1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\ldots$$

$$\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right)$$

$$s_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots$$

$$=$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-3)}-\frac{1}{(2n-1)}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right)$$

$$s_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2}$$

Yakınsaktır.

Nuran Güzel

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}(4-x)^n$ serisinin yakınsaklık merkezini, yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz. Aralığın uç noktaları için seriyi inceleyiniz.

Çözüm:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}(4-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}(x-4)^n \Rightarrow c=4 \text{ yak. merk}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/(n+1)^3}{1/n^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3} = 1$$

$R = \frac{1}{L} \Rightarrow R = 1$ yak. yarıçapı

$c-R < x < c+R$

$4-1 < x < 4+1 \Rightarrow 3<x<5$ yak. aralığı

$x=3$ için $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ p-serisi $p>1$ old. dan yak.

$x=5$ için $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ alterne seri testi koşullarını sağlar (mutlak yakınsak)

Yak. ara. $3<x<5$

Nuran Güzel

2) $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \cdots \quad (-1 < t \leq 1)$ serisinden

yararlanarak $f(x) = \ln x$ fonksiyonunu $(x+3)$'ün kuvvetlerine göre seriye açınız.

Çözüm:

$$\ln x = \ln(3+x-3) = \ln\left(3\left(1+\frac{x-3}{3}\right)\right)$$

$$= \ln(3(1+t))$$

$$= \ln 3 + \ln(1+t)$$

$$= \ln 3 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \quad (-1 < t \leq 1)$$

$$= \ln 3 + \frac{x-3}{1.3} - \frac{(x-3)^2}{2.3^2} + \frac{(x-2)^3}{3.3^3} - \cdots$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.2^n}(x-3)^n \quad (0 < x \leq 6)$$

Nuran Güzel

1) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ fonksiyonunu $x=0$ civarında Taylor serisine açınız ve elde edilen serinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots \quad , |x| < 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

$$\Rightarrow \ln|1-(-x)| = \ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = +x - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} + \cdots + x + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} + \cancel{\frac{x^4}{4}} + \cdots$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{2k+3}}{2k+3}}{\frac{x^{2k+1}}{2k+1}} \right| = x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad (-1, 1)$$

$$x = -1 \Rightarrow \quad -2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$$

$$x = 1 \Rightarrow \quad 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2k+1}\,dk = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\ln|2k+1| \Big|_0^R = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\ln|2R+1| = \infty$$

İntegral testine göre ıraksaktır.

$$-1 < x < 1$$

Nuran Güzel

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksak olduğu x değerlerini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+3}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+3}}{\cancel{x^n}} \right|$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n^2+2n+4}} \right| = |x| \cdot 1 < 1$$

$$-1 < x < 1$$

$x = 1$ için

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ serisi $\sum \frac{1}{n}$ serisi ile aynı karakterdedir.

Harmonik seri ıraksak olduğundan ıraksaktır.

$x = -1$ için

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ serisi mutlak yakınsak değildir.

$|a_n| > |a_{n+1}|$, alterne seridir

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} = 0$ olduğundan seri, $x=-1$ için ş. yakınsa[k]

$-1 < x < 1$ aralığında mutlak yakınsak, $x < -1$ veya

$x \geq 1$ için ıraksaktır.

Nuran Güzel

2) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini elde ediniz ve serinin yakınsaklık aralığını belirleyiniz.

$$f(x) = \ln\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \ln\sqrt{1+x} - \ln\sqrt{1-x}$$

$$= \ln(1+x)^{1/2} - \ln(1-x)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\underset{(1-x)}{\frac{1}{1+x}} + \underset{(1+x)}{\frac{1}{1-x}}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{1-x^2}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

$|x| < 1$ için

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ serisinde $x = t^2$ alalım. Bu halde,

$|t| < 1$ için

$$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + (t^2)^2 + (t^2)^3 + \cdots = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + \cdots + t^{2n} + \cdots$$

olup

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \Big|_0^x$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ dir.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n+1}}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3} = x^2 < 1$$

$|x| < 1$

$-1 < x < 1$

$x = 1$ için $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ serisi $\sum \frac{1}{n}$ serisi ile aynı karakterdedir

dolayısıyla ıraksaktır.

$x = -1$ için $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$ alterne serisi yakınsaktır. Mutlak

yak. olmadığından şartlı yakınsaktır. Yakınsaklık aralığı

$-1 \le x < 1$ dir.

3) $f(x) = e^{x} - e^{-x}$ fonksiyonu veriliyor.

a) $f(0.3)$ değerini, fonksiyonun 3. mertebeden (3. mertebe dahil) Maclaurin formülünü kullanarak yaklaşık olarak hesaplayınız.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ limitini, fonksiyonun <u>Maclaurin formülünü kullanarak</u> hesaplayınız.

a) $$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right)$$

$$= 2x + \frac{2x^3}{3!}$$

$$f(0.3) = 2(0.3) + \frac{(0.3)^3}{3} = 0.6 + 0.018 = 0.024$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \cdots}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 2 + \frac{2x^2}{3!} + \frac{2x^4}{5!} + \cdots$$

$$= 2$$