

SEMBOLLER

a, b	X ve Y doğrultusunda plak boyutları
a_i, b_i	Katsayılar
A	Alan
$c_1, c_2, \dots, C_1, C_2$	Sabit değerler ya da katsayılar
D	Plak eğilme rijitliği
E	Elastisite modülü
G	Kayma modülü
h	Plak kalınlığı
I	Atalet momenti
l, l_x, l_y	Açıklık boyları
m, n	Pozitif tamsayılar (1,2,3....)
M_x, M_y, M_r, M_φ	Birim boya gelen eğilme momentleri
$M_{xy}, M_{r\varphi}$	Birim boya gelen burulma momentleri
M	Toplam moment = $(M_x + M_y) / (1 + \mu)$
p	Birim alana gelen yük
p_x, p_y, p_z	Birim alana gelen yükün bileşenleri
p_z	Tekil yük
Π	Toplam potansiyel enerji
q_x, q_y, q_r, q	Birim boya gelen kesme kuvveti
r_0, r_1, r	Yarıçap, polar koordinat
u, v, w	X, Y, Z doğrultusunda yer değiştirmeler
V_x, V_y	Kenar kuvvetleri (fiktif kesme kuvvetleri)
$W(x,y)$	Şekil fonksiyonu
W_h	Homojen çözüm

w_p	Partiküler (özel) çözüm
x, y, z	Karteziyen koordinatlar
α, β	Açılar
γ, γ_{xy}	Kayma Deformasyonu
δ, δ_i	Yer değiştirme, varyasyon sembolü
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Birim deformasyon bileşenleri
η, φ	Koordinatlar
θ	Açı
λ	Sonlu farklar ağı genişliği
μ	Poisson oranı
ρ	Boyutsuz büyüklük ($\rho = r/r_0$)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normal gerilme bileşenleri
τ, τ_{xy}	Kayma gerilmeleri
φ	Açı, polar koordinat
$\Delta, \Delta(\varphi)$	Fark, sonlu fark
$\triangle$	Laplace operatörü
∇	Hamilton operatörü
ω	Açısal frekans

BÖLÜM 1. TAŞIYICI SİSTEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Mühendislik yapılarında kullanılan taşıyıcı sistemler genel olarak, üç grupta toplanabilir.

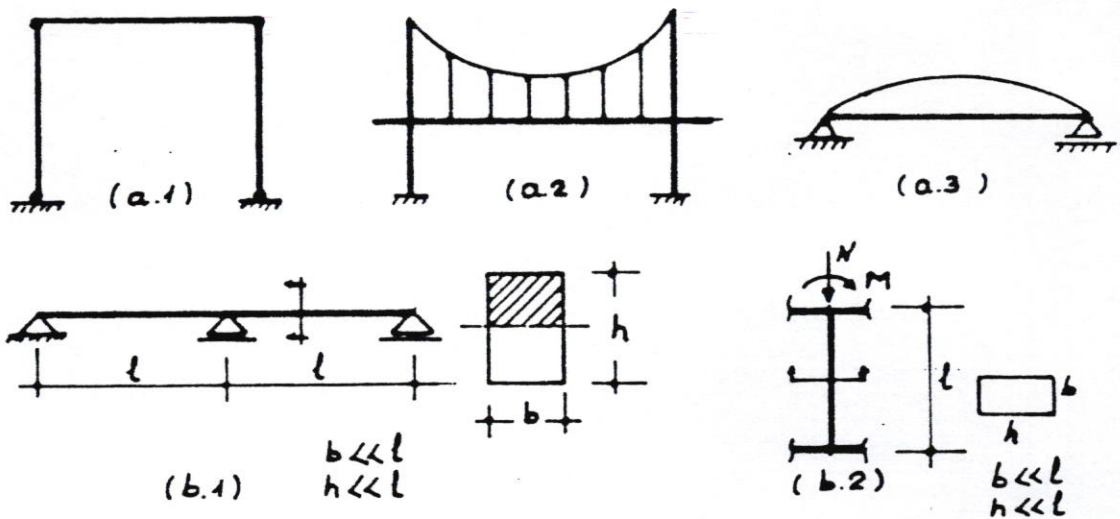
- 1) Doğrusal taşıyıcı sistemler (Çubuk sistemler)
- 2) Yüzeysel taşıyıcı sistemler
- 3) Uzak taşıyıcı sistemler

