

KAYNAK: THOMAS CALCULUS C.1;HAZIRLAYAN NURAN GÜZEL ONLINE DERS NOTUDUR.

4.TÜREV UYGULAMALARI

4.1 BİR FONKSİYONUN EKSTREMUM DEĞERLERİNİN BULUNMASI

Burada, sürekli fonksiyonların ekstrem değerlerinin, türevlerinden faydalanarak nasıl bulunup tanımlanacağını inceleyeceğiz.

TANIM: MUTLAK MAKSİMUM VE MUTLAK MİNİMUM

f , tanım kümesi D olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$D\text{'deki her } x \text{ için} \quad f(x) \leq f(c)$$

ise, f 'nin D üzerinde, c noktasında **bir mutlak maksimum** değeri,

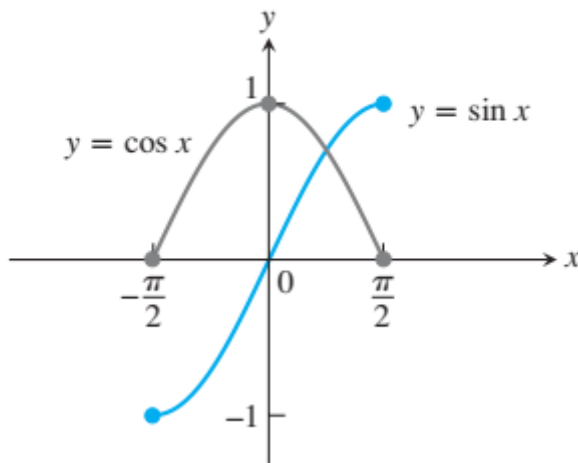
$$D\text{'deki her } x \text{ için} \quad f(x) \geq f(c)$$

ise, f 'nin D üzerinde, c noktasında **bir mutlak minimum** değeri vardır.

Mutlak maksimum ve minimum değerlere mutlak ekstremum denir. Mutlak ekstremlere yerel ekstremlerden ayırt etmek için, global ekstrem de denir.

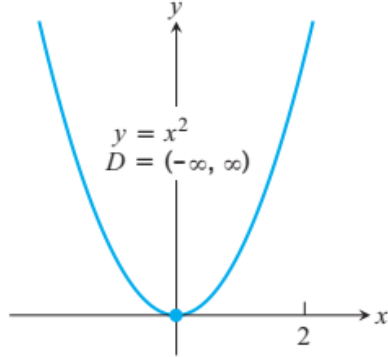
ÖRNEK

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu maksimum değeri 1 dir. ve minimum değer olarak 0 değerini (2 kere) alır. Aynı aralıkta $g(x) = \sin x$ fonksiyonu ise maksimum değer olarak 1, minimum değer olarak -1 değerini alır.

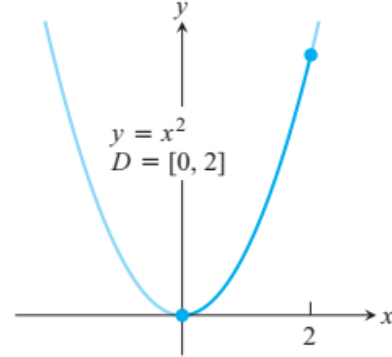


ÖRNEK

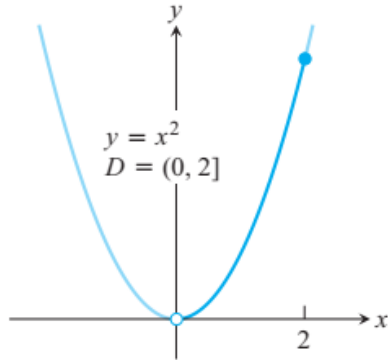
Aşağıdaki fonksiyonları verilen tanım kümeleri üzerinde mutlak ekstremlerini inceleyelim.



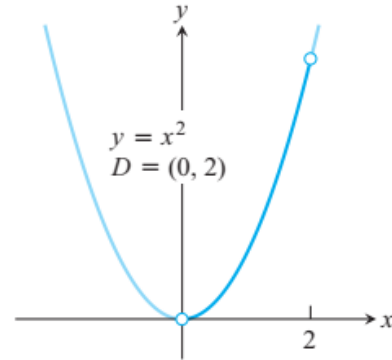
(a) yalnız mutlak min.



(b) mutlak maks. ve min.



(c) yalnız mutlak maks.



(d) maks. veya min. yok.

