c) $y' = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - (8x^3 + 4x^2 - 1), \quad y_1 = x;$ $\qquad c: y = \left(2 + ce^{-2x^2}\right)^{-1} + x$

d) $y' + y^2 + (2x+1)y + (1 + x + x^2) = 0, \quad y_1 = -x, \quad y_2 = -x - 1;$ $\qquad c: y = -x + 1/(ce^x - 1)$

e) $x^2y' + x^2y^2 = xy - 1, \quad y_1 = 1/x;$ $\qquad c: y = \dfrac{1 + \ln|cx|}{x\ln|cx|}$

f) $(1 - x^3)y' - 2x + x^2y + y^2 = 0, \quad y_1 = x^2;$ $\qquad c: y = \dfrac{cx^2 + 1}{cx}$

g) $(x^2 - x^3)y' + y^2 + (x^2 - 2x)y = 0; \quad y_1 = x, \quad y_2 = x^2$

h) $y' = -y^2 + xy + 1, \quad y_1 = x;$

2) Özel çözümleri $y_1 = 1/x$, $y_2 = \ln x$, $y_3 = 2x$ olan Riccati denklemini kurunuz ve genel çözümünü bulunuz;

3) $y' + P(x)y = y^2 + R(x)$ Riccati diferansiyel denkleminin iki özel çözümü $y_1 = x$, $y_2 = x - 1$ olduğuna göre $P(x)$ ve $R(x)$'i belirtiniz ve genel çözümü bulunuz.

$c: P(x) = 2x - 1, \quad R(x) = x^2 - x + 1$

2.10 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Soru 1. $dx + (1 - x^2)\tan y dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Değişkenleri ayrılabilir diferansiyel denklemdir:

$$\frac{dx}{1 - x^2} + \tan y dy = 0 \Rightarrow -\tfrac{1}{2}\ln|1 - x| + \tfrac{1}{2}\ln|1 + x| - \ln|\cos y| = \ln|c|,$$

$$\ln\left|\frac{1 - x}{1 + x}\cos^2 y\right| = \ln c^{-2} \Rightarrow (1 - x)\cos^2 y = k(1 + x).$$

Soru 2. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin x\cos^2 y}{\cos^2 x}$ denkleminin genel çözümü nedir?

Çözüm: Değişkenleri ayrılabilir bir diferansiyel denklemdir:

$$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \int\frac{1}{\cos^2 y}dy = \int d(c) \Rightarrow \frac{1}{\cos x} + \tan y = c.$$

Soru 3. $\sin y dx + \cos y dy = 0$ diferansiyel denklemini; **a)** Değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem olarak, **b)** Tam diferansiyel denklem haline getirerek, çözünüz.

Çözüm: a) Denklemi değişkenlerine ayırsak;

$$dx + \frac{\cos y}{\sin y}dy = 0 \Rightarrow \int dx + \int\cot y dy = \int d(c),$$

genel çözüm, $x + \ln|\sin y| = c$ olarak elde edilir.

b) $\sin y dx + \cos y dy = 0; \quad M = \sin y, \; N = \cos y,$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\cos y}{\cos y} = 1 = f(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int dx} = e^x$$

$$e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = 0.$$

Tam diferansiyel denklem olduğundan

$$\int d(e^x \sin y) = \int d(c_1) \;\Rightarrow\; e^x \sin y = c_1$$

veya $x + \ln|\sin y| = c$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

Soru 4. $\left(2x\sinh\dfrac{y}{x} + 3y\cosh\dfrac{y}{x}\right)dx - 3x\cosh\dfrac{y}{x}dy = 0$ diferansiyel denklemi çözünüz.

Çözüm: Verilen denklem, birinci dereceden homojen bir diferansiyel denklemdir. $y = ux$ dönüşümü yapılırsa $dy = udx + xdu$ olur. Bu dönüşümlere göre denklem yeniden yazılır ve her iki yan x terimine bölünürse,

$$2\sinh u dx - 3x\cos u du = 0$$

olur. Buradan,

$$2\cdot\frac{dx}{x} - 3\cdot\frac{\cosh u}{\sinh u}du = 0$$

yazılır. Her terimin integralinden,

$$2\ln|x| - 3\ln|\sinh u| = \ln|c| \;\Rightarrow\; x^2 = c\sinh^3 u = c\sinh^3\left(\tfrac{y}{x}\right)$$

olarak bulunur.

Soru 5. $x\dfrac{dy}{dx} + y(x^2 + \log_e y) = 0,\ y(1) = 0$ başlangıç–değer problemini çözünüz.

Çözüm: $y(x^2 + \ln y)dx + xdy = 0;\ \ M = yx^2 + y\ln y,\ N = x$

$$M_y = x^2 + \ln y + 1 \neq N_x = 1$$

tam diferansiyel denklem değildir

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{1 - x^2 - \ln y - 1}{y\left(x^2 + \ln y\right)} = \frac{-1}{y} = g(y)$$

diferansiyel denkleminden integrasyon çarpanı

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{-\int\frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = y^{-1}$$

olarak bulunur.

$$(x^2 + \ln y)dx + \frac{x}{y}dy = 0$$

tam diferansiyel denklem olduğundan

$$x^2dx + \ln y dx + \frac{x}{y}dy = 0 \;\Rightarrow\; x^2dx + d(x\ln y) = d(c)$$

$$\int x^2dx + \int d(x\ln y) = \int d(c) \;\Rightarrow\; x^3/3 + x\ln y = c$$

şeklinde genel çözüm elde edilir. $y(1) = 1$ için özel çözüm:

$$\tfrac{1}{3} + 1.\ln 1 = c,\quad c = \tfrac{1}{3};\quad \tfrac{1}{3}x^3 + x\ln y = \tfrac{1}{3}$$

veya $x^3 + 3x\ln y = 1$.