1.1. Çubuk Sistemler :

Taşıyıcı doğrultuya dik alınan bir enkesitin boyutlarının taşıyıcı doğrultudaki boyut yanında çok küçük olduğu taşıyıcı elemanlar, kısaca, "çubuk" olarak adlandırılır. Bunların birleşmesinden oluşan sistemlere de "çubuk sistem" denir. Kesit boyutları b, h ; elemanın uzunluğu l ise :

$$b \ll l \quad ; \quad h \ll l \quad \text{olmalıdır.}$$

Kolonlar , kirişler , çerçeveler , kemerler , gergiler , kablolar , askı çubukları bu sınıfa girerler. Bunların çalışma biçimleri değişik olabilir.



Şekil 1.1 Çubuk Sistemlerden Örnekler (a.1) Pandül kolon, (a.2) Asma köprü kablo ve askıları, (a.3) Gergi çubuğu, (b.1) Sürekli kiriş, (b.2) Kolon

a - σ_x = Sabit olması durumu :

- a - 1. Yalnız eksenel kuvvet etkisindeki kolonlar (Pandül kolon)
- a - 2. Asma köprülerin kabloları ve askı çubukları
- a - 3. Gergi çubukları
- a - 4. Fintüküler form verilmiş 3 mafsallı kemer v.b.

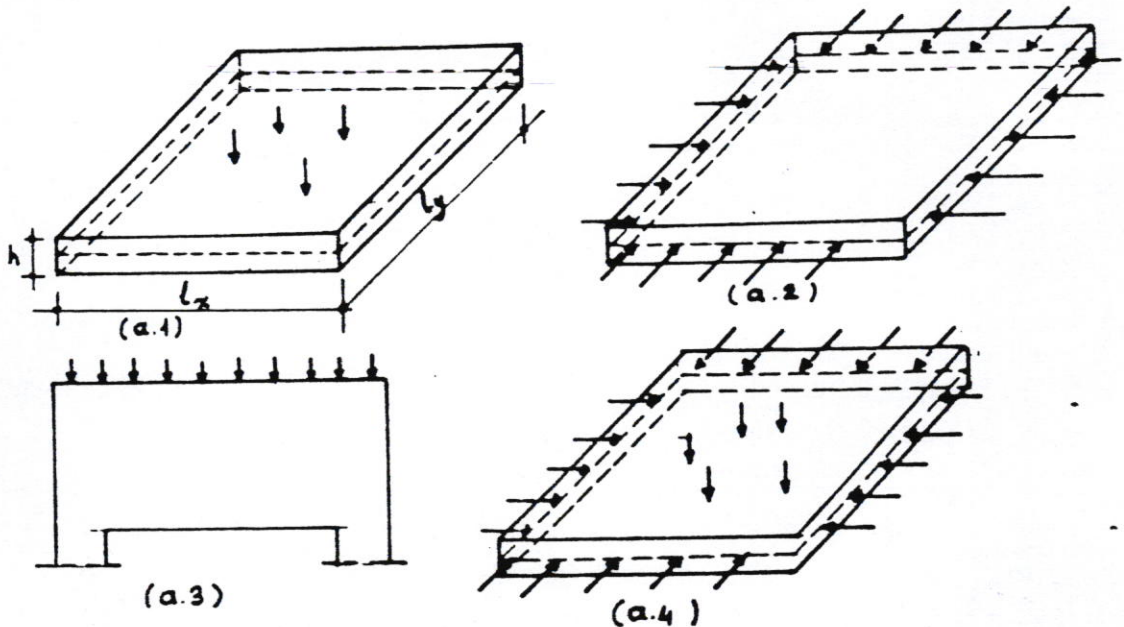
b - σ_x = Değişken olması durumu :