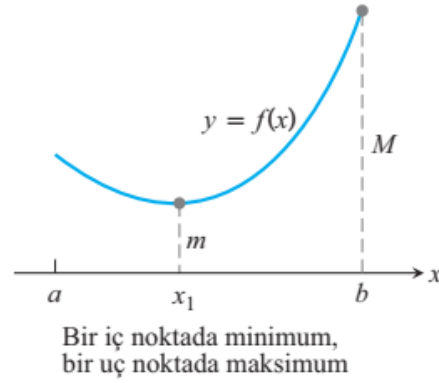
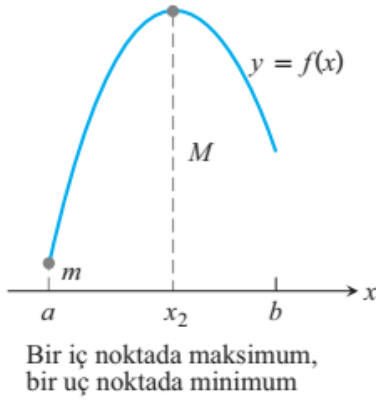
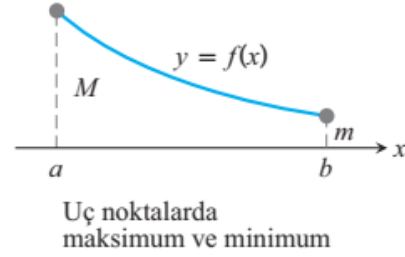
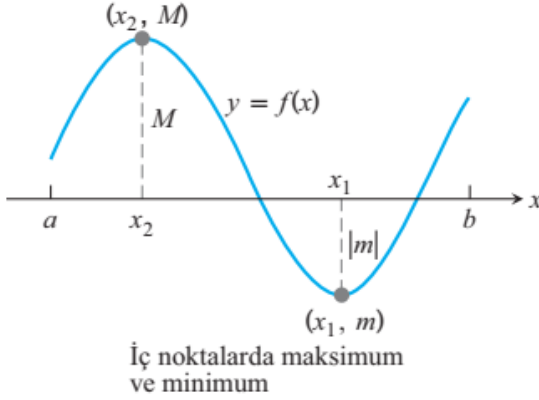
Fonksiyon kuralı	D Tanım kümesi	D 'deki mutlak ekstremler
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Mutlak maksimum yok. $x = 0$ 'da mutlak minimum 0.
(b) $y = x^2$	$[0, 2]$	$x = 2$ 'de mutlak maksimum 4 $x = 0$ 'da mutlak minimum 0
(c) $y = x^2$	$(0, 2]$	$x = 2$ 'de mutlak maksimum 4 Mutlak minimum yok.
(d) $y = x^2$	$(0, 2)$	Mutlak ekstrem yok.

TEOREM 1 Ekstrem Değer Teoremi

f , kapalı bir $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli ise, bir mutlak maksimum değer M 'ye ve bir mutlak minimum değeri m 'ye $[a, b]$ içinde erişir. Yani,

$[a, b]$ 'da, $f(x_1) = m$ ve $f(x_2) = M$ yapan x_1 ve x_2 sayıları vardır ve $[a, b]$ 'daki diğer her bir x için $f(x_1) = m \leq f(x) \leq f(x_2) = M$ dir.

Kapalı bir $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyonun olası mutlak maksimum ve minimumlarını grafik üzerinden inceleyelim.

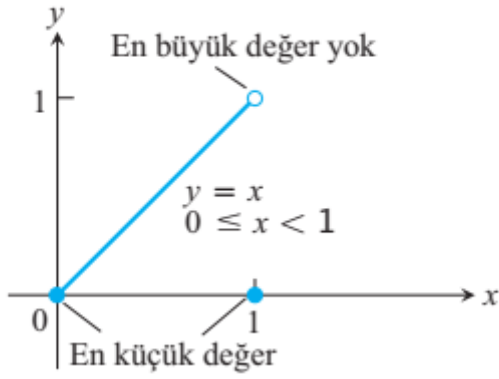


Teorem 1'deki, aralığın kapalı ve sonlu olması ve fonksiyonun sürekli olması koşulları olmadan da, teoremin sonuçlarının geçerli olması gerekmez.

Örnek 1, aralığın hem sonlu ve hem de kapalı olmaması durumunda bir mutlak ekstrem değer bulunmayabileceğini göstermektedir. Süreklilik şartının ihmal edilemeyeceğini göstermektedir.