Soru 6. $x\sec^2 y\dfrac{dy}{dx}+\tan y=x^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü ve $x=1$, $y=\frac{\pi}{4}$ başlangıç koşullu özel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\sec^2 y\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\tan y}{x}=x$ Bernoulli diferansiyel denklemi $\tan y=u$ dönüşümü yapılarak

$$\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=x$$

lineer diferansiyel denklemine dönüşür. Buradan da

$$u=x^{-1}\left(\tfrac{1}{3}x^3+c\right) \Rightarrow x\tan y=\tfrac{1}{3}x^3+c$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

Diğer yol: Tam diferansiyel denklem olarak çözebiliriz.

$$(\tan y-x^2)dx+x\sec^2 y dy=0$$

$$-x^2dx+\tan y dx+\sec^2 y dy=0$$

$$\int(-x^2)dx+\int d(x\tan y)=\int d(c)$$

$$-\tfrac{1}{3}x^3+x\tan y=c$$

Özel çözüm: $x=1$, $y=\pi/4$ için

$$1.\tan\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{1}{3}+c,\ \ c=\tfrac{2}{3} \Rightarrow 3x\tan y=x^3+2.$$

Soru 7. $y^2dx+(3xy+y^2-1)dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: x bağımlı değişken olarak düşünülür ve düzenlenirse

$$\frac{dx}{dy}+\frac{3xy+y^2-1}{y^2}=0 \Rightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{3}{y}x=\frac{1-y^2}{y^2}$$

lineer diferansiyel denklem olduğu görülür.

$$x=e^{-3\int\frac{dy}{y}}\left[\int e^{3\int\frac{dy}{y}}\frac{1-y^2}{y^2}dy+c\right]=y^{-3}\left[\int y(1-y^2)dy+c\right]$$

buradan genel çözüm, $xy^3=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{4}y^4+c$ olur.

Diğer yol: $M=y^2$, $N=3xy+y^2-1 \Rightarrow M_y=2y\neq N_x=3y$ olduğundan diferansiyel denklem tam değildir. $\mu(y)=y$ ile denklem tam hale getirilerek çözüm bulunabilir.

Soru 8. $(2x^3y-1)dx+x^4dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Lineer diferansiyel denklem olarak çözülebilir

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=x^{-4},\quad P(x)=2/x,\quad Q(x)=x^{-4},$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+c\right]$$

$$y=e^{-2\ln|x|}\left[\int e^{2\ln|x|}x^{-4}dx+c\right]=x^{-2}\left[\int x^{-2}dx+c\right]$$

$$y=x^{-2}\left[-x^{-1}+c\right] \Rightarrow x^3y+1=cx.$$

Diğer Yol: Tam diferansiyel denklem değildir. $\mu(x) = x^{-2}$ integral çarpanı ile denklem tam hale getirilerek çözüm bulunabilir.

Soru 9. $(2x+y+1)dx+(4x+2y-1)dy=0,\ y(1)=0$ başlangıç–değer problemini çözünüz.

Çözüm: Katsayılar oranı $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{-1}$ olduğundan $2x+y=z,\ 2dx+dy=dz$ dönüşümü yapılır:

$$(z+1)dx+(2z-1)(dz-2dx)=0$$
$$-3(z-1)dx+(2z-1)dz=0$$

değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem olduğundan

$$-3dx+\left(2+\frac{1}{z-1}\right)dz=0$$
$$-3x+2z+\ln|z-1|=c$$
$$-3x+2(2x+y)+\ln|2x+y-1|=c$$
$$x+2y+\ln|2x+y-1|=c$$

şeklinde genel çözüm elde edilir. $y(1)=0$ için özel çözüm

$$1+0+\ln(2+0-1)=c;\ c=1;$$
$$x+2y+\ln|2x+y-1|=1$$

olarak bulunur.

Soru 10. $\cos x e^{\sin x-\cos y}dx-\sin y dy=0,\ y(0)=0$ başlangıç–değer problemini çözümüz.

Çözüm: Değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemdir. Genel çözüm:

$$\cos x e^{\sin x}e^{-\cos y}dx-\sin y dy=0$$
$$\cos x e^{\sin x}dx-\sin y e^{\cos y}dy=0$$
$$\int \cos x e^{\sin x}dx+\int(-\sin y)e^{\cos y}dy=\int d(c)$$
$$e^{\sin x}+e^{\cos y}=c.$$

Özel çözüm: $y(0)=0$ için $1+e=c;\quad e^{\sin x}+e^{\cos y}=e+1.$

Soru 11. $2xydx+(x^2+y)dy=0$ diferansiyel denklemini **a)** Tam diferansiyel denklem olduğunu göstererek çözünüz. **b)** Bernoulli diferansiyel denklem olduğunu göstererek çözünüz.

Çözüm: a) $M=2xy,\ N=x^2+y\ \Rightarrow\ M_y=2x=N_x$ olduğundan verilen denklem tam diferansiyel denklemdir. Genel çözüm:

$$(2xydx+x^2dy)+ydy=0\ \Rightarrow\ \int d(x^2y)+\int ydy=\int d(c),$$

den $x^2y+\frac{1}{2}y^2=c$ olarak bulunur.

b) Bu aynı zamanda, x bağımlı y bağımsız değişkenli Bernoulli denklemidir.

$$2x\frac{dx}{dy}+\frac{x^2+y}{y}=0\ \Rightarrow\ 2x\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x^2=-1$$

$x^2=u$ dönüşümü ile lineer diferansiyel denkleme indirgenir:

$$\frac{du}{dy}+\frac{u}{y}=-1,\quad P(y)=y^{-1},\quad Q(y)=-1,$$

$$u = y^{-1}\left[\int y(-1)dy + c\right] = y^{-1}\left[-\tfrac{1}{2}y^2 + c\right]$$

Genel çözüm: $x^2y + y^2/2 = c$.

