

1.1. Genel Bilgiler

Tanım 1. 1: x bağımsız değişkeni ile bu değişkene bağlı fonksiyonu ve bu fonksiyonun çeşitli mertebeden türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir.

Bu tanıma göre; x bağımsız değişken, y , x 'e bağlı fonksiyon, y 'nin türevleri; $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ olmak üzere $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ denklemi n . mertebeden bir diferansiyel denklemdir.

$F(x, y, y') = 0$ birinci mertebeden diferansiyel denklemdir.

$F(x, y, y', y'') = 0$ ikinci mertebeden diferansiyel denklemdir.

.....

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ n . mertebeden diferansiyel denklemdir.

Bir diferansiyel denklemin en yüksek mertebeli türevi denklemin mertebesidir. En yüksek mertebeli türevin derecesi de diferansiyel denklemin derecesidir.

$xy' + y + 1 = 0, y' + xy = 0, dy = (x^2 + y^2)dx, xy' + x^3y^2 - 4 = 0$ denklemleri 1. mertebeden diferansiyel denklemlerdir.

$y'' + y'' = x^2 + 1$ denklemi 3. mertebeden,

$\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} - 3x^2u = 0$ denklemi 2. mertebeden,

$\frac{dv}{dt} \cdot \frac{d^3 v}{dt^3} + 3v = 5$ denklemi 3. mertebeden diferansiyel denklemlerdir.

$(y')^2 - y' \sin x - x = 0$ denklemi 1. mertebeden 2. dereceden;

$x(y)'' + y'' + y' + y = 0$ denklemi 2. mertebeden 3. dereceden bir diferansiyel denklemdir.

$y'' + y' \tan x = \sin 2x$ denklemi 2. mertebeden diferansiyel denklemdir.

$y^{(n)} + 5y^{(n-1)} + xy'' + y' + y = 0$ denklemi n ci mertebeden 1. dereceden bir diferansiyel denklemdir.

Tanım 1. 2: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ bir diferansiyel denklem olsun. Bu diferansiyel denklemi sağlayan $y = f(x)$ ifadesine söz konusu diferansiyel denklemin bir çözümü veya integrali denir.

Örnek 1. 1: $y' + y - \sin x - \cos x + 1 = 0$ denklemi verilsin. $y = \sin x - 1$ bu denklemin bir çözümüdür. Gerçekten; $y' = \cos x$ olduğundan $\cos x + \sin x - 1 - \sin x - \cos x + 1 = 0$ olur.

Örnek 1. 2: $y' - x = 0$ denklemi verilsin. c keyfi sabit olmak üzere $y = \frac{1}{2}x^2 + c$ ifadesi denklemin genel çözümüdür. Gerçekten; $y' - x = 0 \rightarrow y' = x$ dir. İntegral alınırsa $y = \frac{1}{2}x^2 + c$ olur.

Tanım 1. 3: Bir diferansiyel denklemin genel çözümü veya genel integrali bir eğri ailesidir.

$F(x, y, y') = 0$ denkleminin genel çözümü (Genel integrali) $G(x, y, c) = 0$ şeklinde bir eğri ailesidir. Burada c keyfi sabittir. (c , parametre)

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ şeklinde bir eğri ailesidir. $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitlerdir.

Örnek 1. 3: $y'' = 1$ ise

$$y'' = x + c_1, y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2, y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3 \text{ (Genel çözüm)}$$

Bir diferansiyel denklemin genel çözümünden özel bir çözümü bulunabilir. Bunun için keyfi sabitlerin sayısı kadar şart verilmelidir (Başlangıç değer problemi).