Örneğin

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

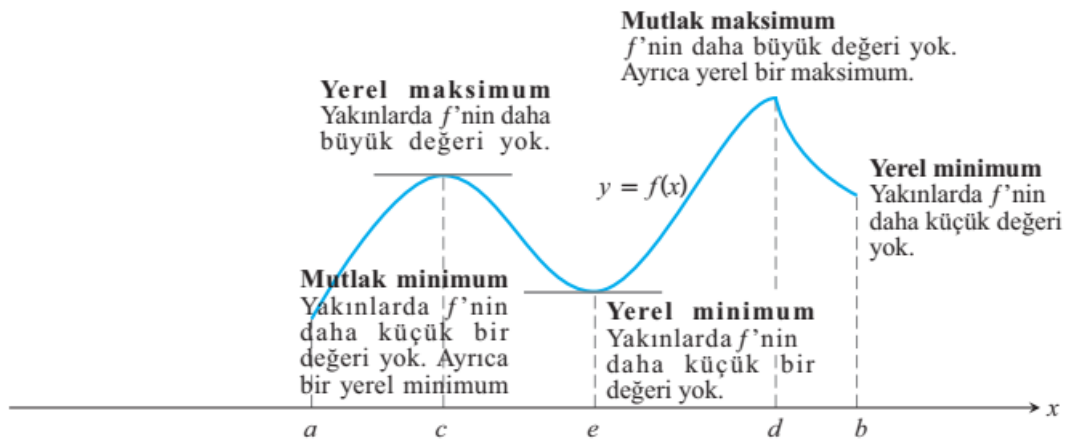


Süreksizliğin tek bir noktada olması bile, bir fonksiyonun bir minimumunun veya maksimumunun olmasını engelleyebilir. fonksiyonu $[0, 1]$ aralığının $x = 1$ dışındaki her noktasında sürekli, ama $[0, 1]$ aralığındaki grafiğinin en yüksek bir noktası yoktur. Yani mutlak maksimum noktası mevcut değildir sadece $x=0$ da mutlak minimum değeri vardır.

TANIMLAR Yerel Maksimum ve Yerel Minimum

Bir f fonksiyonunun, tanım aralığının bir c iç noktasında, c 'yi içeren bir açık aralıktaki her x için $f(x) \leq f(c)$ ise, bir yerel maksimum değeri vardır. Bir f fonksiyonunun, tanım aralığının bir c iç noktasında, c 'yi içeren bir açık aralıktaki her x için $f(x) \geq f(c)$ ise, bir yerel minimumu vardır.

Yerel (lokal) Ekstremum Değerler



Bir fonksiyonun, $[a, b]$ tanım aralığında beş noktada ekstremum değerleri olan grafiği görülmektedir. e noktasında fonksiyonun değerinin, *çevresinde*

bulunan her hangi bir noktada olduğundan, daha küçük olmasına rağmen, fonksiyonun mutlak minimumu a noktasındadır. Eğri, c civarında solda yükselir ve sağda düşer böylece $f(c)$ 'yi bir yerel maksimum yapar. Fonksiyon mutlak maksimum değerini d noktasında alır.

f 'nin c uç noktasında bir yerel minimumunu veya yerel maksimumunu tanımlayarak, yerel ekstremum tanımını aralıkların uç noktalarını da kapsayacak şekilde genişletebiliriz. Şekil de, f fonksiyonunun c ve d noktalarında yerel maksimumları, a , e ve b noktalarında ise yerel minimumları vardır. Yerel ekstremumlara göreceli ekstremumlar da denir. Bir mutlak maksimum aynı zamanda bir yerel maksimumdur. Her yerdeki en büyük değer dir.. Yani, bütün yerel maksimumların kümesi aynı zamanda, varsa, mutlak maksimumu da içerecektir. Benzer şekilde, bütün yerel minimumların kümesi aynı zamanda, varsa, mutlak minimumu da içerecektir.

TEOREM 2 Yerel Ekstrem Değerler için Birinci Türev Teoremi
Tanım aralığının bir c iç noktasında, f 'nin bir yerel maksimum veya minimumu varsa c noktasında $f(c)$ tanımlıysa $f'(c)=0$ dir.

Teorem 2, bir fonksiyonun, bir yerel ekstremum değerinin bulunduğu ve türevinin tanımlı olduğu bir iç noktada, birinci türevinin sıfır olduğunu söyler. Dolayısıyla, bir f fonksiyonunun bir ekstremum değerinin (yerel veya mutlak) bulunabileceği yerler ;

1. $f' = 0$ olduğu iç noktalar,
 2. f' 'nün tanımlı olmadığı iç noktalar,
 3. f in tanım kümesinin uç noktaları
- dir.

