1.8 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Soru 1. $(y")^{1/3}=k\left(1+(y')^2\right)^{5/2}$ diferansiyel denklemini sınıflandırınız.

Çözüm: Diferansiyel denklemin en yüksek mertebeli türevi $y"$'dür. Denklemin mertebesi 2 olur. Her bir terimin 6. kuvvetini alarak denklem

$$(y")^2=k^6\left(1+(y')^2\right)^{15}$$

haline gelir; en yüksek mertebeli $y"$ türevinin kuvveti 2 olur ki bu; denklemin derecesidir. O halde, bu diferansiyel denklem, 2. mertebe 2. dereceden, lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemdir.

Soru 2. $y=e^{2x}$ fonksiyonunun $y"+y'-6y=0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $y=e^{2x}$, $y'=2e^{2x}$, $y"=4e^{2x}\Rightarrow 4e^{2x}+2e^{2x}-6e^{2x}\equiv 0$.

Soru 3. $x^2+y^2=1$, $y'=-x/y$ diferansiyel denkleminin bir çözümü müdür?

Çözüm: $x^2+y^2=1\Rightarrow 2x+2yy'=0\Rightarrow y'=-\dfrac{x}{y}$

$$y'=-\frac{x}{y}\Rightarrow -\frac{x}{y}=-\frac{x}{y}$$

denklemi sağladığından çözümdür.

Soru 4. Genel çözümü $x\sin x+y\cos y=c$ olan diferansiyel denklemi, türev ve diferansiyel formlarında yazarak denklemi sınıflandırınız.

Çözüm: $x\sin x+y\cos y=c \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(x\sin y)+\dfrac{d}{dx}(y\cos x)=\dfrac{d}{dx}(c)$,

$$\sin y+xy'\cos y+y'\cos x-y\sin x=0,$$

$$y'(x\cos y+\cos x)=y\sin x-\sin y,$$

Diferansiyel formu: $(\sin y-y\sin x)dx+(x\cos y+\cos x)dy=0$.

Türev formu: $y'=\dfrac{y\sin x-\sin y}{x\cos y+\cos x}$.

Bu diferansiyel denklem 1. mertebe 1.derece diferansiyel denklemdir.

Soru 5. Genel çözümü $y=c_1x^2+c_2x+c_3$, $(c_1,c_2,c_3$ keyfi sabitler) olan fonksiyonun diferansiyel denklemini kurunuz ve sınıflandırınız.

Çözüm: $y=c_1x^2+c_2x+c_3$, $y'=2c_1x+c_2$, $y"=2c_1$, $y'''=0$ olduğuna göre $y'''=0$ aranılan diferansiyel denklemdir. Bu üçüncü mertebeden sabit katsayılı homojen lineer bir adi diferansiyel denklemdir.

Soru 6. $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ üç parametreli eğriler ailesinin $x^3y'''-3x^2y"+6xy'-6y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü olduğunu gösteriniz ve $y(2)=0$, $y'(2)=2$, $y"(2)=6$ koşulları altında diferansiyel denklemin çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y'=c_1+2c_2+3c_3x^2$, $y"=2c_2+6c_3x$, $y'''=6c_3$ türevleri verilen fonksiyonu denklemde yerine koyalım;

$$6x^3c_3-3x^2\left(2c_2+6c_3x\right)+6x\left(c_1+2c_2x+3c_3x^2\right)-6\left(c_1x+c_2x^2+c_3x^3\right)=0$$

$$\left(6x^3-18x^3+18x^3-6x^3\right)c_3+\left(-6x^2+12x^2-6x^2\right)c_2+\left(6x-6x\right)c_1=0$$

O halde , $0\equiv 0$ özdeşliği sağlandığından verilen 3 parametreli eğriler ailesi bir genel çözümdür.

$$\left.\begin{array}{lll} y(2)=0 & \Rightarrow & c_1+2c_2+4c_3=0 \\ y'(2)=2 & \Rightarrow & c_1+4c_2+12c_3=2 \\ y''(2)=6 & \Rightarrow & c_2+6c_3=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1=2 \\ c_2=-3 \\ c_3=1 \end{array}$$

olduğuna göre başlangıç-değer probleminin çözümü

$$y=2x-3x^2+x^3$$

olarak bulunur.