Soru 12. $(x^3y - 2y^4)dx + (y^3x - 2x^4)dy = 0$ diferansiyel denkleminin, **a)** Homojen olduğunu göz önüne alarak, **b)** Tam hale dönüştürerek, genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: a) $y = vx,\ dy = vdx + xdv$ dönüşümü yapılarak

$$\frac{dx}{x} = \frac{v^3 - 2}{v(1+v^3)}dv$$

değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{dx}{x} = \left(-\frac{2}{v} + \frac{1}{v+1} + \frac{2v-1}{v^2 - v + 1}\right)dv$$

$$\ln x = -2\ln v + \ln|v+1| + \ln|v^2 - v + 1| + \ln|c|$$

$$x = c\frac{v^3+1}{v^2} \quad \Rightarrow \quad x^2y^2 = c(x^3 + y^3).$$

b) Bu homojen diferansiyel denklemin integrasyon çarpanı;

$$\mu = \frac{1}{xM + yN} = \frac{1}{x^4y - 2xy^4 + y^4x - 2yx^4} = \frac{-1}{xy\left(x^3 + y^3\right)}$$

dır ve böylece

$$\frac{2y^3 - x^3}{x\left(y^3 + x^3\right)}dx + \frac{2x^3 - y^3}{y\left(y^3 + x^3\right)}dy = 0$$

tam diferansiyel denklemi elde edilir.

$$f(x,y) = c, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

olduğuna göre

$$f = \int \frac{2y^3 - x^3}{x\left(x^3 + y^3\right)}\partial x + \phi(y)$$

$$f = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+y} + \frac{-2x + y}{x^2 - 2xy + y^2}\right)\partial x + \phi(y)$$

$$f = 2\ln|x| - \ln|x+y| - \ln\left|x^2 - xy + y^2\right| + \phi(y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x+y} + \frac{x - 2y}{x^2 - xy + y^2} + \phi'(y) = \frac{2x^3 - y^3}{y\left(y^3 + x^3\right)}$$

$$\phi'(y) = \frac{2x^3 - y^3}{y\left(y^3 + x^3\right)} + \frac{3y^2}{x^3 + y^3} = \frac{2}{y} \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = 2\ln|y|.$$

Buradan genel çözüm:

$$f = \ln\left|\frac{x^2y^2}{x^3 + y^3}\right| = c = \ln k \quad \Rightarrow \quad x^2y^2 = k\left(x^3 + y^3\right).$$

Soru 13. $\left(x^3y - 2y^4\right)dx + \left(y^3x - 2x^4\right)dy = 0$ diferansiyel denklemini tam hale getiren integral çarpanının $\mu = x^py^q$ formunda olabilmesi için p ve q ne olmalıdır; bu durumda diferansiyel denklemi çözünüz.

Çözüm: $\mu = x^p y^q$ 'nun integrasyon çarpanı olabilmesi için

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^p y^q\left(x^3 y-2y^4\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^p y^q\left(y^3 x-2x^4\right)\right)$$

eşitliği sağlanmalıdır.

$$(q+1)x^{p+3}y^q-2(q+4)x^p y^{q+3}=(p+1)x^p y^{q+3}-2(p+4)x^{p+3}y^q$$

$$(q+1)x^3-2(q+4)y^3=(p+1)y^3-2(p+4)x^3$$

$$\left.\begin{array}{l}(q+1)=-2(p+4)\\(p+1)=-2(q+4)\end{array}\right\} \quad p=q=-3 \;\Rightarrow\; \mu=x^{-3}y^{-3}.$$

Bulunan integrasyon çarpanı ile denklem çarpılıp,

$$\frac{x^3-2y^3}{x^3y^2}dx+\frac{y^3-2x^3}{x^2y^3}dy=0$$

tam diferansiyel denklemi çözülürse genel çözüm

$$x^2y^2=c\left(x^3+y^3\right)$$

olarak elde edilir.

Not: Bir $Mdx+Ndy=0$ diferansiyel denkleminin iki integrasyon çarpanı μ_1 ve μ_2 ise, genel çözümü $\mu_1/\mu_2=c$ 'dir. O halde problem 12 ve 13'den, genel çözüm:

$$\mu_1=\frac{-1}{xy\left(x^3+y^3\right)}\;,\;\mu_2=x^{-3}y^{-3}\;;\;\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=c.$$

Soru 14. $\left(x^5+3y\right)dx-xdy=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm:
$$\left.\begin{array}{ll}M=x^5+3y & ,\; M_y=3\\ N=-x & ,\; N_x=-1\end{array}\right\} \Rightarrow M_y\neq N_x$$

tam diferansiyel denklem değildir.

$$\frac{M_y-N_x}{N}=-\frac{4}{x}=f(x);\quad \mu(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{-4\ln|x|}=x^{-4}$$

integral çarpanı ile denklem

$$\left(x+3yx^{-4}\right)dx-x^{-3}dy=0$$

tam diferansiyel denklem haline gelir.

$$xdx+\left(3yx^{-4}dx-x^{-3}dy\right)=d(c)\;\Rightarrow\;\int xdx+\int d\left(-yx^{-3}\right)=\int d(c)$$

Genel çözüm:

$$\tfrac{1}{2}x^2-yx^{-3}=c\;\Rightarrow\;x^5-2y=2cx^3.$$

Diğer yol: y'ye göre lineer diferansiyel denklem olarak çözülebilir.

Soru 15. $\frac{dy}{dx}=1+6xe^{x-y}$, $y(0)=0$ başlangıç değer problemlerini çözünüz.