Benzer şekilde diferansiyel denklemi sağlayan ve içerisinde bir ya da daha fazla keyfi sabit bulunduran ve bu nedenle bir eğri ailesini oluşturan çözüme **genel çözüm** denir. Eğer diferansiyel denklemin her çözümü genel çözümdeki keyfi sabitlere değerler atanarak elde edilebiliyorsa bu genel çözüm aynı zamanda **tam çözüm** adını alır. Genel çözümünden elde edilen her bir çözüm ise **özel** veya

özgöl çözüm adını alır. Eğer diferansiyel denklemin herhangi bir çözümü, genel çözümdeki sabitlere değerler atanarak elde edilemiyorsa bu çözüm **tekil çözüm** adını alır. Tıpkı cebirsel denklemlerin çözümünde olduğu gibi, diferansiyel denklemlerde de, hangi isim altında olursa olsun, bir çözüm diferansiyel denklemini mutlaka sağlar. Eğer sağlamıyorsa, elde edilen çözüm hatalıdır demektir. Bir problem için diferansiyel denklemin elde edilmesi genellikle kolaydır. Diğer yandan bu denklemin çözümünün bulunması ise genellikle zordur. Bir diferansiyel denklemin çözümü bazen bir ya da birkaç defa integral alma işleminden ibaret olabilse de bu tür durumlar genellikle istisnadır. Tüm diferansiyel denklemler tiplerine uygulanabilen genel bir çözüm yöntemi ne yazık ki mevcut değildir. Çeşitli sınıflara ayrılan diferansiyel denklemler için bunlara özgü çözüm metotları geliştirilmiştir

Örnek:

$y = e^{2x}$ ifadesinin $(-\infty, +\infty)$ aralığında $y' - 2y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Verilen çözüm diferansiyel denklemini sağlamalıdır.

$y = e^{2x}$ } alınıp diferansiyel denkleminde yazılırsa $2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$ olur ve denklemin sağlanır.

Örnek:

$y = \sqrt{1-x^2}$ ifadesinin $yy' + x = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz. Verilen çözümün her x değeri için geçerli olup olmadığını irdelleyiniz.

Çözüm

Verilen çözüm diferansiyel denkleminde yazılırsa $\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + x = 0$ elde edilir,

dolayısıyla verilen çözüm denklemini sağlamaktadır. Çözümün tanım aralığı için $1-x^2 \geq 0$ olması gerektiği açıktır. Buradan $(1-x)(1+x) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x$ ve $-1 \leq x$ yazılarak $-1 \leq x \leq 1$ elde edilir.

Örnek

$y = Cxe^{2x} + 2x - 3$ ifadesinin $y'' - 4y' + 4y = 8x - 20$ diferansiyel denkleminin, C sabitinin herhangi bir değeri için, çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$y = Cxe^{2x} + 2x - 3$, $y' = C(e^{2x} + 2xe^{2x}) + 2 = Ce^{2x} + 2Cxe^{2x} + 2$ ve

$y'' = 2Ce^{2x} + 2C(e^{2x} + 2xe^{2x}) = 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}$ bulunup denkleminde yerine yazarsak,

$y'' - 4y' + 4y = (4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}) - 4(Ce^{2x} + 2Cxe^{2x} + 2) + 4(Cxe^{2x} + 2x - 3) = 8x - 20$ elde edilir. Dolayısıyla verilen çözüm genel çözümdür.

Diferansiyel denklem, bir fonksiyon veya türevlerinin belirli bağımsız değişken değerlerine karşılık gelen bağımsız değişken değerleri konusunda bilgi içermez. Sonuç olarak aynı fiziksel olayla ilgili pek çok farklı problem aynı diferansiyel denklemle ifade edilir. Farklılık ise elde edilen genel çözümden bizim ilgilendiğimiz problemin özel çözümüne geçebilmemizi sağlayan özel şartların tanımlanmasıdır. Eğer bu şartlar bağımsız değişkenin aynı değeri için verilmişse bu şartlara **başlangıç şartları**, bağımsız değişkenin birden fazla değeri için belirlenmişse bu şartlara **sınır şartları** denir.

$$\left. \begin{array}{l} y'' - 3y' + y = 2xe^{-4x} \\ y(2) = 5, y'(2) = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{başlangıç değer problemi}$$

$$\left. \begin{array}{l} y'' - 3y' + y = 2xe^{-4x} \\ y(2) = 5, y'(8) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sınır değer problemi}$$

Örnek 1. 4: $y'' + y = 0$ denkleminin genel çözümü $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ dir.
 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ için özel çözüm $y = \sin x$ dir.