- b - 1. Basit eğilme etkisindeki kirişler
- b - 2. Bileşik eğilme etkisindeki kolonlar

1.2. Yüzeyssel Taşıyıcı Sistemleri :

Kalınlıkları , taşıyıcı yöndeki boyutları yanında çok küçük olan sistemlerdir. Bu tür taşıyıcıların kalınlıklarının orta noktalarını birleştiren yüzeye "orta yüzey" denir.

a - Orta yüzey bir düzlem ise , bir düzlemsel taşıyıcı söz konusu olur. Düzlemsel taşıyıcılar da , dış yüklerin etki biçimine göre kendi içinde bölümlere ayrılır.



Şekil 1.2. Düzlemsel taşıyıcılar (a.1) Plak , (a.2) Levha
(a.3)Derin Kiriş , (a.4) Öngerilmeli plak

a - 1) Dış yükler orta düzleme dik ise "plak çalışması" söz konusudur. Yani , orta düzlemin eğilmesi ile bir elastik yüzey oluşmaktadır. Bu tür taşıyıcılara "plak" denir. Betonarme döşemeler plak cinsinden taşıyıcılardır.

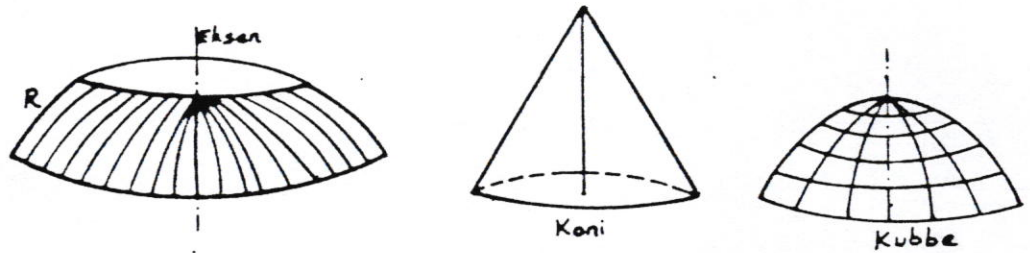
a - 2) Dış yükler orta düzlem içinde etkiliyor ise bir "levha" (disk) çalışması söz konusudur. Levhalarda stabilite problemleri önem kazanır.

a - 3) Yüksek kirişler de kendi düzlemleri içindeki yüklerin etkisi altındadır. Bunlarda hem stabilite problemi , hem de eğilme momenti etkisi vardır. Fakat kiriş teorisinde yapılan bazı varsayımlar burada geçerli değildir. Aynı şekilde öngerilmeli döşemelerde , plak çalışması esas olmakla beraber , öngerilme kuvvetinin etkisi ile stabilite problemi ve 2.mertebe momentleri önem kazanabilir.

?

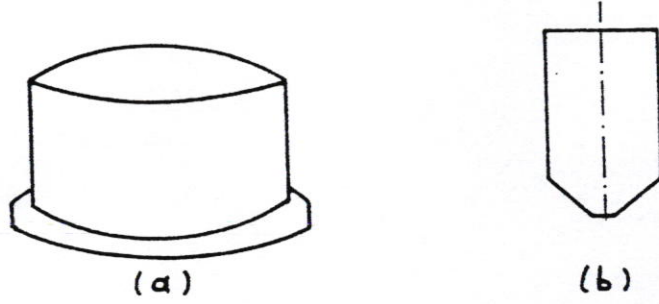
b - Orta yüzey düzlem değilse , herhangi bir eğri yüzey ise bu yüzeysel taşıyıcı "kabuk" adını alır. Kabuklar da geometrik özelliklerine göre kendi aralarında sınıflandırılabilir :

b - 1) Dönel kabuklar (Rotasyon kabukları) : Bir eğri parçasının bir eksen etrafında dönmesi ile elde edilen kabuklardır.