Çözüm: $y'=1+6xe^xe^{-y}\;\Rightarrow\;e^yy'-e^y=6xe^x$ Bernoulli diferansiyel denklemi $e^y=u$ dönüşümü ile $u'-u=6xe^x$ lineer diferansiyel denklemine indirgenir ve genel çözüm:

$$u=e^x\left(\int e^{-x}6xe^xdx+c\right)=e^x\left(3x^2+c\right)\;\Rightarrow\;e^{y-x}=3x^2+c.$$

$y(0)=0$ için $c=1$ ve özel çözüm: $e^{y-x}=3x^2+1.$

Soru 16. $y'\sin 2x + y\cos 2x = y^3$; $y(\pi/4) = 1$ başlangıç-değer problemini çözünüz.

Çözüm: Bu, bir Bernoulli denklemidir.

$$y^{-2} = u, \ -2y^{-3}y' = u'$$

dönüşümü yapalım:

$$y^{-3}y' + \cot^2 2xy^{-2} = \frac{1}{\sin 2x} \Rightarrow u' - 2(\cot 2x)u = \frac{-2}{\sin 2x}$$

lineer diferansiyel denklemin çözümünden genel çözüm:

$$u = y^{-2} = \cos 2x + c\sin 2x.$$

$y(\pi/4) = 1$ için $c = 1$ ve özel çözüm:

$$y^{-2} = \cos 2x + \sin 2x.$$

Soru 17. $x = y^{cx}$ eğriler ailesi veriliyor. **a)** Diferansiyel denklemini kurunuz. **b)** Kurduğunuz diferansiyel denklemi çözerek verilen eğriler ailesi ile karşılaştırınız.

Çözüm: a) $x = y^{cx} \Rightarrow \ln x = cx\ln y \Rightarrow \dfrac{1}{x} = c\ln y + cx\dfrac{y'}{y}$,

$$\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{\ln y}\frac{y'}{y} \Rightarrow y' = \frac{y\ln y(1-\ln x)}{x\ln x}$$

veya

$$y\ln y(1-\ln x) - x\ln x dy = 0.$$

b) Bu, değişkenleri ayrılabilir bir diferansiyel denklemdir;

$$\frac{(\ln x - 1)}{x\ln x}dx + \frac{1}{y\ln y}dy = 0$$

$$\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x\ln x}\right)dx + \int\frac{dy}{y\ln y} = \int d(\ln k)$$

$$\ln|x| - \ln|\ln x| + \ln|k\ln y| = \ln k$$

$$x\ln y = k\ln x \Rightarrow \ln y^x = \ln x^k; \quad x = y^{x/k}$$

$c = 1/k$ alınarak çözümün verilen eğriler ailesi olduğu görülür.

Soru 18. $(x+y+1)dx + (x-y-3)dy = 0$, $y(0) = -1$ başlangıç-değer problemini çözünüz.

Çözüm: $M = x+y+1$, $N = x-y-3$ ve $M_y = 1 = N_x$ olduğundan verilen denklem tam diferansiyel denklemdir. Gruplama yöntemiyle genel çözüm:

$$(x+1)dx - (y+3)dy + ydx + xdy = 0$$

$$\int(x+1)dx - \int(y+3)dy + \int d(x.y) = \int d(c)$$

$$\tfrac{1}{2}x^2 + x - \tfrac{1}{2}y^2 - 3y + xy = c; \quad 2c = k$$

$$x^2 + 2xy - y^2 - 6y + 2x = k$$

$y(0) = -1$ koşuluna göre $c = 5$ ve özel çözüm: $x^2 + 2xy - y^2 - 6y = 5 - 2x.$

Soru 19. $(\sin^2 x - y)dx - \tan x dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $M = \sin^2 x - y$, $N = -\tan x \Rightarrow M_y = -1 \neq N_x = -1 - \tan^2 x$ olduğundan tam diferansiyel denklem değildir.

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{-1+1+\tan^2 x}{-\tan x}=-\tan x \Rightarrow \mu(x)=e^{-\int \tan x\,dx}=\cos x$$

integrasyon çarpanı ile

$$(\cos x\sin^2 x\,dx-y\cos x)dx-\sin x\,dy=0$$

tam diferansiyel denkleme dönüşür.

$$\int \cos x\sin^2 x\,dx-\int d(y\sin x)=\int d(c)$$

buradan genel çözüm:

$$\sin^3 x-3y\sin x=c.$$

Diğer yol: Bu aynı zamanda y'ye göre lineer diferansiyel denklemdir.

Soru 20. $(y+e^x-e^{-x})dx+(1+e^x)dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bu, bir Bernoulli diferansiyel denklemidir:

$$(1+e^x)y'+(y+e^x)=e^{-x};$$

$$y+e^x=u \Rightarrow (1+e^x)y'=u'$$

dönüşümü uygulanarak

$$u'+u=e^{-x}$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir ve çözülerek

$$u=e^{-x}\left[\int e^x e^{-x}dx+c\right]=e^{-x}(x+c),$$

$$y+e^x=e^{-x}(x+c)$$

genel çözümü bulunur.

Diğer yol: Tam olmayan bir diferansiyel denklemdir; $\mu(x)=e^x$ integrasyon çarpanı ile tam hale getirilerek çözülebilir.

