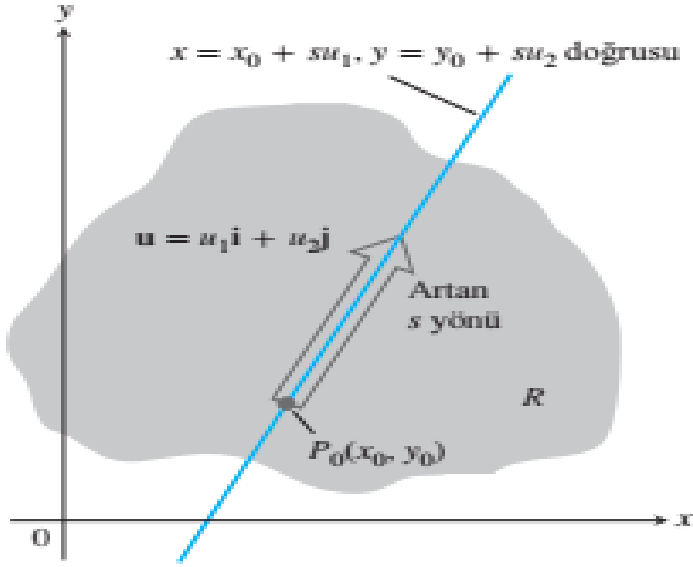


Doğrultu Türevleri ve Gradyent Vektörler

$f(x, y)$ diferansiyellenebilir ise diferansiyellenebilir bir $x = g(t), y = h(t)$ eğrisi üzerinde $f(x, y)$ nin t 'ye göre değişim oranı mevcuttur. Herhangi bir $P_0(x_0, y_0) = P_0(g(t_0), h(t_0))$ noktasında, $\frac{df}{dt}$ $f(x, y)$ nin artan t 'ye göre değişim oranını verir dolayısıyla, değişim oranı, eğri boyunca hareket yönüne bağlıdır. Eğri, bir doğru ise ve t de doğru boyunca verilen bir $\mathbf{u}$ birim vektörü yönünde P_0 'dan ölçülen yay uzunluğu parametresiyse, $\frac{df}{dt}$, tanım kümesi içinde $\mathbf{u}$ yönünde uzaklığa göre $f(x, y)$ 'nin değişim oranı nı verir. $\mathbf{u}$ 'yu değiştirerek, P_0 'dan farklı yönlerde geçen ve f 'nin uzaklığa göre değişim oranları bulunur.

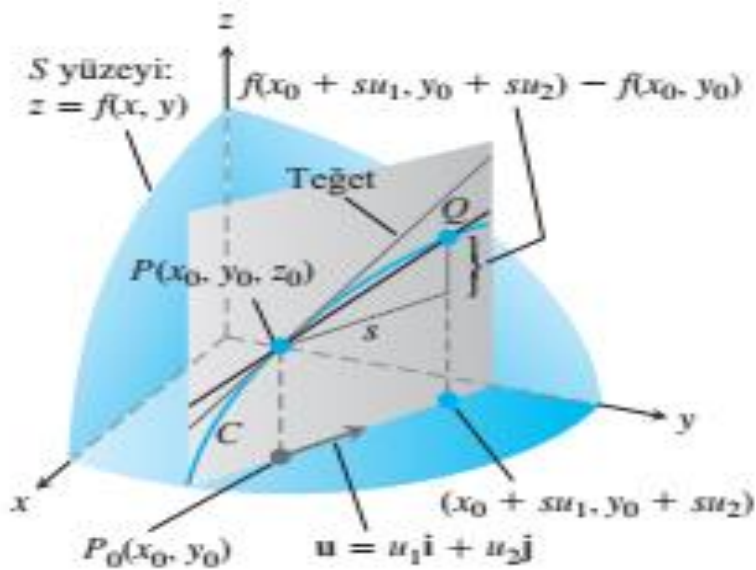
$f(x, y)$ fonksiyonunun xy -düzlemindeki bir R bölgesinde tanımlı, $P_0(x_0, y_0)$ 'noktası da R tanım bölgesinde bir nokta ve $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ ' bir birim vektör olsun. Bu durumda, $P_0(x_0, y_0)$ 'dan gecen $\mathbf{u}$ 'ya paralel olan doğrunun parametrik denklemi $x = x_0 + su_1, y = y_0 + su_2$ verilecektir. s parametresi P_0 'dan $\mathbf{u}$ yönündeki yay uzunluğunu ölçüyorsa, f 'nin $\frac{df}{ds}$ yi P_0 'da hesaplayarak P_0 'da $\mathbf{u}$ yönündeki $f(x, y)$ değişim oranını buluruz.