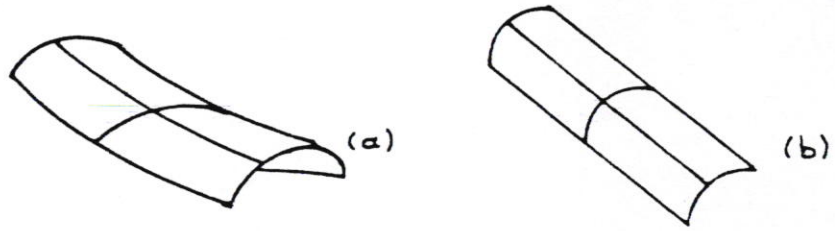
Şekil 1.3. Dönel kabuklar

b - 2) Silindirik kabuklar : Dönel kabukların özel bir halidir. Dönen eğri parçası , eksene paralel bir doğru ise , silindirik bir dönel yüzey elde edilir. Silindirik su depoları , silolar silindirik kabuklara örnek olarak gösterilebilir.



Şekil 1.4. Silindirik kabuklar (a) Su depoları (b) Silolar

b - 3) Öteleme kabukları : (Translasyon kabukları) . Bir eğrinin diğer bir eğri üzerinde kaydırılması ile elde edilen kabuklardır.



Şekil 1.5. Öteleme kabukları (a) Genel hal (b) Tonoz

Bir eğrinin bir doğru üzerinde kaydırılarak elde edilen yüzeye "tonoz" denir. Çok eskiden beri bilinen ve kullanılan bir taşıyıcıdır.

1.3. U z a y T a ş ı y ı c ı S i s t e m l e r

Hiçbir boyutu diğerlerine oranla küçük olmayan taşıyıcılardır. Blok beton inşaatlar , barajlar gibi .

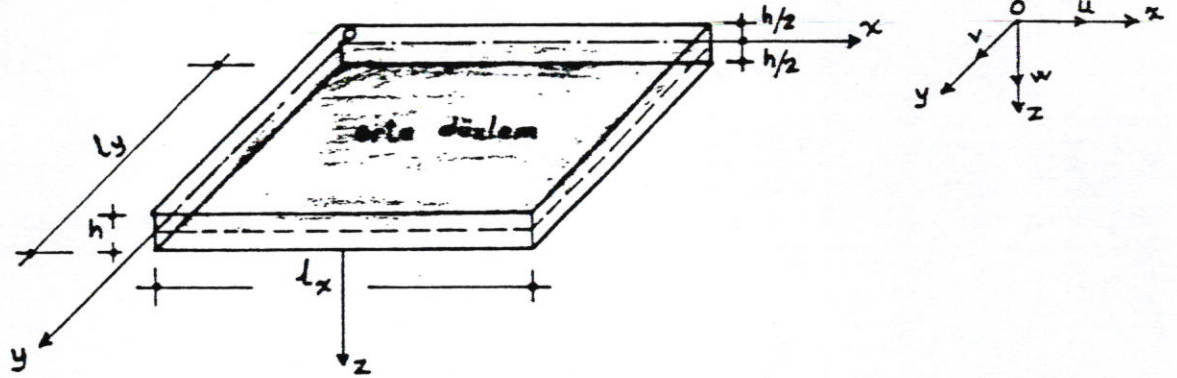
Yukardaki sınıflandırmadan da anlaşılabilceği gibi , kitabın konusu olan plaklar , yüzeysel taşıyıcı sistemlerin , düzlemsel taşıyıcılar bölümüne girmektedir . Burada küçük sehimli plaklar incelenecektir . Sehimleri büyük plaklar konu dışı bırakılmaktadır. Bunun anlamı şudur : Hesaplarda , yüklerin deforme olmamış sisteme etkidiği varsayılacaktır . Yani hesaplarda 1.mertebe teorisi ile yetinilecek , 2.mertebe teorisine girilmeyecektir . Uygulamada kullanılmakta olan betonarme döşemeler için bu yaklaşım yeterlidir .