TANIM Kritik Nokta

Bir f fonksiyonunun tanım kümesinin, f' 'nün sıfır veya tanımsız olduğu bir iç noktaya f' nin bir **kritik** noktası denir.

bir fonksiyonun ekstrem değerler alabileceği noktalar sadece tanım kümesinin kritik noktaları ve uç noktalarıdır

Ekstremum noktaları bulma nedenlerinin en başında kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun mutlak ekstremlerini bulmak gelir. Teorem 1 böyle değerlerin var olduğunu söyler; Teorem 2 ise bunların ancak kritik ve uç noktalarda bulunabileceğini belirtir.

Kapalı Sonlu Bir Aralıkta Sürekli Bir f Fonksiyonunun Mutlak Ekstremleri Nasıl Bulunur?

1. Bütün kritik ve uç noktalarda f' 'yi hesaplanır.
2. Bu değerlerin en büyüğünü ve en küçüğünü alınır.

ÖRNEK

$f(x) = x^2$ 'nin $[-2, 1]$ aralığında mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.

Fonksiyon tanım kümesinin tamamında türevlenebilirdir, dolayısıyla tek kritik nokta olduğu $f'(x) = 2x = 0$ dan $x = 0$ noktasıdır. $x = 0$ ve $x = -2$ ile $x = 1$ uç noktalarında fonksiyonun değerlerini kontrol etmemiz gerekir.

Kritik nokta $x = 0$ $f(0) = 0$

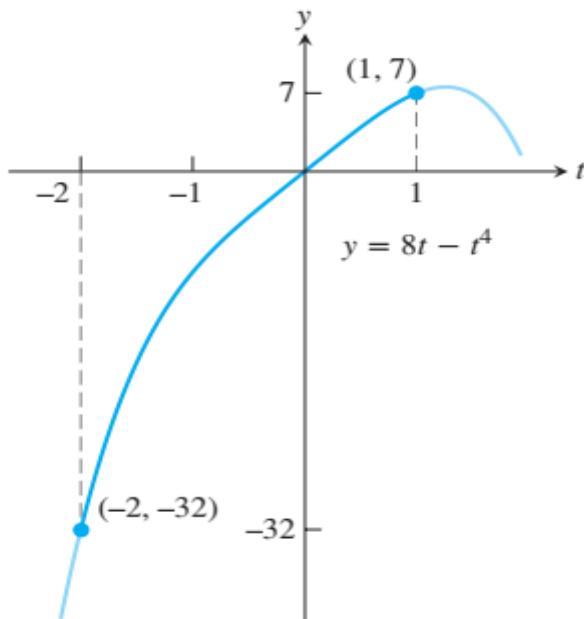
Uç nokta $x = -2$ $f(-2) = 4$
 $x = 1$ $f(1) = 1$

Fonksiyonun $x = -2$ 'de değeri 4 olan bir mutlak maksimumu ve $x = 0$ 'da değeri 0 olan bir mutlak minimumu vardır

ÖRNEK

$g(t) = 8t - t^4$ 'ün $[-2, 1]$ aralığında mutlak ekstremlerini bulun.

$g'(t) = 8 - 4t^3 = 0 \Rightarrow t = (2)^{\frac{1}{3}} \notin [-2, 1]$ dir. Uç noktaları inceleyelim. $g(-2) = -32$ mutlak max ; $g(1) = 7$ mutlak min



ÖRNEK

$f(x) = x^{2/3}$ 'ün $[-2, 3]$ aralığında mutlak ekstremlerini bulun.

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Birinci türevinin sıfırları yoktur, fakat $x = 0$ 'da tanımsızdır. f 'nin bu kritik noktadaki ve uç noktalarındaki değerleri;

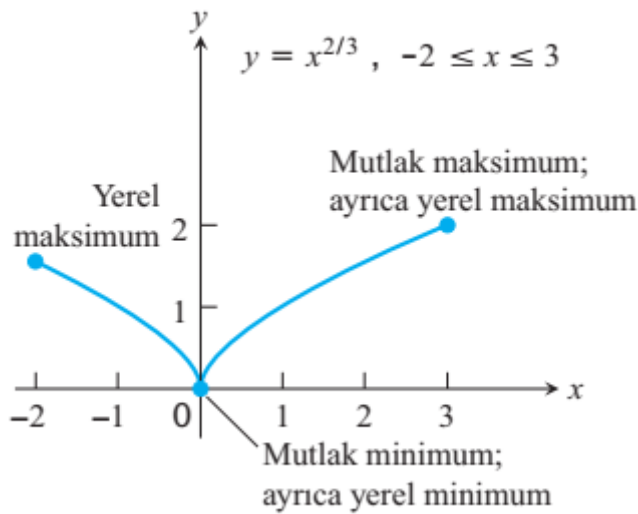
Kritik nokta değeri: $f(0) = 0$

Uç nokta değerleri: $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$

$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}$.

