\varphi = -\frac{4,84}{36} \left[16,72 \rho^2 - 37,164 \ln \rho - 4,418 \cdot \frac{1}{\rho^2} - 12,254 + 0,15 (50,16 \rho^2 - 37,164 \ln \rho + 4,418 \cdot \frac{1}{\rho^2} - 49,418) \right]$$

$$M_\varphi = -3,260 \rho^2 + 5,746 \ln \rho + 0,505 \cdot \frac{1}{\rho^2} + 2,644$$

$$Q_r = -3,0 \rho + 1,67 \cdot \frac{1}{\rho}$$

$P = 1$ için (Eis mesnet)

$$M_R = - 7,081 - 0,505 + 6,891 = - 0,695 \text{ tm/m}$$

$$M_y = - 3,26 + 0,505 + 2,644 = - 0,111 \text{ tm/m}$$

$$Q_R = - 3 + 1,67 = - 1,33 \text{ t /m}$$

$P = 0,50$ için (İç moment)

$$M_R = - 7,081 \cdot 0,25 - 5,746 \cdot 0,693 - 0,505 \cdot 4 + 6,891 = - 0,881 \text{ tm/m}$$

$$M_y = - 3,26 \cdot 0,25 - 5,746 \cdot 0,693 + 0,505 \cdot 4 + 2,644 = - 0,133 \text{ tm/m}$$

$$Q_R = - 3,0 \cdot 0,5 + 1,67 \cdot 2 = 1,84 \text{ t /m}$$

FOURIER SERİLERİ (*)

Fourier serileri , uygulamalı mekaniğin alanına giren birçok problemin analitik çözümünde vazgeçilmez araç durumundadır . Elastisite teorisindeki kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü de bunlardan biridir .

a) Tek Fourier Serileri :

$y = f(x)$ şeklinde verilmiş olan herhangi bir fonksiyon , (sin) ve (cos) 'lü terimleri içeren sonsuz bir seriye açılabilir . Eğer $f(x)$ periyodik bir fonksiyon ise (yani $f(x) = f(x + T)$ ise) :

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi x}{T} + A_2 \cos \frac{4\pi x}{T} + \dots + A_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + \dots \\ & + B_1 \sin \frac{2\pi x}{T} + B_2 \sin \frac{4\pi x}{T} + \dots + B_n \sin \frac{2n\pi x}{T} + \dots \end{aligned} \quad (A.1)$$

yazılabilir . Ya da daha kısa bir biçimde :

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega x \quad (A.2)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (A.3)$$

A_0, A_n, B_n katsayıları Fourier Katsayıları olarak adlandırılır ve şöyle hesaplanır :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx \\ A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos n\omega x dx \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin n\omega x dx \end{aligned} \quad (A.4)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

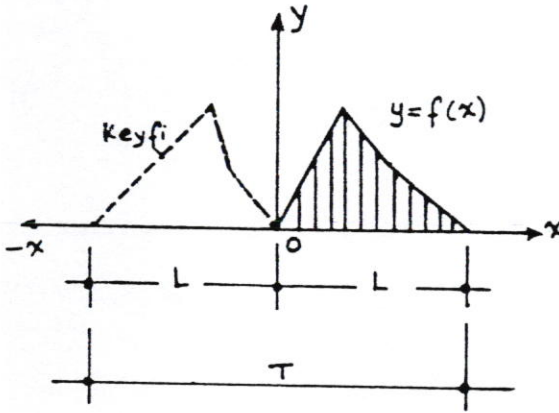
(*) Fourier Serileri ile ilgili daha geniş bilgi için /2/ ye bakınız.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu, analitik bir formda verilmemişse veya söz konusu integralin alınması güç ise, bu integraller bir toplamla ifade edilebilir. Bunun için T periyodu ($2m$) aralığa bölünürse, Fourier katsayıları: ($T = 2m$)

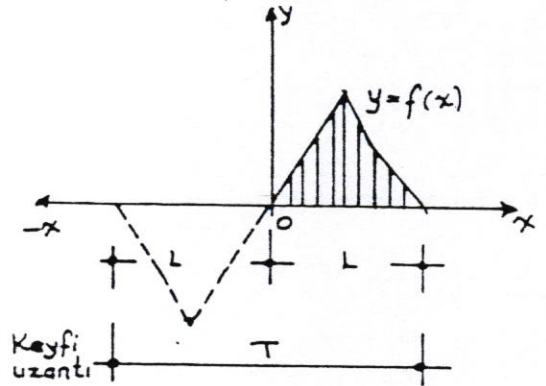
$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} y_k \\ A_n &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} y_k \cdot \cos \frac{k \cdot n\pi}{m} \\ B_n &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} y_k \cdot \sin \frac{k \cdot n\pi}{m} \end{aligned} \quad (A.5)$$

($k=0,1,2,\dots,2m$; $n=1,2,3,\dots,m$)

Eğer $f(x)$ fonksiyonu periyodik değilse, kendi aralığı dışında keyfi olarak uzatarak periyodik hale getirmek mümkündür. Bu keyfi uzantı düz harmonik (çift harmonik), ters (tek) harmonik olabilir.