TANIM: (DOĞRULTU TÜREV) $f(x, y)$ fonksiyonunun $P(x_0, y_0)$ da $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$ birim vektörü yönündeki doğrultu türevi limitin var olması koşuluyla,

$$\left(\frac{df}{ds} \right)_{\vec{u}, P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u_1 s, y_0 + u_2 s) - f(x_0, y_0)}{s} = (D_{\vec{u}} f)_{P_0} \text{ değeridir.}$$

DOĞRULTU TÜREVİN YORUMU



$z = f(x, y)$ denklemi uzayda bir S yüzeyini gösterir. $z_0 = f(x_0, y_0)$ ise, $P(x_0, y_0, z_0)$ noktası S ' yüzeyinin üzerinde bir noktadır. $P(x, y)$ 'den ve $P(x_0, y_0)$ dan geçen $\mathbf{u}$ birim vektörüne paralel olarak geçen dikey düzlem S yüzeyini bir C eğrisiyle keser. f 'nin $\vec{u}$ yönündeki değişim oranı C eğrisinin P 'noktasındaki teğetin eğimidir.

$f(x, y)$ fonksiyonunun $P(x_0, y_0)$ da, $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ birim vektörü yönündeki doğrultu türevi:

$$x = x_0 + su_1, y = y_0 + su_2$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0} = (D_u f)_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \frac{dy}{ds}$$

$u_1 \qquad u_2$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0} = (D_u f)_{P_0} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \vec{j} \right] \left[\frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} \right]$$

$u_1 \qquad u_2$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0} = (D_u f)_{P_0} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \vec{j} \right]}_{P_0 \text{ da } f \text{ in } \text{gradyeni} = (\nabla f)_{P_0}} \left[\underbrace{u_1\vec{i} + u_2\vec{j}}_{\vec{u} \text{ yönü}} \right]$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0} = (D_u f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \vec{u}$$

 hesaplanır.

Bu ifadeye, $f(x, y)$ yüzeyinin $P(x_0, y_0)$ noktasındaki, $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ birim vektörü yönündeki doğrultu türevi(yönlü türev) denir. Yönlü türev $f(x, y)$ yüzeyine, üzerindeki $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ noktasından $\vec{u}$ doğrultusunda çizilen teğetin eğimini verir.

Doğrultu Türevinin Özellikleri

$$\left(\frac{df}{ds} \right)_{\vec{u}, P_0} = (D_u f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u} \text{ olduğuna göre } (\nabla f)_{P_0} \text{ ile } \vec{u}$$

birim vektörün skaler çarpımıdır. O halde

$$\left(\frac{df}{ds} \right)_{\vec{u}, P_0} = (D_u f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u} = |(\nabla f)_{P_0}| |\vec{u}| \cos \theta = |(\nabla f)_{P_0}| \cos \theta$$

1. f fonksiyonu en fazla $\cos \theta = 1$ iken veya $\mathbf{u}$, ∇f 'nin yönünde iken yönlü türev maximum değeri alır Yani, tanım kümesindeki her P noktasında, f , P 'deki ∇f gradiyent vektörünün yönünde en hızlı şekilde artar. Yönlü türev: $(D_u f)_P = |(\nabla f)_P| \cos 0 = |(\nabla f)_P|$

2. Aynı şekilde, f en hızlı $-\nabla f$ yönünde azalır. Bu yöndeki türev $(D_u f)_P = |(\nabla f)_P| \cos \pi = -|(\nabla f)_P|$, dir.

3. $(\nabla f)_P \neq 0$ Gradiyentine ortogonal herhangi bir $\mathbf{u}$ yönü f 'de sıfır değişim yönüdür, çünkü bu durumda $\theta = \frac{\pi}{2}$ olur ve

$$(D_u f)_P = |(\nabla f)_P| \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ bulunur.}$$

KAYNAK :Thomas Calculus Edition 11

Seviye Eğrilerinin Gradyentleri ve Teğetleri

Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun düzgün bir

$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ eğrisi üzerinde sabit bir c değeri yani eğri f 'nin bir seviye eğrisi ise $f(x(t), y(t)) = c$ olur. Bu denklemin iki tarafının da t 'ye göre türevini alarak,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$$

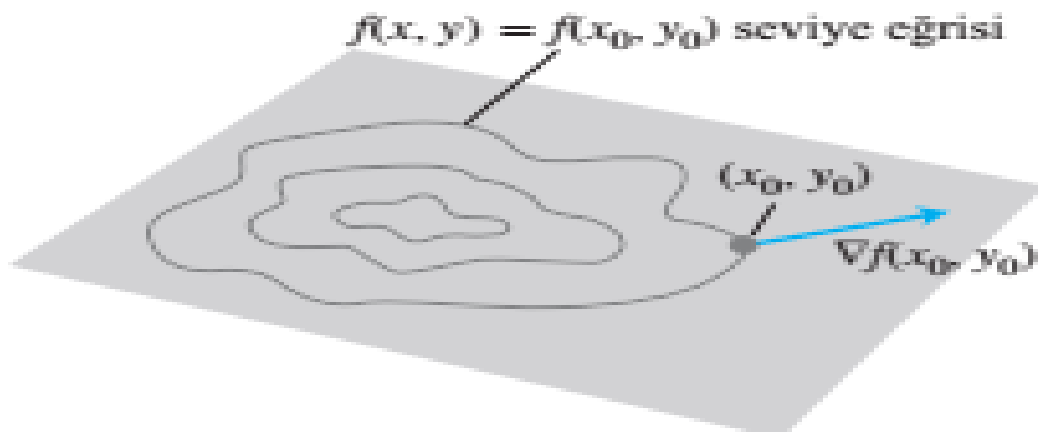
$$\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}}_{\nabla f} \right) \left(\underbrace{\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}}_{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \right) = 0$$

$$\nabla f \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 0$$

Gradyen f vektörünün teğet vektörü $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ ye dik olması demektir.