mutlak maksimum değer, sağ uç nokta $x = 3$ 'te bulunan $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$

Mutlak minimum değeri ise $x = 0$ iç noktasında bulunan 0

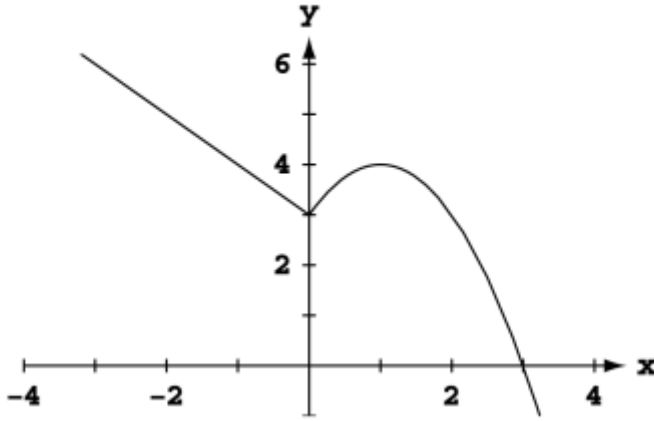


ÖRNEK

$$y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

her kritik noktada türevi bulun ve yerel ekstremum değerleri belirleyin.

$$y' = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$$



crit. pt.	derivative	extremum	value
$x = 0$	undefined	local min	3
$x = 1$	0	local max	4

ÖRNEK

$$y = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}, & x \leq 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$$

her kritik noktada türevi bulun ve yerel ekstremum değerleri belirleyin.

$x=1$ de $f'(1)$ olup olmadığına bakmalıyız.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad x < 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8, \quad x > 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} f'(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} f'(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1 \text{ olduğundan}$$

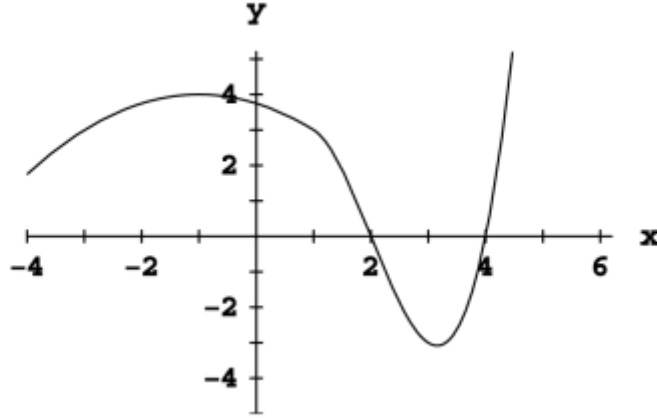
$$f'(1) = -1$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & x \leq 1 \\ 3x^2 - 12x + 8, & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0, \quad x = -1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8 = 0, \quad x = \frac{12 \mp \sqrt{144 - 4(3)8}}{2(3)} = 2 \mp \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$x \approx 0.845 < 1 \quad x \approx 3.155$$



crit. pt.	derivative	extremum	value
$x = -1$	0	local max	4
$x \approx 3.155$	0	local min	≈ -3.079

ÖRNEK

$$f(x) = (x - 2)^{2/3} \text{ olsun.}$$

- $f'(2)$ var mıdır?
- f' 'nin tek yerel ekstremum değerinin $x = 2$ de olduğunu gösterin.
- (b) deki sonuç Ekstreum Değer Teoremi ile çelişir mi?
- (a) ve (b) yi, 2'yi a ile değiştirerek $f(x) = (x - a)^{2/3}$ için tekrarlayın.

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x - 2)^{-1/3}$$

- Türev $x=2$ de tanımsızdır.
- Türev $x \neq 2$ değerleri için tanımlı ve sıfırdan farklıdır. Hatta $x \neq 2$ için $f(x) > 0$ ve $f(2) = 0$ dır.
- Çelişmez. $f(x)$ mutlak(global) maximuma sahip değildir. Tanım kümesi tüm reel sayılardır. $[a, b]$ formunda bir kapalı aralık kısıtlaması yoktur. Bu yüzden uç noktalarda maximum yada minimum değer almayacaktır.
- $x=2$ yerine a alarak işlemleri aynen tekrarlayabiliriz.