Soru 21. $\cos y\,dy+\sin x\sin y\,dx=\sin x\,dx$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\cos y\dfrac{dy}{dx}+\sin x\sin y=\sin x$ Bernoulli diferansiyel denklemidir. $\sin y=u$ dönüşümü ile

$$\frac{du}{dx}+(\sin x)u=\sin x$$

lineer diferansiyel denkleme indirgenir ve genel çözüm:

$$u=e^{\cos x}\left(\int e^{-\cos x}\sin x\,dx+c\right)=e^{\cos x}\left(e^{-\cos x}+c\right),$$

$$\sin y=1+ce^{\cos x}.$$

Soru 22. $\arcsin y\,dx+\dfrac{x+2\sqrt{1-y^2}\cos y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $M=\arcsin y$ ve $N=\left(x+2\sqrt{1-y^2}\cos y\right)/\sqrt{1-y^2}$ olmak üzere tamlık koşulu;

$$M_y=N_x=1/\sqrt{1-y^2},$$

sağlandığından bu denklem tam diferansiyel denklemdir. $f(x,y)=c$ şeklinde çözümü vardır:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=\arcsin y \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=\int \arcsin y\,\partial x+\phi(y)$$

$$\Rightarrow\quad f(x,y)=x\arcsin y+\phi(y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}+\phi'(y)=\frac{x+2\sqrt{1-y^2}\cos y}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\phi'(y)=2\cos y \quad\Rightarrow\quad \phi(y)=2\sin y,$$

genel çözüm: $f(x,y)=c \;\Rightarrow\; x\arcsin y+2\sin y=c$.

Soru 23. $y'+\dfrac{y}{2x}=\dfrac{x}{y^3}$, $y(1)=2$ başlangıç-değer problemini çözünüz.

Çözüm: $y^3y'+\dfrac{y^4}{2x}=x$ Bernoulli diferansiyel denklemidir.

$$y^4=u \quad\Rightarrow\quad y^3y'=u'/4$$

dönüşümü yapılırsa

$$u'+\frac{2}{x}u=4x$$

lineer diferansiyel denklemi bulunur. Genel çözüm:

$$y^4x^2-x^4=c.$$

Özel çözüm:

$$y(1)=2 \;\Rightarrow\; c=15;\; y^4x^2-x^4=15.$$

Soru 24. $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-xy^{-1}\right)dy=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Bu, bir homojen denklemdir:

$$x=uy \quad\Rightarrow\quad dx=udy+ydu$$

dönüşümü ile değişkenlerine ayrılabilen

$$\left(u+e^u\right)dy+y\left(1+e^u\right)du=0$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

$$\frac{dy}{y}+\frac{1+e^u}{u+e^u}du=0 \quad\Rightarrow\quad \ln|y|+\ln\left|u+e^u\right|=\ln|c|,$$

$$y\left(u+e^u\right)=c \quad\Rightarrow\quad x+ye^{x/y}=c.$$

Soru 25. $y_1=x$ in, $y'+(y-x+1)^2=2$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olduğunu gösteriniz; denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y=x$, $y'=1$ ifadelerini denklemde yerine yazalım:

$$1+(x-x+1)^2=2 \;\Rightarrow\; 2=2$$

olduğundan, $y_1=x$ bir özel çözümdür.

$$y'+y^2+x^2+1-2yx+2y-2x=2$$

$$y'+2(1-x)y=-y^2-x^2+2x+1$$

diferansiyel denklemi bir Riccati denklemidir.

$$y=y_1+\frac{1}{u} \quad\Rightarrow\quad y=x+\frac{1}{u}, \quad y'=1-\frac{u'}{u}$$

dönüşümü ile Riccati denklemi,

$$u' - 2u = 1$$

lineer denklemine indirgenir. Genel çözüm:

$$u = e^{2x}\left(\int e^{-2x}dx + c\right) \Rightarrow \frac{1}{y-x} = -\frac{1}{2} + ce^{2x}.$$

Soru 26: Keyfi noktadaki teğetinin ordinat ekseninden ayırdığı parça teğet noktasının apsisinin k katına $(k>0)$ eşit olan eğri ailesinin denklemini yazın.

Çözüm: Denklemi aranan ailenin bir eğrisi $y = y(x)$ ve üzerindeki keyfi nokta $M(x,y)$ olsun. Bu noktada teğet denklemi

$$Y - y = y'(X - x)$$

olarak yazılabilir. Burada X, Y ile teğet üzerindeki noktaların koordinatları gösterilmektedir. Denklemden, teğetin ordinat eksenini kestiği noktanın $(X = 0)$ ordinatı, $\overline{OT} = Y = y - xy'$ olarak bulunur. Koşula göre, $\overline{OT} = kx$ olduğunu burada göz önüne alırsak,

$$y - xy' = kx \quad \text{veya} \quad y' - x^{-1}y = -k$$

elde ederiz. Görüldüğü gibi denklem doğrusal diferansiyel denklemdir ve çözüm

$$y = e^{\int\frac{dx}{x}}\left(c - k\int e^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right) = x\left(c - k\ln|x|\right) \Rightarrow x^k = ce^{-y/x}$$

olarak bulunur.

Soru 27: $y(0) = 1$ koşuluyla $(x^2+1)y' + y^2 + 1 = 0$ olan diferansiyel denklemi çözünüz.

Çözüm: Verilen denklem değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{dy}{1+y^2} = -\frac{dx}{1+x^2}$$

yazılır. Her iki yanın integralinden,

$$\tan^{-1}y = -\tan^{-1}x + c \Rightarrow \tan^{-1}y + \tan^{-1}x = c$$

bulunur. Son yazılan eşitliğin her iki yanının tanjantı alınırsa,

$$\tan\left(\tan^{-1}y + \tan^{-1}x\right) = \tan c$$

yazılır. Diğer taraftan,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

özdeşliği göz önüne alınırsa, $a = \tan^{-1}y$ ve $b = \tan^{-1}x$ denirse

$$\tan\left(\tan^{-1}y + \tan^{-1}x\right) = \frac{y+x}{1-xy}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{x+y}{1-xy} = \tan c$$

bulunur. Eğer $y(0) = 1$ ön koşulu kullanılırsa,

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1 \Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x}$$

biçiminde özel çözüm bulunur.