∇f 'nin teğet vektör $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ 'ye normal olduğunu söyler, dolayısıyla eğriye normaldir.

Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım kümesindeki her (x_0, y_0) noktasında f 'nin gradiyenti, (x_0, y_0) noktasından geçen seviye eğrisine normaldir.



Bu bilgiden faydalanarak, seviye eğrilerinin teğetlerini bulabiliriz.

(x_0, y_0) noktasından geçen $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$ vektörüne normal olan doğrunun denklemi (teğet doğrusunun denklemi)

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$\vec{N} = (\nabla f)_P \Rightarrow f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

ÖRNEK

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

elipsinin $(-2, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulun

Elips,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

Fonksiyonun $c=2$ olan seviye eğrisidir. Bu yüzeyin $(-2, 1)$ noktasındaki gradyeni

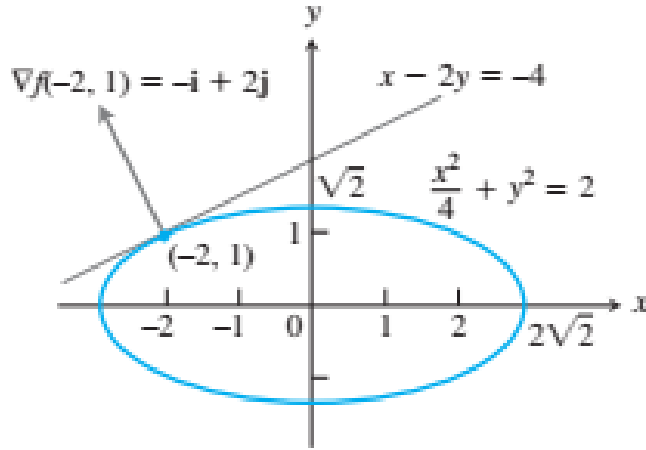
$$\nabla f|_{(-2,1)} = \left(\frac{x}{2}\vec{i} + 2y\vec{j} \right)_{(-2,1)} = -\vec{i} + 2\vec{j}$$

olup, verilen noktadaki normaldir.

Teğet doğrusu

$$(-1)(x + 2) + (2)(y - 1) = 0$$

$$x - 2y = -4.$$



Gradyentlerin Cebir Kuralları

1. *Sabit Çarpım Kuralı:* $\nabla(kf) = k\nabla f$ (k herhangi bir sayı)
2. *Toplam Kuralı:* $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
3. *Fark Kuralı:* $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$
4. *Çarpım Kuralı:* $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
5. *Bölüm Kuralı:* $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

Üç bağımsız değişkenli fonksiyonlarda

Diferansiyellenebilir bir $f(x, y, z)$ fonksiyonu ve uzayda bir $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ birim vektörü için,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

ve

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3.$$

ÖRNEK: $f(x, y, z) = \cos(xy) + e^{yz} + \ln(zx)$ fonksiyonunun

a) $P_0(1, 0, 1/2)$ noktasında $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ doğrultu türevini bulunuz.

b) f , $P_0(1, 0, 1/2)$ da en çok hangi yönlerde değişir değişim oranı nedir?

$$|\vec{A}| = \sqrt{1+4+4} = 3, \quad \text{birim vektörü } \vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$f(x, y, z) = \cos(xy) + e^{yz} + \ln(zx)$$

$$f_x = -y \sin(xy) + \frac{z}{zx} \Big|_{P_0} = 1 \quad f_y = -x \sin(xy) + z e^{yz} \Big|_{P_0} = \frac{1}{2}$$

$$f_y = y e^{yz} + \frac{x}{zx} \Big|_{P_0} = 2$$

$$(\nabla f)_{P_0} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$(D_u f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 2 = 2$$

Fonksiyon en hızlı $(\nabla f)_{P_0} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{k}$ yönünde artar.

$-(\nabla f)_{P_0} = -\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - 2\vec{k}$ en hızlı yönünde azalacaktır Değişim

oranları $|(\nabla f)_{P_0}| = \sqrt{\frac{21}{4}}$ ve $|-(\nabla f)_{P_0}| = \sqrt{\frac{21}{4}}$ dir.

ÖRNEK Hangi yönlerde $f(x,y)=xy$ fonk. $(2,0)$ noktasındaki yönlü türevi -1 olur?

$$\nabla f = y\vec{i} + x\vec{j} \Rightarrow \nabla f_{(2,0)} = 0\vec{i} + 2\vec{j} \quad \vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} \Rightarrow$$

$$|\vec{u}|=1 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 = 1$$

$$(D_{\vec{u}} f)_{(2,0)} = (\nabla f)_{(2,0)} \cdot \vec{u} = 2u_2 = -1 \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$u_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad P(2,0)da \quad \vec{u} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

hesaplanır.