Ayrıca , ince plak deyimi kullanılmakla beraber , gerçekte orta kalınlıkta plaklar konu edilecektir . (Yani incelenen plak , kayma deformasyonlarının yok sayılabileceği kadar ince , fakat aynı zamanda düzlem içi membran kuvvetlerinin yok sayılabileceği kadar kalındır.)

BÖLÜM . 2. PLAK DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN ÇIKARTILMASI

2.1. Tanımlama :

Kalınlığı , taşıyıcı boyutların yanında çok küçük ve orta orta düzlemine dik olarak yüklenmiş düzlemsel taşıyıcı sistemlere "plak" denir .



Şekil 2.1. Plak , koordinat eksenleri ve deplasmanlar

2.2. Varsayımlar :

2.2.1 - Plak geometrisi yönünden :

- a) Plak kalınlığı diğer boyutların yanında çok küçüktür .
 - b) Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir düzlemdir.
 - c) Yükler orta düzleme diktir.
 - d) Sehimler (çökmeler) plak kalınlığı yanında çok küçüktür .
- $$w \ll h$$

2.2.2 - Malzeme yönünden :

Malzeme homojen (her noktada aynı fiziksel özelliklere sahip),

izotrop (her doğrultuda aynı davranışı gösteren), belirli sınırlar içinde H o o k kanununa uyan lineer - elastik bir malzemedir . (H o o k cismi).

2.2.3 - Hesapları basitleştirme yönünden :

a) Deformasyondan önce orta düzlemin herhangi bir noktasının normali , deformasyondan sonra meydana gelen elastik yüzeyin o noktadaki normali olarak kalır . Yani deformasyondan önce , orta düzlemin bir noktadaki normali üzerinde bulunan bir nokta , deformasyondan sonra da elastik yüzeyin o noktadaki normali üzerinde bulunur . Bu çubuk sistemlerdeki B e r n o u i l l i - N a v i e r hipotezi-ne karşı gelen K i r c h h o f f - L o v e hipotezidir .

b) Plak orta düzlemine dik doğrultudaki σ_z normal gerilmeleri yok sayılabilecek kadar küçüktür . Gerçekte plakta üç doğrultuda (uzay) gerilme durumu söz konusudur . Fakat döşemenin herhangi bir (x_0, y_0) noktasında σ_z 'in h yüksekliğince değişimi incelenirse :

$$\sigma_z = \sigma(x_0, y_0, z) \quad \begin{array}{ll} z = -h/2 & \text{ için } \sigma_z = -p \\ z = h/2 & \text{ için } \sigma_z = 0 \end{array}$$

p birim alana gelen yüküdür . $p = 1,0 \text{ t/m}^2$ olsa $\sigma_z = -0,1 \text{ kg/cm}^2$ olur . Uygulamadan bilinir ki σ_x, σ_y değerleri $50 \sim 100 \text{ kg/cm}^2$ arasında değişir . Bu durumda (σ_z) değeri σ_x ve σ_y yanında çok küçüktür ve $\sigma_z \approx 0$ alınabilir.

c) Yukardaki varsayıma bağlı olarak $\epsilon_z \approx 0$ alınabilir . Çünkü elastisite teorisinden bilinir ki :

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad \sigma_z \approx 0 \quad \mu = 0.10 \sim 0.15$$

Bu durumda z doğrultusundaki boy değişimleri , yok sayılabilecek kadar küçük olur . Demek ki deformasyon sırasında plak kalınlığının değişmediği kabul ediliyor . $w = w(x, y)$ olur .

d) Kesitin orta düzleminde deformasyon yoktur .