Çift harmonik fonksiyon



Tek harmonik fonksiyon

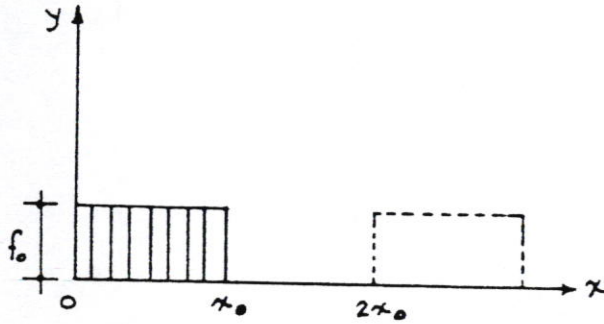
Birçok halde $f(x)$ fonksiyonunu bir (L) aralığında ifade etmek gerekir. O zaman fonksiyon $T = 2L$ periyodu ile seriye açmak ve başlangıç noktasını merkez kabul etmek uygun olur.

Bir $f(x)$ fonksiyonunu yalnızca cosinüs terimleri ile ifa-

de etmek gerektiğini varsayalım ; o zaman keyfi bir uzatma yaparak , fonksiyonu X 'e göre çift fonksiyon haline getiririz . Böylece : $f(x) = f(-x)$ eşitliği sağlanır , fonksiyon da periyodik hale getirilmiş olur ve böylece (A.2) bağıntısındaki sinüs terimleri integrasyon sırasında ortadan kalkar . Aynı şekilde $f(x)$ 'i bir tek fonksiyon haline getirirsek $f(x) = -f(-x)$ sağlanır ve cosinüslü terimler integrasyon işleminde ortadan kalkar ve sinüslü terimlerden oluşan bir Fourier açılımı elde edilir. Böylece A_0 -(A.1) bağıntısından görüldüğü gibi cosinüs serisinin bir terimidir - sıfır olur . Örneğin serbest mesnetteki bir sınır şartının sağlanması mümkün olabilir .

Tek Fourier Serisi açılımı için örnek :

Aşağıdaki şekilde gösterilmiş olan $y = f(x)$ fonksiyonunu : Sabit terim , sinüs ve cosinüslü terimleri içeren Fourier Serisine açın .



$$f(x) = \begin{cases} 0 \leq x \leq x_0 & \text{ için } f_0 \\ x_0 \leq x \leq 2x_0 & \text{ için } 0 \end{cases}$$

Tam seriye açılım : Açılımın periyodu $T = 2x_0$, Sabit Terim :

$$A_0 = \frac{1}{x_0} \int_0^{2x_0} f(x) dx = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} f_0 dx = \frac{f_0}{x_0} [x]_0^{x_0} = f_0$$

$$A_n = \frac{1}{x_0} \int_0^{2x_0} f(x) \cos \frac{n\pi x}{x_0} dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$B_n = \frac{1}{x_0} \int_0^{2x_0} f(x) \sin \frac{n\pi x}{x_0} dx = \frac{f_0}{x_0} \int_0^{x_0} \sin \frac{n\pi x}{x_0} dx = -\frac{f_0}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$$

$$B_n = \frac{2f_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

$$B_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

$$A_0 = f_0$$

$$A_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$B_n = \begin{cases} \frac{2f_0}{n\pi} & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \frac{2f_0}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{x_0} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{x_0} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{x_0} + \dots + \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{x_0} \right)$$

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \frac{2f_0}{\pi} \sum \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n\pi x}{x_0} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

b) Çift Fourier Serileri

Plakların incelenmesinde ,genellikle ,verilen bir $f(x,y)$ fonksiyonu , x ve y değişkenlerine göre ,bir sinüs serisine açılır .

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (A.6)$$

Bu ifade ,periyod olarak $T = 2a$ ve $T = 2b$ değerlerinin kullanıldığı " y " ye göre sinüs açılımı ile çarpılan ; " x " e göre sinüs açılımını göstermektedir . F_{mn} katsayılarını elde edebilmek için yukarıdaki ifadenin her iki tarafını önce $\sin \left(\frac{k\pi y}{b} \right)$ dy ile çarpıp ; sonra 0 ile b arasında integre edelim .

$$\int_0^b f(x,y) \cdot \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot \sin \frac{k\pi y}{b} dy$$

$$k \neq n \text{ için } \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot \sin \frac{k\pi y}{b} dy = 0$$

$$k = n \text{ için } \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}$$

Benzer yaklaşım x değişkeni için de yapılırsa :

$$\int_0^a \sin^2 \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}$$

$$F_{mn} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \int_0^a \int_0^b f(x,y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$F_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b} dx dy \quad (A.7)$$

bulunur . Karteziyen koordinat sisteminde $x=0$; $x=a$ ve $y=0$; $y=b$ ile sınırlanmış bir alan boyunca sabit olan $f(x,y)$ fonksiyonunu çift Fourier serisine açalım .