Soru 7. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-e^{-2x}-1=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1$ **başlangıç-değer problemlerini çözünüz.**

Çözüm: Türevi yalnız bırakalım,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=e^{-2x}+1 \Rightarrow \int d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\int\left(e^{-2x}+1\right)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=-\tfrac{1}{2}e^{-2x}+x+c_1 \Rightarrow \int dy=\int\left(-\tfrac{1}{2}e^{-2x}+x+c_1\right)dx$$

buradan genel çözüm

$$y=\tfrac{1}{4}e^{-2x}+\tfrac{1}{2}x^2+c_1x+c_2$$

olarak bulunur.

$$y(0)=1 \text{ için } \tfrac{1}{4}+c^2=1 \Rightarrow c_2=\tfrac{3}{4}$$

$$y'(0)=-1 \text{ için } -\tfrac{1}{2}+c_1=-1 \Rightarrow c_1=-\tfrac{1}{2}$$

sabitleri genel çözümde yerine yazılarak

$$y=\tfrac{1}{4}e^{-2x}+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{4}$$

özel çözümü bulunur.

Soru 8. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x^3+1=0;\ \ y(1)=\tfrac{1}{6},\ y'(1)=\tfrac{1}{2}$ **başlangıç-değer problemini çözünüz.**

Çözüm: Önce türev yalnız bırakılır, sonra ik kez integral alınarak

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x^3-1}{x^2} \quad \Rightarrow \int d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\int\frac{x^3-1}{x^2}dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}+c_1 \Rightarrow \int dy=\int\left(\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}+c_1\right)dx$$

$$y=\tfrac{1}{6}x^3+\ln|x|+c_1x+c_2$$

genel çözümü bulunur. Koşulları uygularsak

$$\left.\begin{array}{l} y(1)=\tfrac{1}{6} \text{ için } c_1+c_2=0 \\ y'(1)=\tfrac{1}{6} \text{ için } 1+c_1=0 \end{array}\right\} c_1=-1,\ c_2=1,$$

$$y=\tfrac{1}{6}x^3+\ln|x|-x+1$$

özel çözümünü buluruz.

Soru 9. $\frac{d^3y}{dx^3}=4x^3+1$; $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(1)=0$ sınır-değer problemini çözünüz.

Çözüm: $$\frac{d^3y}{dx^3}=4x^3+1 \Rightarrow \int d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\int(4x^3+1)dx \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=x^4+x+c_1,$$

$$\frac{dy}{dx}=\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{2}x^2+c_1x+c_2 \Rightarrow y=\tfrac{1}{30}x^6+\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{2}c_1x^2+c_2x+c_3,$$

$y(0)=1$, $c_3=1$; $y'(0)=1$, $c_2=1$; $y''(1)=0$, $c_1=-2$ olduğundan sınır-değer probleminin çözümü

$$y=\tfrac{1}{30}x^6+\tfrac{1}{6}x^3+x^2+x-2$$

bulunur.

Soru 10. $y=cx+c^2$ bir parametreli doğrular ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm: Genel olarak her (x,y) noktasından iki doğru geçer. Çünkü x ve y verilince c'nin iki değeri elde edilir. Doğrular ailesinin diferansiyel denklemi

$$y=cx+c^2,\quad y'=c,\quad y=xy'+(y')^2$$

olarak bulunur. Bu denklem y''ye göre 2. dereceden olduğundan her (x,y) noktasında y''nün 2 değeri elde edilir. Bunlar (x,y)'den geçen iki doğrunun eğimidir.

Soru 11. $x^2y^3+x^3y^5=c$ bir parametreli eğrilerin ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz ve sınıflandırınız.

Çözüm: Verilen ifadenin her iki tarafının x'e göre türevini alalım:

$$2xy^3+3x^2y^2y'+3x^2y^5+5x^3y^4y'=0,\quad xy^2\neq 0$$

$$\left(2y+3xy^3\right)dx+\left(3x+5x^2y^2\right)dy=0.$$

Birinci mertebe birinci derece lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

Soru 12. Genel çözümü $cxy+cx^2+4=0$ olan diferansiyel denklemi bulunuz ve sınıflandırınz.

Çözüm: $$\left.\begin{array}{l} cxy+c^2x+4=0 \\ c(y+xy')+c^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c=-xy'-y,\quad c\neq 0 \\ xy(-xy'-y)+(-xy'-y)^2x+4=0 \end{array}$$

Diferansiyel denklem $x^3y'^2+x^2yy'+4=0$ olur ve birinci mertebe ikinci derece lineer olmayan bir denklemdir.