Soru 28. $(-7x+3y+7)dx+(-3x+7y+3)dy=0$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Katsayılar oranı farklı olduğundan

$$\left.\begin{array}{l}-7h+3k+7=0\\ -3h+7k+3=0\end{array}\right\} h=1\,,\ k=0,$$

$$x=X+h=X+1\,,\quad dx=dX$$

$$y=Y+k=Y\,,\qquad dy=dY$$

dönüşümü ile, verilen denklem homojen hale gelir:

$$(-7X+3Y)dX+(-3X+7Y)dY=0$$

$$Y=vX,\quad dY=vdX+Xdv$$

dönüşümü yapılarak

$$7\frac{dX}{X}+\frac{7v-3}{v^2-1}dv=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{7dX}{X}+\frac{2dv}{v-1}+\frac{5dv}{v+1}=0,$$

$$7\ln|X|+2\ln|v-1|+5\ln|v+1|=\ln|c|$$

$$X^7(v-1)^2(v+1)^5=c\,;\qquad v=\frac{Y}{X}=\frac{y}{x-1}$$

$$(x-1)^7\left(\frac{y}{x-1}-1\right)^2\left(\frac{y}{x-1}+1\right)^5=c,$$

genel çözüm: $(y-x+1)^2(y+x-1)^5=c.$

Soru 29. $y'=y^2\ln x-\dfrac{y}{x}$, $y(1)=1$ başlangıç-değer problemini çözünüz.

Çözüm: $y'+\dfrac{y}{x}=y^2\ln x$, Bernoulli diferansiyel denklemidir.

$$y^{-2}y'+\frac{1}{x}y^{-1}=\ln x;\quad y^{-1}=u,\quad y^{-2}y'=-u'$$

dönüşümleri ile

$$u'-\frac{1}{x}u=-\ln x$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

$$u=x\left[\int\frac{1}{x}(-\ln x)dx+c\right]=x\left[-\tfrac{1}{2}\ln^2 x+c\right]=y^{-1}$$

genel çözüm $xy\ln^2 x+2=2cxy$ olarak bulunur. $y(1)=1$ için $1.1.\ln^2 1+2=2c.1.1$, $c=1$ ve özel çözüm:

$$xy\ln^2 x+2=2xy\,.$$

Soru 30. $xdy+ydx=\dfrac{dx}{y}-\dfrac{dy}{x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $xy(xdy+ydx)=xdx-ydy \quad\Rightarrow\quad xyd(xy)=xdx-ydy$

$$xy=t,\ d(xy)=dt \quad\Rightarrow\quad \int tdt=\int xdx-\int ydy+\int d(c)$$

$$\tfrac{1}{2}t^2=\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}y^2+c \quad\Rightarrow\quad x^2y^2=x^2-y^2+k.$$

Diğer yol: $x(y^2-1)dx+(x^2+1)ydy=0$ değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem olarak veya $y\frac{dy}{dx}+\frac{x}{x^2+1}y^2=\frac{x}{x^2+1}$ Bernoulli diferansiyel denklemi olarak da çözülebilir.

Soru 31. $(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0$ diferansiyel denklemi çözünüz.

Çözüm: $M(x,y)=x^2+y^2$ ve $N(x,y)=(x^2-xy)$ fonksiyonlarının her ikisi de ikinci dereceden homojen fonksiyonlar olduklarından, denklem homojen bir diferansiyel denklemdir. Buna göre $y=ux$ denirse $dy=udx+xdu$ yazılır. Bu halde,

$$(x^2+u^2x^2)dx+(x^2-ux^2)(udx+xdu)=0$$

$$x^2(1+u)dx+x^3(1-u)du=0$$

$$\frac{1-u}{1+u}du+\frac{dx}{x}=0$$

$$\left(-1+\frac{2}{1+u}\right)du+\frac{dx}{x}=0$$

integrali alınabilir hale gelir. Her iki yanın da integrali alınırsa,

$$-u+2\ln|1+u|+\ln|x|+\ln|c|=0$$

bulunur. İlk baştaki değişkenleri yerine koyarsak aradığımız çözüm bulunur.

$$-\frac{y}{x}+2\ln\left|1+\frac{y}{x}\right|+\ln|x|+\ln|c|=0 \;\Rightarrow\; c(x+y)^2=xe^{\frac{y}{x}}.$$

Soru 32. $(\sin x+y)dx+(x-2\cos y)dy=0$, $y(\pi/2)=0$ başlangıç-değer problemini çözünüz.

Çözüm: Denklem tam diferansiyel denklemdir.

$$\left.\begin{matrix} M=\sin x+y, & M_y=1 \\ N=x-2\cos y, & N_x=1 \end{matrix}\right\} \quad M_y=N_x=1,$$

$$\sin xdx+[ydx+xdy]-2\cos ydy=0$$

$$\int\sin xdx+\int d(xy)-2\int\cos ydy=\int d(c)$$

$$-\cos x+xy-2\sin y=c$$

genel çözümü elde edilir. $y(\pi/2)=0$ için

$$-\cos\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{2}.0-2\sin 0=c \;\Rightarrow\; c=0,$$

ve özel çözüm:

$$\cos x+2\sin y=xy.$$

Soru 33. $xe^{x-y}dx+ydy=0$, $y(0)=0$ başlangıç-değer problemini çözünüz.

Çözüm: Bu denklem değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemdir.

$$xe^xe^{-y}dx+ydy=0 \;\Rightarrow\; xe^xdx+ye^ydy=0$$

$$\int xe^xdx+\int ye^ydy=\int d(c) \;\Rightarrow\; xe^x-e^x+ye^y=c+e^y$$

genel çözümü bulunur. $y(0)=0$ koşulu için, $c=-2$ ve özel çözüm:

$$xe^x-e^x+ye^y-e^y=-2$$

olarak bulunur.