$$f(x,y) = f_0$$

Katsayılar :

$$\begin{aligned} F_{mn} &= \frac{4 f_0}{a \cdot b} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{m\pi y}{b} dy \\ &= \frac{4 f_0}{a \cdot b} \cdot \frac{a}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi x}{a} \right]_0^a \cdot \frac{b}{m\pi} \left[-\cos \frac{m\pi y}{b} \right]_0^b \\ &= \frac{4 f_0}{n \cdot m \pi^2} (-\cos n\pi + 1) (-\cos m\pi + 1) \\ &= \frac{16 f_0}{\pi^2 m n} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \\ F_{mn} &\begin{cases} = \frac{16 f_0}{\pi^2 m n} & (m, n = 1, 3, 5, \dots) \\ = 0 & (m, n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases} \end{aligned}$$

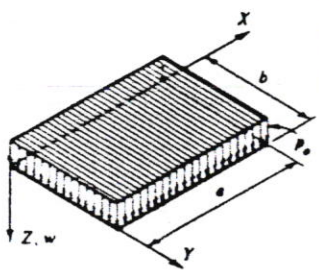
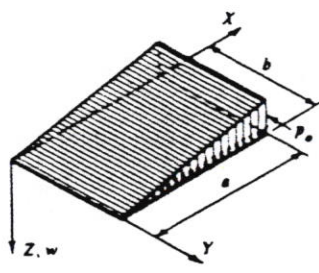
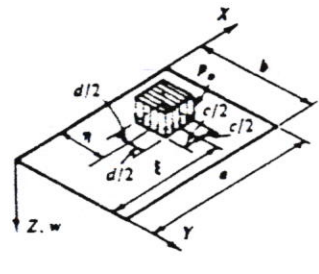
Bulunan F_{mn} değeri (A.6) da yerine yazılırsa :

$$f(x,y) = \frac{16 f_0}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (A.8)$$

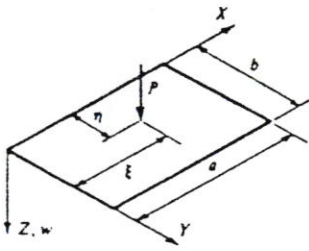
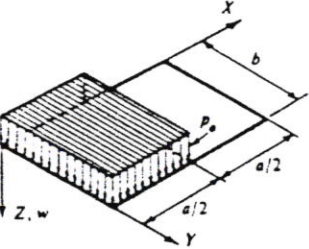
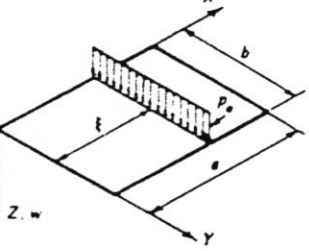
elde edilir .

Aşağıda çok kullanılan bazı yüklerin , çift Fourier serisine açılışında (A.7) den bulunan açılım katsayıları verilmiştir.

TABLO A.1 YÜKLERİN ÇİFT FOURIER SERİSİNE AÇILIMI

No.	YÜK $p_z(x, y) = \sum_m \sum_n P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$	AÇILIM KATSAYILARI P_{mn}
1		$P_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}$ ($m, n = 1, 3, 5, \dots$)
2		$P_{mn} = -\frac{8p_0 \cos m\pi}{\pi^2 mn}$ ($m, n = 1, 3, 5, \dots$)
3		$P_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}$ $\times \sin \frac{m\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b}$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$)

TABLO A.1 (Devan)

No.	YÜK $p_z(x,y) = \sum_m \sum_n P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$	AÇILIM KATSAYILARI P_{mn}
4		$P_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}$ $(m, n = 1, 2, 3, \dots)$
5		$P_{mn} = \frac{8p_0}{\pi^2 mn} \text{ for } m, n = 1, 3, 5, \dots$ $P_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \text{ for } \begin{cases} m = 2, 6, 10, \dots \\ n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$
6		$P_{mn} = \frac{4p_0}{\pi a n} \sin \frac{m\pi \xi}{a}$ $(m, n = 1, 2, 3, \dots)$

KAYNAKLAR

- 1 . Berdan , Y. , " Plak Teorisi " Lisans Üstü ders notları
(basılmamış.)
- 2 . Szilard , R. , " Theory and Analysis of Plates " ,
Prentice - Hall , INC. , 1974.
- 3 . Park , R. , and Gamble , W.L. , " Reinforced Concrete Slabs",
John Wiley and Sons , 1980 .
- 4 . Wood , R.H. , " Plastic and Elastic Design of Slabs and
Plates " , Thames and Hudson , London , 1961 .
- 5 . Zienkiewicz , O.C. , and Cheung , Y.K. , " The Finite Ele-
ment Method in Structural and Continuum Mechanics " ,
Mc Graw Hill , 1971 .
- 6 . Özden , K. , " İnce Plaklar Teorisine Kısa Bir Bakış " ,
2.baskı. İTÜ İnşaat Fakültesi , 1975 .