Soru 13. $y=Ax^2+Bx+C+\sin 2x$, (A, B ve C keyfi sabitler) eğriler ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz.

Çözüm: Üç tane keyfi sabit olduğundan, üç kez türev alınır,

$$\left.\begin{array}{l} y=Ax^2+Bx+C+\sin 2x \\ y'=2Ax+B+2\cos 2x \\ y''=2A-4\sin 2x \\ y'''=-8\cos 2x \end{array}\right\} \Rightarrow y'''=\text{-}8\cos 2x.$$

Soru 14. Genel çözümü $y=A\cos(2x+B)$ şeklinde iki–parametreli eğriler ailesi olan diferansiyel denklemi bulunuz ve sınıflandırınz.

Çözüm: A ve B gibi iki keyfi sabit (parametre) olduğundan iki defa türev alıp, A ve B'yi yok edelim:

$$\left.\begin{aligned} y &= A\cos(2x+B) \\ y' &= -2A\sin(2x+B) \\ y'' &= -4A\cos(2x+B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y''=-4y \Rightarrow y''+4y=0.$$

İkinci mertebeden sabit katsayılı homojen lineer bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

Soru 15. $y=ae^{3x}+be^{2x}$ eğriler ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz.(a ve b sabitler)

Çözüm:

$$\begin{aligned} y &= ae^{3x}+be^{2x} \\ y' &= 3ae^{3x}+2be^{2x} \\ y'' &= 9ae^{3x}+4be^{2x} \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} y'-2y &= ae^{3x} \\ y''-2y' &= 3ae^{3x} \end{aligned}\right\} y''-5y'+6y=0.$$

Diğer Yol: $y_1=e^{3x}$, $y_2=e^{2x}$ lineer bağımsız çözümler olacağından

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & e^{3x} & e^{2x} \\ y' & 3e^{3x} & 2e^{2x} \\ y'' & 9e^{3x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y''-5y'+6y=0.$$

Soru 16. $y=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x$ eğriler ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz. (A ve B keyfi sabit, α bir sabit)

Çözüm:

$$y'=\alpha(-A\sin\alpha x+B\cos\alpha x)$$

$$y''=\alpha^2(-A\cos\alpha x-B\sin\alpha x)$$

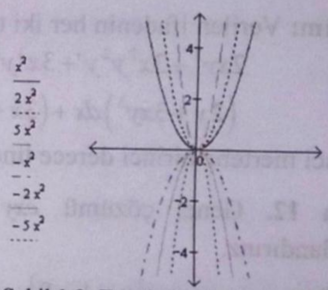
$$y''=-\alpha^2 y \Rightarrow y''+\alpha^2 y=0$$

Soru 17. Tepeleri orijinde ve odağı y ekseni üzerinde olan bir paraboller ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz.

Çözüm: Bu paraboller ailesinin denklemi $y=ax^2$, a parametredir (Şekil 1.2).

$$y=ax^2, \quad y'=2ax$$

$$xy'-2y=0.$$



Şekil 1.2. Tepeleri orjinde ve odağı y üzerinde olan paraboller

Soru 18. $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ hiperboller ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz (a ve b parametreler).

Çözüm: Keyfi sabit sayısı iki olduğundan iki kez türev alır ve üç denklem arasında a ve b paremetrelerini yok ederiz;

$$\left.\begin{aligned} b^2x^2-a^2y^2 &= a^2b^2 \\ 2b^2x-2a^2yy' &= 0 \\ 2b^2-2a^2\left(yy''+y'^2\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{yy'}{yy''+y'^2}.$$

Böylece diferansiyel denklemimiz, $xyy''+xy'^2-yy'=0$ olur.

Soru 19. Genel çözümü $y=e^{ax+by}$, a ve b keyfi sabitler, eğriler ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz.

Çözüm: $\left.\begin{aligned} \ln y &= ax+by \\ \frac{y'}{y} &= a+by' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ln y-\frac{xy'}{y}=b(y-xy'),$

$$\left(\frac{y'}{y}\right)'=by'' \quad \Rightarrow \quad \frac{y''y-y'^2}{y^2}=by'',$$

son iki denklemin oranlarından b yok edilir:

$$\frac{y^2\ln y-xyy'}{yy''-y'^2}=\frac{y-xy'}{y''} \Rightarrow y^2(\ln y-1)y''+y(y')^2-x(y')^3=0.$$

Soru 20. Merkezi $M(a,o)$ ve yarıçapı $r=a$ olan çemberler ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz ve çiziniz.

