

Ekstremum Değerler ve Eyer Noktaları

İki değişkenli sürekli fonksiyonlar, kapalı ve sınırlı tanım kümelerinde mutlak maksimum ve minimum değerlerini alırlar: İki değişkenli bir fonksiyonun ekstremum değerleri,

tanım kümesinin sınır noktalarında

birinci mertebeden kısmi türevlerin sıfır olduğu

birinci mertebeden kısmi türevlerden birinin yada ikisinin birden bulunmadığı iç noktalarında

bulunabilir. Bununla birlikte, bir (a, b) iç noktasında türevlerin bulunmaması veya sıfır olması bir ekstremum değer varlığını işaret etmez. Fonksiyonun grafiği olan yüzey, (a, b) noktasının üst tarafında bir eyer şeklinde olabilir ve burada teğet düzlemini kesebilir.

Yerel Ekstremum Değerler için Türev Testleri

İki değişkenli bir $f(x, y)$ fonksiyonu için, $z = f(x, y)$ yüzeyinin yatay bir teğet düzleminin bulunduğu noktaları ve bu noktalarda yerel maksimumları, yerel minimumları ve eyer noktalarını ararız.

TANIMLAR Yerel Maksimum, Yerel Minimum

$f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) noktasını içeren bir R bölgesinde tanımlanmış olsun.

1. Merkezi (a, b) 'de olan bir açık daire içindeki bütün (x, y) tanım kümesi noktaları için $f(a, b) \geq f(x, y)$ ise, $f(a, b)$ f 'nin bir yerel maksimumudur.

2. Merkezi (a, b) 'de olan bir açık daire içindeki bütün (x, y) tanım kümesi noktaları için $f(a, b) \leq f(x, y)$ ise, $f(a, b)$ f 'nin bir yerel minimumudur.

TEOREM Yerel Ekstremum Değerler için Birinci Türev Testi

$f(x, y)$ 'nin, tanım kümesinin bir (a, b) iç noktasında bir yerel maksimum veya

minimum değeri varsa ve o noktada birinci mertebe kısmi türevleri de varsa, $f_x(a, b) = 0$ ve $f_y(a, b) = 0$ dır

TANIM Kritik Nokta

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım kümesinin bir iç noktasında hem f_x hem de f_y sıfır ise veya f_x ve f_y 'den biri veya ikisi de yoksa bu nokta f 'nin bir kritik noktasıdır.

TANIM :Eyer Noktası

Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun bir kritik noktası (a, b) olsun. Merkezi (a, b) 'de olan her açık dairede hem $f(a, b) \leq f(x, y)$ olacak şekilde (x, y) tanım kümesi noktaları ve hem de $f(a, b) \geq f(x, y)$ olacak şekilde (x, y) tanım kümesi noktaları varsa (a, b) kritik noktası bir eyer noktası dır. $z = f(x, y)$ yüzeyinde buna karşılık gelen $(a, b, f(a, b))$ noktasına yüzeyin **eyer noktası** denir.

TEOREM Yerel Ekstrem Değerler için ikinci Türev Testi

(a, b) merkezli bir dairede $f(x, y)$ ile birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli ve $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ olsun. Bu durumda

- i. (a, b) 'de $f_{xx} < 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ise, f 'nin (a, b) 'de bir yerel maksimumu vardır.
- ii. (a, b) 'de $f_{xx} > 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ise, f 'nin (a, b) 'de bir yerel minimumu vardır.
- iii. (a, b) 'de $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ise, f 'nin (a, b) 'de bir eyer noktası vardır.
- iv. (a, b) 'de $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ise, test sonuç vermez. Bu durumda, f 'nin (a, b) 'deki davranışını belirlemek için başka bir yol gerekir.

ÖRNEK: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$ fonksiyonun bütün yerel maksimum , yerel minimum ve eyer noktalarını bulunuz.

$$f_x(x, y) = 2x + y + 3 = 0$$

$$f_y(x, y) = x + 2y - 3 = 0$$

$$x = -3, y = 3$$

Kritik nokta $(-3, 3)$ dır. $f_{xx}(-3, 3) = 2, f_{yy}(-3, 3) = 2, f_{xy}(-3, 3) = 1$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0$

$f_{xx}(-3, 3) = 2 > 0$ olduğundan $(-3, 3)$ noktası yerel minimum noktasıdır.

$$f(-3, 3) = -5$$

ÖRNEK $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$ fonksiyonun bütün yerel maksimum, yerel minimum ve eyer noktalarını bulunuz.

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = 0, y = 2$$

Kritik Noktalar $(0, 0), (0, 2), (-2, 0), (-2, 2)$

$(0, 0)$ için:

$$f_{xx}(0, 0) = 6x + 6|_{(0,0)} = 6, f_{yy}(0, 0) = 6y - 6|_{(0,0)} = -6,$$

$$f_{xy}(0, 0) = 0 \quad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = -36 < 0 \text{ ise eyer noktasıdır.}$$

$(0, 2)$ için:

$$f_{xx}(0, 2) = 6x + 6|_{(0,2)} = 6, f_{yy}(0, 2) = 6y - 6|_{(0,2)} = 6,$$

$$f_{xy}(0, 2) = 0 \quad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 36 > 0. \quad f_{xx}(0, 2) > 0 \quad (0, 2) \text{ yerel min}$$

Minimum değeri $f(0, 2) = -12$

$(-2, 0)$ için:

$$f_{xx}(-2, 0) = 6x + 6|_{(-2,0)} = -6, f_{yy}(-2, 0) = 6y - 6|_{(-2,0)} = -6,$$

$f_{xy}(-2,0)=0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 36 > 0$. $f_{xx}(-2,0) < 0$ $(-2,0)$ yerel max
max değeri $f(-2,0) = -4$

$(-2,2)$ için:

$$f_{xx}(-2,2) = 6x + 6 \Big|_{(-2,2)} = -6, f_{yy}(-2,2) = 6y - 6 \Big|_{(-2,2)} = 6,$$

$f_{xy}(-2,2)=0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = -36 < 0$. $f_{xx}(-2,2) < 0$ $(-2,2)$ eyer(saddle)
noktası

$f_x(x,y) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ or $x = -2$; $f_y(x,y) = 3y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = 0$ or $y = 2 \Rightarrow$ the critical points are $(0,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, and $(-2,2)$; for $(0,0)$: $f_{xx}(0,0) = 6x + 6 \Big|_{(0,0)} = 6$, $f_{yy}(0,0) = 6y - 6 \Big|_{(0,0)} = -6$,
 $f_{xy}(0,0) = 0 \Rightarrow f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -36 < 0 \Rightarrow$ saddle point; for $(0,2)$: $f_{xx}(0,2) = 6$, $f_{yy}(0,2) = 6$, $f_{xy}(0,2) = 0$
 $\Rightarrow f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36 > 0$ and $f_{xx} > 0 \Rightarrow$ local minimum of $f(0,2) = -12$; for $(-2,0)$: $f_{xx}(-2,0) = -6$,
 $f_{yy}(-2,0) = -6$, $f_{xy}(-2,0) = 0 \Rightarrow f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36 > 0$ and $f_{xx} < 0 \Rightarrow$ local maximum of $f(-2,0) = -4$;
for $(-2,2)$: $f_{xx}(-2,2) = -6$, $f_{yy}(-2,2) = 6$, $f_{xy}(-2,2) = 0 \Rightarrow f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -36 < 0 \Rightarrow$ saddle point