Birim boy ve açı değişimleri ≈ 0

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x)_{z=0} &\approx 0 & (\varepsilon_y)_{z=0} &\approx 0 & (\gamma_{xy})_{z=0} &\approx 0 \\ (u)_{z=0} &\approx 0 & (v)_{z=0} &\approx 0 & (w)_{z=0} &\neq 0 \end{aligned}$$

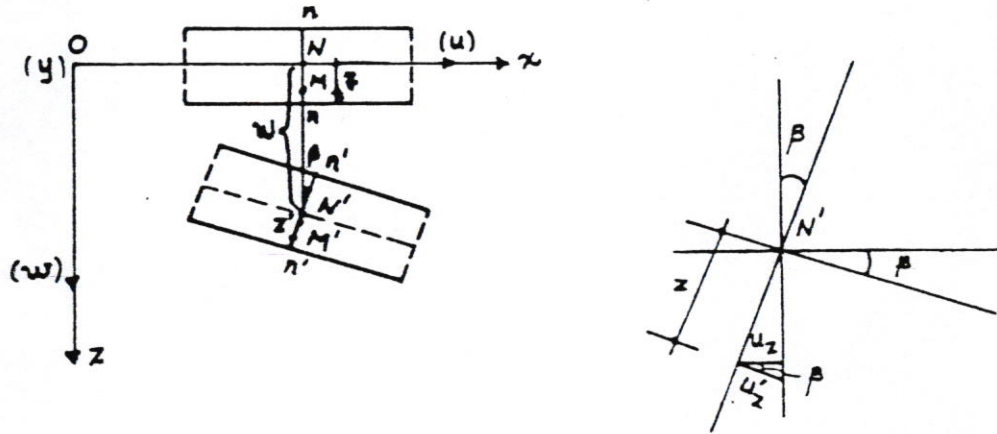
Plak probleminde ilk adım , plağa etkiyen yükler ile bunun sonucu olan deformasyonlar arasındaki diferansiyel bağıntının çıkartılmasıdır.



2.3. Diferansiyel geometri

Bu bölümde , diferansiyel geometri yardımıyla , deformasyon (şekil değiştirme) bileşenleri ile , deplasman (yer değiştirme) bileşenleri arasındaki bağıntılar çıkarılacaktır .

Bir plağı deformasyondan evvel ve deformasyondan sonra $y = \text{sabit}$ düzlemiyle keselim .



Şekil 2.2. Deformasyondan önce ve sonra plak elemanı

Plağın x doğrultusundaki eğimi $\tan \beta \approx \beta = \frac{\partial w}{\partial x}$ olacaktır.

Şekilden $\tan \beta = \frac{u'_z}{z}$ $u'_z = z \cdot \tan \beta = z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$

$$u_z = u'_z \cdot \cos \beta \quad \beta \text{ çok küçük olduğundan } \cos \beta \approx 1 ; u_z = u'_z$$

u_z , u 'nun (+) yönüne ters yönde olduğu için

$$u_z = -\frac{\partial w}{\partial x} \cdot z \quad u_z = -\frac{\partial w}{\partial x} \cdot z \quad (2.1)$$

Benzer şekilde :

$$v_z = -\frac{\partial w}{\partial y} \cdot z \quad (2.2)$$

z derinliğinde birim boy değişimi :

$$(\varepsilon_x)_z = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z$$

$$(\varepsilon_x)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z \quad (2.3)$$

$$(\varepsilon_y)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot z \quad (2.4)$$

z derinliğinde ve orta düzleme paralel bir elemandaki açı değişimi (distorsiyon) :

$$(\gamma_{xy})_z = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \cdot z - \frac{\partial^2 w}{\partial y \cdot \partial x} \cdot z$$

$$(\gamma_{xy})_z = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \quad (2.5)$$

2.4. Gerilmelerle Deformasyon Bileşenleri arasındaki Bağlılıklar

$\sigma_z \approx 0$, $\varepsilon_z \approx 0$ alındığına göre :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy}$$

bağlılıkları elastisite teori -

sinden bilinir .