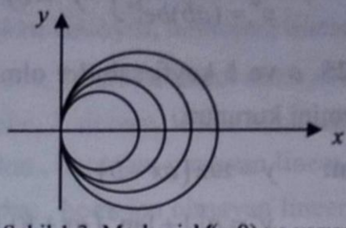
Çözüm: Bu çemberler ailesinin denklemi $(x-a)^2+y^2=a^2$'dir (Şekil 1.3).

$$(x-a)^2+y^2=a^2,\ x-a+yy'=0$$

denklemlerinden a yok edilerek

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0$$

diferansiyel denklemi kurulur.



Şekil 1.3. Merkezi $M(a,0)$ ve yarıçapı a olan çemberler.

Soru 21. A ve B keyfi sabitler olmak üzere $\ln y=Ax^2+B$ eğriler ailesinin diferansinyel denklemini kurunuz

Çözüm: $\ln y=Ax^2+B$ iki keyfi sabitli olduğundan iki defa türevi alınır ve keyfi sabitler yok edilir:

$$\frac{y'}{y}=2Ax,\quad \frac{y''y-(y')^2}{y^2}=2A \Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{y''y-(y')^2}{y^2}x$$

$$yy'=xyy''-x(y')^2,\quad xyy''-yy'-x(y')^2=0.$$

Soru 22 $y=c_1e^{3x}-c_2xe^{2x}$ **eğriler ailesinin diferansiyel denklemini kurup sınıflandırınız.**

Çözüm:

$$y=c_1e^{3x}-c_2xe^{2x}$$
$$y'=3c_1e^{3x}-c_2\left(e^{2x}+2xe^{2x}\right)$$
$$y''=9c_1e^{3x}-c_2\left(4e^{2x}+4xe^{2x}\right)$$

denklemlerinden c_1 ve c_2 yok edilirse

$$(x-1)y''+(4-5x)y'+3(2x-1)y=0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. İkinci mertebeden değişken katsayılı homojen lineer adi diferansiyel denklemdir.

Soru 23. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ eğriler ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm: $\left.\begin{aligned} y &= c_1e^x+c_2e^{-x} \\ y' &= c_1e^x-c_2e^{-x} \\ y'' &= c_1e^x+c_2e^{-x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y''-y=0$

veya elementer cebirdeki teoremlerden, c_1 ve c_2 parametrelerinin yok olma koşulu (yani çözüm olma koşuluna göre)

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0; \; y'' - y = 0.$$

Soru 24. a ve b parametre olmak üzere, $y = ae^{bx}$ eğriler ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} y = ae^{bx} \\ y' = abe^{bx} \end{array}\right\} \\ \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} y' = by \\ y'' = by' \end{array}\right\} yy'' - (y')^2 = 0.$$

$$y'' = (ab)be^{bx}$$

Soru 25. a ve b keyfi sabitler olmak üzere, $y = \tan(ax+b)$ eğriler ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz.

Çözüm: $y = \tan(ax+b)$

$$y' = a\left[1 + \tan^2(ax+b)\right] = a\left(1+y^2\right)$$

$$y'' = 2ayy'$$

Son iki denklemden,

$$\frac{y'}{y''} = \frac{a\left(1+y^2\right)}{2ayy'} \quad \Rightarrow \quad \left(1+y^2\right)y'' - 2yy'^2 - y' = 0.$$

Soru 26. $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin tüm teğet doğrularının diferansiyel denklemini kurunuz.

Çözüm: $y = mx + n$ doğrusunun $x^2 + y^2 = 1$ çemberine değme koşulu,

$$m^2 - n^2 + 1 = 0, \; n^2 = m^2 + 1, \; n = \pm\sqrt{m^2+1}$$

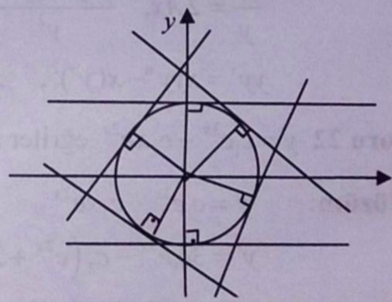
olduğundan, 1-parametreli teğetler ailesi (Şekil 1.4)

$$y = mx \pm \sqrt{m^2+1}$$

olarak bulunur. Bunun diferansiyel denklemi

$$y = y'x \pm \sqrt{(y')^2 + 1}$$

birinci mertebe ikinci derece lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemdir.