NOT:

Birinci Türev Testi, türevlenebilir bir fonksiyonun bir kritik noktasında bir yerel minimum veya bir yerel maksimum değer olup olmadığını, veya burada grafiğin artmaya veya azalmaya devam ettiğini söyler. türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğinin nasıl büküldüğü veya döndüğü hakkında, ikinci türev bilgi verir.

TANIM Yukarıya Konkav, Aşağıya Konkav

Türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği,

- (a) bir I açık aralığı üzerinde, f' I üzerinde artan ise, **yukarıya konkav**,
- (b) bir I açık aralığı üzerinde, f' I üzerinde azalan ise, **aşağıya konkav**,
dır.

$y = f(x)$ 'in ikinci türevi varsa, Ortalama Değer Teoreminin üçüncü sonucunu uygulayarak $f'' > 0$ ise I üzerinde f' 'nin arttığı, $f'' < 0$ ise f' 'nin azaldığı sonucunu çıkarırız.

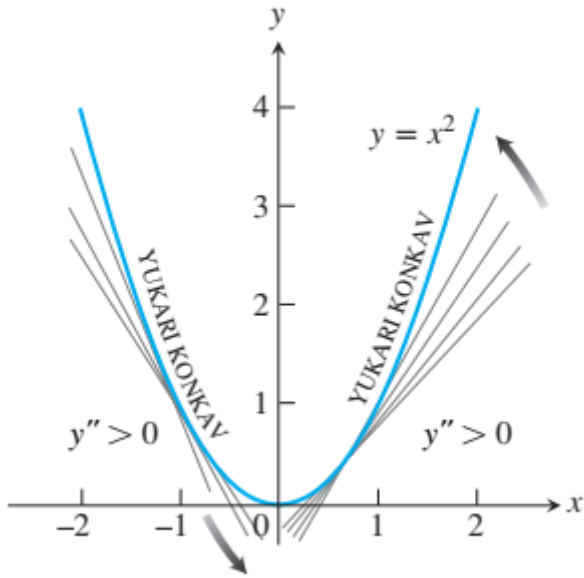
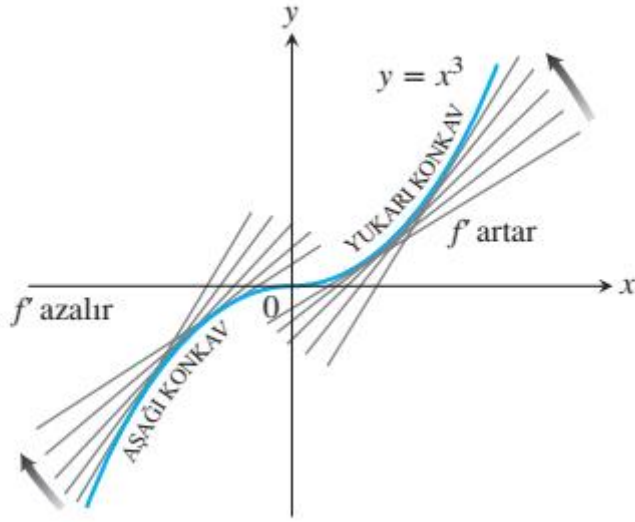
Konkavlık İçin İkinci Türev Testi

$y = f(x)$ bir I aralığında iki kere türevlenebilir olsun.

1. I üzerinde $f'' > 0$ ise, f' 'nin I 'daki grafiği yukarı konkavdır.
2. I üzerinde $f'' < 0$ ise, f' 'nin I 'daki grafiği aşağı konkavdır.

ÖRNEK

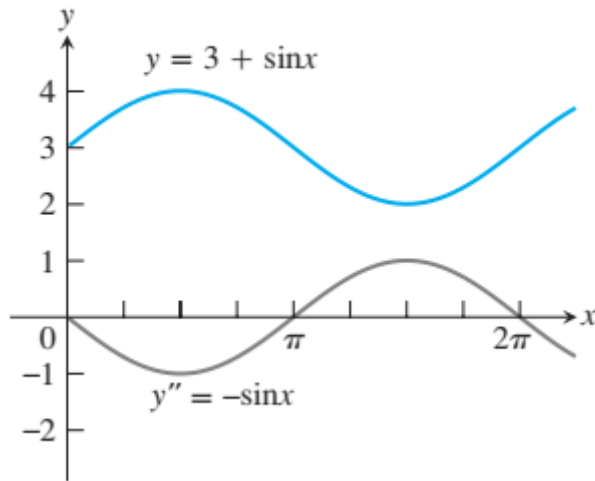
- (a) $y = x^3$ eğrisi (Şekil 4.25), $y'' = 6x < 0$ olduğu $(-\infty, 0)$ aralığında aşağı konkav, $y'' = 6x > 0$ olduğu $(0, \infty)$ aralığında ise yukarı konkavdır.
- (b) $y = x^2$ eğrisi (Şekil 4.26), $y'' = 0$ daima pozitif olduğundan, $(-\infty, \infty)$ üzerinde yukarı konkavdır. ■



ÖRNEK

$y = 3 + \sin x$ 'in $[0, 2\pi)$ üzerindeki konkavlığını belirleyin.