Burada $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

Bu bağıntılardan gerilmeler çe-

kilirse :

$$(\sigma_x)_z = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y)_z \quad (2.6)$$

$$(\sigma_y)_z = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x)_z \quad (2.7)$$

$$(\tau_{xy})_z = G \cdot (\gamma_{xy})_z \quad (2.8)$$

2.5. Gerilmelerle Deplasman Bileşenleri Arasındaki Bağlıntılar

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_z &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(-z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ (\sigma_y)_z &= -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Benzer şekilde :

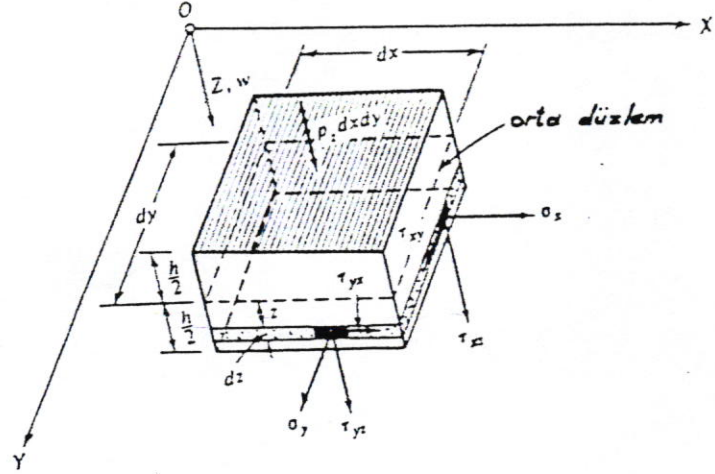
$$(\sigma_y)_z = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.10)$$

$$(\tau_{xy})_z = -\frac{E \cdot z}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \quad (2.11)$$

Görüldüğü gibi gerilmeler z 'e lineer olarak bağlıdır . Demek ki kesit yüksekliğince gerilmeler lineer olarak değişmektedir . Şu halde z indisi kaldırılıp ; gerilmeler , kısaca , şu biçimde ifade edilebilir :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a \cdot z \\ \sigma_y &= b \cdot z \\ \tau_{xy} &= c \cdot z \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.6. Gerilmelerin Bileskesi Olarak Momentlerin Bulunması



Şekil 2.3 Plak elemanında gerilmeler

Birim boyda etki eden momentleri M_x , M_y , M_{xy} ile göstere-
lim. Demek ki $dy = 1$ için σ_x gerilmelerinin tarafsız eksene göre
momentine M_x diyoruz. dz yüksekliğindeki diferansiyel elemana etki-
yen kuvvet: $\sigma_x \cdot dF$ olur. Bu kuvvetin tarafsız eksene göre momenti:

$$\sigma_x \cdot dF \cdot z \qquad dF = dz \cdot dy$$

yazılır ve plak yüksekliği boyunca integre edilirse:

$$dy \cdot M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot dF \cdot z = dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

(2.12)'den $\sigma_x = a \cdot z$ idi.

$$M_x = a \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = a \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = a \cdot \frac{h^3}{12}$$

Dikkat edilirse $h^3 / 12$ 'nin birim genişlik için plak atalet momen-
ti olduğu görülür.

$$\begin{aligned} M_x &= a \cdot I \\ M_y &= b \cdot I \\ M_{xy} &= c \cdot I \end{aligned}$$

(2.13)

a , b , c değerleri (2.9) , (2.10) , (2.11) 'den yerlerine yazılırsa :

$$\begin{aligned} M_x &= - \frac{EI}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= - \frac{EI}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= - \frac{EI}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.14)$$

(2.14) 'de $EI / (1 - \mu^2) = D$ (plak rijitliği) ile gösterilirse :

$$\begin{aligned} M_x &= -D (w''_{xx} + \mu w''_{yy}) \\ M_y &= -D (w''_{yy} + \mu w''_{xx}) \\ M_{xy} &= -D (1-\mu) w''_{xy} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Bu bağıntılar plağın herhangi bir noktasındaki momentleri , o nokta-
nın sehiminin parsiyel turevlerine bağlı olarak ,vermektedir .

2.7. Diferansiyel Elemanın Dengesi ve Plak Diferansiel Denklemi

$$\sum P_z = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

Diferansiyel bir elemanın serbest yüzlerine etki eden kesit
tesirleri :

$$(M_x , Q_x , M_{xy}) , (M_y , Q_y , M_{yx})$$

olacaktır.