Soru 34. a) $x^2\cos y + x^3y - \frac{1}{2}y^2 = c$ eğriler ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz. **b)** Kurduğunuz diferansiyel denklemin genel çözümünün verilen eğriler ailesi olduğunu elde ediniz.

Çözüm: a)
$$2x\cos y - x^2\sin y y' + 3x^2y + x^3y' - yy' = 0$$
$$y'(-x^2\sin y + x^3 - y) + (2x\cos y + 3x^2y) = 0$$
$$(2x\cos y + 3x^2y)dx + (-x^2\sin y + x^3 - y)dy = 0.$$

b) Bulunan bu denklem, bir tam diferansiyel denklemdir:
$$(2x\cos y dx - x^2\sin y dy) + (3x^2 y dx + x^3 dy) - y dy = 0$$
$$\int d(x^2\cos y) + \int d(x^3 y) - \int y dy = \int d(c)$$
$$x^2\cos y + x^3y - \tfrac{1}{2}y^2 = c.$$

Soru 35. $M(x,y)dx + (y^2\sin x + xy - 1)dy = 0$ diferansiyel denkleminin tam olabilmesi için $M(x,y)$ ne olmalıdır?

Çözüm: Tam diferansiyel denklem olma koşulundan,
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{dx}\left[y^2\sin x + xy - 1\right] = y^2\cos x + y$$
$$M(x,y) = \int (y^2\cos x + y)\partial y + \phi(x)$$
$$M(x,y) = \tfrac{1}{3}y^3\cos x + \tfrac{1}{2}y^2 + \phi(x)$$
elde edilir; burada $\phi(x)$, x ' e bağlı keyfi bir fonksiyondur.

Soru 36. $(e^x+1)y' = e^{2x}$, $y(0) = 0$ başlangıç-değer problemini çözünüz.

Çözüm: Bu denklem değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemdir;
$$dy = \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx \Rightarrow \int dy = \int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx + \int d(c).$$
Buradan genel çözüm:
$$y = (e^x+1) - \ln(e^x+1) + c.$$
$y(0) = 0$ için özel çözüm:
$$0 = 2 - \ln 2 + c \Rightarrow c = \ln 2 - 2 \Rightarrow y = (e^x+1) - \ln(e^x+1) + \ln 2 - 2.$$

Soru 37. $x(1+e^y)dx + \frac{1}{2}(x^2+y^2)e^y dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem,
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x(1+e^y)\right] = xe^y = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)e^y\right]$$
koşulu sağlandığından, tam diferansiyel denklemdir.
$$xdx + \left[xe^y dx + \tfrac{1}{2}x^2e^y dy\right] + \tfrac{1}{2}y^2e^y dy = 0$$
$$\int xdx + \int d(\tfrac{1}{2}x^2e^y) + \int \tfrac{1}{2}y^2e^y dy = \int d(c)$$
$$\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^2e^y + \tfrac{1}{2}y^2e^y - ye^y + e^y = c$$
$$x^2 + (x^2+y^2-2y+2)e^y = k.$$

Soru 38. $e^x \tan y dx + (2-e^x)\sec^2 y dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemdir.

$$\int \frac{e^x}{2-e^x}dx + \int \frac{\sec^2 y}{\tan y}dy = \int d(\ln c)$$

$$-\ln|2-e^x| + \ln|\tan y| = \ln|c|,$$

Genel çözüm: $\tan y = c(2-e^x)$.

Soru 39: $(6xy^2 - 3x^2)dx + (6x^2y + 3y^2 - 7)dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklem tam diferansiyeldir ve gruplama yöntemi ile çözüm aşağıdaki biçimde bulunur.

$$(-3x^2)dx + (6xy^2dx + 6x^2ydy) + (3y^2 - 7)dy = d(c)$$

$$-\int d(x^3) + \int d(3x^2y^2) + \int d(y^3 - 7y) = \int d(c)$$

$$-x^3 + 3x^2y^2 + y^3 - 7y = c.$$

Soru 40. $(y+1)dx + (4x-y)dy = 0$, $y(0) = 0$ başlangıç-değer problemini çözünüz.

Çözüm: x bağımlı, y bağımsız değişkenli lineer diferansiyel denklemdir.

$$\frac{dx}{dy} + \frac{4x}{y+1} = \frac{y}{y+1}$$

Genel çözüm:

$$x = e^{-\int \frac{4}{y+1}dy}\left[\int e^{\int \frac{4}{y+1}dy}\left(\frac{y}{y+1}\right)dy + c\right]$$

$$= (y+1)^{-4}\left[\int y(y+1)^3 dy + c\right]$$

$$= (y+1)^{-4}\left[\tfrac{1}{5}(y+1)^5 - \tfrac{1}{4}(y+1)^4 + c\right]$$

$$= \tfrac{1}{5}(y+1) - \tfrac{1}{4} + c(y+1)^{-4}$$

Özel çözüm: $y(0) = 0$ için $c = 1/20$ ve

$$20x(y+1)^4 - 4(y+1)^5 + 5(y+1)^4 = 1.$$

Diğer yol: Denklem $\mu(y) = (y+1)^3$ integral çarpanı ile tam hale indirgenerek çözülebilir. Ayrıca denklem, homojen hale de indirgenebilir.

Soru 41. $y' - \cos x = \cos x \tan^2 y$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Değişkenlerine ayrılabilir denklem olduğundan,

$$y' = \cos x(1 + \tan^2 y) \Rightarrow \int \frac{dy}{1+\tan^2 y} = \int \cos x dx$$

şeklinde yazılabilir.

$$\int (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2y)dy - \int \cos x dx = \int d(c),$$

$$\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\sin 2y - \sin x = c$$

genel çözümü bulunur.