Çözüm $y = 3 + \sin x$ 'in grafiği, $y'' = -\sin x$ 'in negatif olduğu $(0, \pi)$ aralığında aşağıya konkav, $y'' = -\sin x$ 'in pozitif olduğu $(\pi, 2\pi)$ aralığında yukarıya konkavdır (Şekil



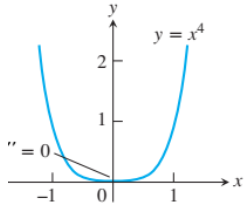
Büküm Noktaları

Örnek 2'deki $y = 3 + \sin x$ eğrisinin konkavlığı $(\pi, 3)$ noktasında değişir. $(\pi, 3)$ noktasına eğrinin bir *büküm (dönüm) noktası* denir.

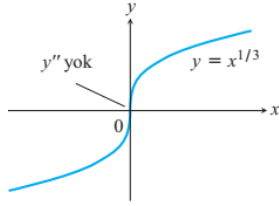
TANIM Büküm Noktası

Bir fonksiyonun teğetinin bulunduğu ve konkavlığın değiştiği noktaya **büküm noktası** denir.

Bir eğri üzerinde, bir noktanın bir tarafında y'' pozitif diğer tarafında negatif ise bu nokta eğrinin bir büküm noktasıdır. Böyle bir noktada, y'' ya sıfır (çünkü türevlerin de ara değer özelliği vardır) ya da tanımsızdır. y iki kere türevlenebilen bir fonksiyonun bir büküm noktasında $y'' = 0$ 'dır ve y' 'nin bir yerel maksimum veya minimum değeri vardır.



EKİL 4.28 $y = x^4$ 'ün grafiğinin, $y'' = 0$ olmasına rağmen, orijine büküm noktası yoktur (Örnek 3).



EKİL 4.29 y'' 'nin bulunmadığı bir noktada büküm noktası olabilir (Örnek 4).

ÖRNEK 3 $y'' = 0$ Olduğu Bir Noktada Büküm Noktası Bulunmayabilir

$y = x^4$ eğrisinin $x = 0$ 'da büküm noktası yoktur (Şekil 4.28). O noktada $y'' = 12x^2$ sıfır olduğu halde, işaret değiştirmez. ■

ÖRNEK 4 y'' 'nin Bulunmadığı Bir Noktada Büküm Noktası Bulunabilir

$y = x^{1/3}$ eğrisinin $x = 0$ 'da bir büküm noktası vardır (Şekil 4.29), fakat o noktada y'' yoktur.

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2} (x^{1/3}) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^{-2/3} \right) = -\frac{2}{9} x^{-5/3}.$$

Örnek 3'ten, ikinci türevin sıfır olduğu bir noktada her zaman bir büküm noktasının bulunmayabileceğini gördük. Örnek 4'ten, ikinci türevin bulunmadığı noktalarda da büküm noktalarının bulunabileceğini gördük.

Bir doğru üzerinde, zamanın bir fonksiyonu olarak hareket eden bir cismin hareketini incelemek için, genellikle cismin, ikinci türevle verilen, ivmesinin nerede pozitif ve nerede negatif olduğunu bilmekle ilgileniriz. Cismin konum fonksiyonunun grafiği üzerindeki büküm noktaları, ivmenin işaret değiştirdiği noktaları gösterir.

ÖRNEK 5 Bir Doğru Boyunca Hareketi İncelemek

Bir parçacık, yatay bir doğru üzerinde

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \quad t \geq 0$$

konum fonksiyonu ile hareket etmektedir. Hızı ve ivmeyi bulun ve parçacığın hareketini tanımlayın.

Çözüm Hız,

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t-1)(3t-11)$$

ve ivme

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7)$$

dir. $s(t)$ fonksiyonu artarken, parçacık sağa doğru gider; $s(t)$ azalırken, parçacık sola doğru gider.

$t = 1$ ve $t = 11/3$ iken birinci türev'in ($v = s'$) sıfır olduğuna dikkat edin.