Şekil 1.4. Çembere teğet doğrular

Soru 27. $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$, a ve b keyfi sabitler, eğriler ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz.

Çözüm:

$$y' = -\frac{a}{x}\sin(\ln x) + \frac{b}{x}\cos(\ln x)$$

$$xy' = -a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)$$

$$(xy')' = -\frac{a}{x}\cos(\ln x) - \frac{b}{x}\sin(\ln x)$$

$$x(y' + xy'') = -\left(a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)\right)$$

$$xy' + x^2y'' = -y \quad \Rightarrow \quad x^2y'' + xy' + y = 0.$$

Soru 28. $e^{x^2+y^2}+1=2ce^{y^2}$ eğriler ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz.

Çözüm: $e^{x^2+y^2}+1=2ce^{y^2} \Rightarrow e^{x^2}+e^{-y^2}=2c$

$$2xe^{x^2}-2yy'e^{-y^2}=0 \Rightarrow y'=\frac{x}{y}e^{x^2+y^2}$$

$$xe^{x^2}dx-ye^{-y^2}dy=0.$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1) Aşağıdaki diferansiyel denklemleri sınıflandırınız.

a) $y'+x^2y=xe^x$; c: 1. mertebe, değişken katsayılı, homojen olmayan, lineer, a.d.d.

b) $y''+x\sin y=0$; c: 2. mertebe, 1. derece, lineer olmayan, a.d.d.

c) $y''+y\sin x=0$; c: 2. mertebe, değişken katsayılı, homojen, lineer, a.d.d.

d) $(y')^3=(y''+1)^{1/2}$; c: 2. mertebe, 1.derece, lineer olmayan, a.d.d.

e) $y'''+y''y'+y=x$; c: 3. mertebe, 1. derece, lineer olmayan, a.d.d.

f) $xu_{xx}+yu_{yy}+xyu_{xy}=x+y$; c: 2. mertebe, değ. kat., homojen olmayan lineer, k.d.d.

g) $\sin x\, y'''-\cos x\, y'=2$, c: 3. mertebe, değişken kat., homojen olmayan lineer, a.d.d.

h) $(1-y^2)dx+xdy=0$, c: 1. mertebe, değişken katsayılı, homojen, lineer, a.d.d.

ı) $\dfrac{d^2r}{dt^2}=-\dfrac{k}{r^2}$, c: 2. mertebe, 1. derece, lineer olmayan, a.d.d

i) $x^2dy+(y-xy-xe^x)dx=0$, c: 1. mertebe, değişken katsayılı, homojen, lineer, a.d.c

2) $x^3+3xy^2=1$ kapalı fonksiyonu $2xyy'+x^2+y^2=0$ diferansiyel denkleminin $0<x<$ aralığında bir kapalı çözümüdür gösteriniz.

3) c bir keyfi sabit olduğuna göre $y=(x^3+c)e^{-3x}$ ile tanımlı her y fonksiyonun $y'+3y=3x^2e^{-3x}$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösterin.

4) m bir sabit olmak üzere, $y=e^{mx}$ fonksiyonunun $y'''-3y''-4y'+12y=0$ diferansi denkleminin biz çözümü olabilmesi için m hangi değerleri almalıdır. c: $m(-2,2,$

5) $y''-y'-12y=0$ denkleminin genel çözümünün $y=c_1e^{4x}+c_2e^{-3x}$ olduğunu göster ve $y(0)=5$, $y'(0)=6$ koşullarına göre özel çözümünü bulunuz. c: $y=3e^{4x}+2e$

6) Merkezi y- ekseni üzerinde olan ve yarıçapı r (parametre) olan çemberler ailes diferansiyel denklemini bulunuz. c: $xy''-(y')^3-y'$

7) Orjinden geçen ve merkezi $y=x$ doğrusu üzerinde bulunan çemberler aile diferansiyel denklemini bulunuz. c: $(x^2+2xy-y^2)dx-(x^2-2xy-y^2)dy$

8) c keyfi sabitine bağlı $y^2=2cx+c^2$ paraboller ailesinin diferansiyel denkl kurunuz. c: $y(y')^2+2xy$

9) Genel çözümü $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+x$ olan diferansiyel denklemi bulunuz. c: $y''-y'-2y=-$

10) Aşağıdaki eğriler ailelerinin diferansiyel denklemlerini kurunuz.

a) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ elipsler ailesi, c: $x\left(yy''+(y')^2\right)$