Soru 42. $\left(3x^2+\frac{2y}{x}\right)dx+\left(2\ln 3x+\frac{3}{y}\right)dy=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $M=3x^2+\frac{2y}{x}$, $N=2\ln 3x+\frac{3}{y}$, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2}{x}$ olduğundan denklem tamdır; ve $u(x,y)=c$ formunda genel çözüm aranır. Standart yöntemle çözelim.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+\frac{2y}{x} \Rightarrow u(x,y)=x^3+2y\ln|x|+\phi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N \Rightarrow 2\ln|x|+\phi'(y)=2\ln 3x+\frac{3}{y},$$

$$\phi'(y)=2\ln 3+\frac{3}{y} \Rightarrow \phi=2y\ln 3+3\ln|y|,$$

$$u(x,y)=x^3+2y\ln|x|+2y\ln 3+3\ln|y|=c,$$

$$x^3+2y\ln|3x|+3\ln|y|=c.$$

Soru 43. $y'+y\cot x=5e^{\cos x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Bu bir lineer diferansiyel denklemdir.

$$y=e^{-\int\cot x dx}\left[\int e^{\int\cot x dx}(5e^{\cos x})dx+c\right]$$

$$y=\frac{1}{\sin x}\left[\int 5e^{\cos x}\sin x dx+c\right]$$

$$y\sin x=-5e^{\cos x}+c.$$

Soru 44. $xy'\left(x\sin y+y^{-1}\right)=1$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklem düzenlenirse $\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=x^2\sin y$ Bernoulli diferansiyel denklemi olduğu görülür. $x^{-1}=u$ dönüşümü ile

$$-x^{-2}\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x^{-1}=-\sin y \Rightarrow \frac{du}{dy}+\frac{1}{y}u=-\sin y$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir, genel çözüm:

$$u=\frac{1}{y}\left[\int -y\sin y dx+c\right] \Rightarrow yx^{-1}=y\cos y-\sin y+c.$$

Soru 45. $dx-2xydy=6x^3y^2e^{-2y^2}dy$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\frac{dx}{dy}-2xy=6x^3y^2e^{-2y^2}$ Bernoulli diferansiyel denklemidir.

$$x^{-3}\frac{dx}{dy}-2yx^{-2}=6y^2e^{-2y^2} \Rightarrow x^{-2}=u,\quad -2x^{-3}\frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy}$$

dönüşümü ile

$$-\frac{1}{2}\frac{du}{dy}-2yu=6y^2e^{-2y^2} \Rightarrow \frac{du}{dy}+4yu=-12y^2e^{-2y^2}$$

lineer diferansiyel denklemine indirgenir ve genel çözüm:

$$x^{-2}=e^{-2y^2}\left(-4y^3+c\right)$$

Soru 46. $\left(2xy^4e^y+2xy^3+y\right)dx+\left(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x\right)dy=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\left.\begin{array}{l} M_y=8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1 \\ N_x=2xy^4e^y-2xy^2-3 \end{array}\right\} \Rightarrow M_y\neq N_x$

olduğundan diferansiyel denklem tam değildir.

$$\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{-4\left(2xy^3e^y+2xy^2+1\right)}{y\left(2xy^3e^y+2xy^2+1\right)}=\frac{-4}{y},$$

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{4}{y}dy}=e^{-4\ln|y|}=y^{-4}$$

integrasyon çarpanı ile

$$\left(2xe^y+2xy^{-1}+y^{-3}\right)dx+\left(x^2e^y-x^2y^{-2}-3xy^{-4}\right)dy=0$$

tam diferansiyel denklemi elde edilir. Gruplama yöntemi ile genel çözüm:

$$\left(2xe^ydx+x^2e^ydy\right)+\left(2xy^{-1}dx-x^2y^{-2}dy\right)+\left(y^{-3}dx-3xy^{-4}dy\right)=0$$

$$\int d\left(x^2e^y\right)+\int d\left(x^2y^{-1}\right)+\int d\left(xy^{-3}\right)=\int d(c)$$

$$x^2e^y+x^2y^{-1}+xy^{-3}=c.$$

Soru 47. $\left(x^2+y^2\right)dx+\left(2xy-y^2\right)dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denklemi, homojendir ve aynı zamanda $M_y=2y=N_x$ olduğundan tamdır.

$$xM+yN=c \Rightarrow x\left(x^2+y^2\right)+y\left(2xy-y^2\right)=c,$$

o halde genel çözüm: $x^3+3xy^2-y^3=c$.

Not: $Mdx+Ndy=0$ diferansiyel denklemi n. dereceden homogen $(n\neq-1)$ ise aynı zamanda tam ise genel çözüm $xM+yN=c$'dir.

Diğer yol: Denklem tam olduğundan

$$x^2dx+\left(y^2dx+2xydy\right)-y^2dy=0$$

$$\int x^2dx+\int d\left(xy^2\right)-\int y^2dy=\int d(c)$$

$$\tfrac{1}{3}x^3+xy^2-\tfrac{1}{3}y^3=c.$$

Soru 48. $\left(x^4+y^4\right)dx-xy^3dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Homogen diferansiyel denklemdir. $y=ux,\quad dy=udx+xdu$, dönüşümü ile çözüm bulunur:

$$x^4\left(1+u^4\right)dx-x^4u^3\left(udx+xdu\right)=0,$$

$$x^4dx-x^5u^3du=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}-u^3du=0,$$

$$\ln|x|-\tfrac{1}{4}u^4=c_1 \Rightarrow 4\ln|x|-y^4x^{-4}=c,\quad 4x^4\ln|x|-y^4=cx^4.$$

Diğer yol: $y^3\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y^4=x^3$ Bernoulli diferansiyel denklemi veya. $\mu(x)=x^{-5}$ integrasyon ...ı ile tam diferansiyel denklem haline getirilerek de çözülebilir..