Aralıklar	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
$v = s'$ 'ün işareti	+	-	+
s 'nin davranışı	artan	azalan	artan
Parçacığın hareketi	sağa	sola	sağa

Parçacık, $[0, 1)$ ve $(11/3, \infty)$ zaman aralıklarında sağa, $(1, 11/3)$ aralığında sola gider. $t = 1$ ve $t = 11/3$ te, bir an için durağandır.

$t = 7/3$ iken, $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ ivmesi sıfırdır.

Aralıklar	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
$a = s''$ 'nin işareti	-	+
s 'nin grafiği	aşağı konkav	yukarıya konkav

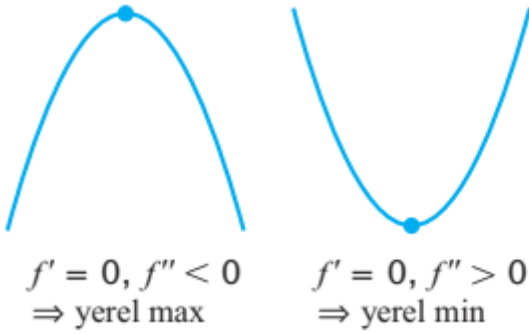
Yerel Ekstremum Değerler İçin İkinci Türev Testi

Bir kritik noktada f' 'nin işaret değişikliklerine bakmak yerine, bazen bir yerel ekstremum değer varlığını ve karakterini belirlemede aşağıdaki testi kullanabiliriz.

TEOREM 5 Yerel Ekstremum Değerler İçin İkinci Türev Testi

f'' 'nin $x = c$ 'yi içeren bir açık aralıkta sürekli olduğunu varsayın.

1. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) < 0$ ise, f 'nin $x = c$ 'de bir yerel maksimumu vardır.
2. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$ ise, f 'nin $x = c$ 'de bir yerel minimumu vardır.
3. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) = 0$ ise, test sonuç vermez. Fonksiyonun bir yerel maksimumu, bir yerel minimumu bulunabilir veya hiçbiri bulunmayabilir.



ÖRNEK 6 f 'nin Grafiğini Çizmek İçin f' ve f'' 'nü Kullanmak

Aşağıdaki adımları kullanarak

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

fonksiyonunun bir grafiğini çizin.

- (a) f 'nin ekstremumlarının nerelerde olduklarını belirleyin.
- (b) f 'nin artan olduğu aralıkları ve azalan olduğu aralıkları bulun.
- (c) f 'nin grafiğinin nerede yukarıya konkav ve nerede aşağıya konkav olduğunu bulun.
- (d) f 'nin grafiğinin genel bir şeklini çizin
- (e) Yerel maksimum ve minimum noktalar, büküm noktaları ve eğrinin eksenleri kestiği noktalar gibi özel bazı noktaları işaretleyin.

Çözüm $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ var olduğundan f süreklidir. f 'nin tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ 'dur, ayrıca f'' 'nin tanım kümesi de $(-\infty, \infty)$ dur. Böylece, f 'nin kritik noktaları sadece f' 'nin sıfırlarında görülür.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

olduğundan, birinci türev $x = 0$ ve $x = 3$ 'te sıfırdır.

Aralıklar	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
f' 'nin işareti	-	-	+
f 'nin davranışı	azalan	azalan	artan

- (a) Yerel ekstremumlar için Birinci Türev Testini ve yukarıdaki tabloyu kullanarak, $x = 0$ 'da bir yerel ekstremum bulunmadığını ve $x = 3$ 'te bir yerel minimum bulunduğunu görürüz.
- (b) Yukarıdaki tabloyu kullanarak, f 'nin, $(-\infty, 0]$ ve $[0, 3]$ üzerinde azalan ve $[3, \infty)$ üzerinde artan olduğunu görürüz.
- (c) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$, $x = 0$ ve $x = 2$ 'de sıfırdır.

Aralıklar	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
f'' 'nin işareti	+	-	+
f 'nin davranışı	yukarıya konkav	aşağıya konkav	yukarıya konkav

f 'nin, $(-\infty, 0)$ ve $(2, \infty)$ aralıklarında yukarıya konkav, $(0, 2)$ aralığında aşağıya konkav olduğunu görürüz.

- (d) Yukarıda iki tablodaki bilgileri özetleyerek şunları elde ederiz;

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
azalan	azalan	azalan	artan
yukarıya konkav	aşağıya konkav	yukarıya konkav	yukarıya konkav

Eğrinin genel şekli şöyledir;