1.2. Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi

$y = f(x, c)$ bir parametrelili eğri ailesi olsun.

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x, c) \\ y' = f'(x) \end{array} \right\} \text{Denklemleri arasında } c \text{ yok edilirse } F(x, y, y') = 0 \text{ şeklinde 1.}$$

mertebeden diferansiyel denklem elde edilir.

$y = f(x, c_1, c_2)$ iki parametrelili eğri ailesi olsun.

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x, c_1, c_2) \\ y' = f'(x, c_1, c_2) \\ y'' = f''(x, c_1, c_2) \end{array} \right\} \text{Denklemleri arasında } c_1, c_2 \text{ sabitleri yok edilirse}$$

$F(x, y, y', y'') = 0$ şeklinde 2. Mertebeden diferansiyel denklem elde edilir.

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y' = f'(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y^{(n)} = f^{(n)}(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{array} \right\} \text{Denklemleri arasında } c_1, c_2, \dots, c_n \text{ keyfi sabitleri}$$

(parametreleri) yok edilirse $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ şeklinde n.ci mertebeden diferansiyel denklem elde edilir.

ALİŞTIRMALAR

1. Genel çözümü $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$ olan diferansiyel denklemi elde ediniz.

Çözüm:

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$$

$$y' = -\frac{c_1}{x} \sin(\ln x) + \frac{c_2}{x} \cos(\ln x)$$

$$y'' = \frac{c_1}{x} \sin(\ln x) + \frac{c_1}{x^2} \cos(\ln x) - \frac{c_2}{x^2} \cos(\ln x) - \frac{c_2}{x^2} \sin(\ln x)$$

$$y'' = \frac{c_1}{x^2} [c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)] - \frac{1}{x} \left[-\frac{c_2}{x} \sin(\ln x) + \frac{c_2}{x} \cos(\ln x) \right]$$

$$\rightarrow y'' = \frac{1}{x^2} y - \frac{1}{x} y'$$

$x^2 y - x y' + y = 0$ diferansiyel denklemi bulunur.

2. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$ eğri ailesinin sağladığı diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{2x}$$

$$y'' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{2x}$$

$$y''' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 8c_3 e^{2x}$$

$$y'' - y = 3c_3 e^{2x} \left\{ \begin{array}{l} y'' - y' = 2(y'' - y) \end{array} \right.$$

$$y'' - y' = 6c_3 e^{2x} \left\{ \begin{array}{l} y'' - 2y'' - y' + 2y = 0 \end{array} \right.$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

3. $y' = 3x^2 + 5$ diferansiyel denkleminin $y(1) = 7, y'(2) = 3$ şartlarını sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$y' = 3x^2 + 5 \rightarrow y' = x^3 + 5x + c_1 \rightarrow y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

$$x = 1 \text{ için } y = 7 \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{5}{2} + c_1 + c_2 = 7$$

$$x = 2 \text{ için } y' = 3 \rightarrow 8 + 10 + c_1 = 3 \rightarrow c_1 = -15$$

$$\frac{11}{4} - 15 + c_2 = 7 \rightarrow c_2 = 7 + \frac{49}{4} = \frac{77}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 15x + 7\frac{7}{4} = f(x) \text{ (özel çözüm)}$$

4. Herhangi bir noktasındaki teğetin eğimi $\frac{y^2 \ln x - y}{x}$ olan ve (1, 1) noktasından geçen eğriyi bulunuz.

Çözüm:

Herhangi bir (x,y) noktasındaki teğetin eğimi $\frac{dy}{dx}$ dir. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \ln x - y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x} \text{ (Bernoulli diferansiyel denklemi)}$$

$$y^{-2} y' + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{x}, \quad y^{-1} = z \rightarrow y^{-2} y' = z'$$

$$-z' + \frac{1}{x} z = \frac{\ln x}{x} \rightarrow z' - \frac{1}{x} z = -\frac{\ln x}{x} \text{ (Lineer denklem)}$$

$$z = u \cdot v \rightarrow u = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}, v = -\int \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x} + c = -\int \frac{\ln x dx}{x^2} + c$$

KAYNAK: Editor: Adnan BAKİ ,Çözümlü Diferansiyel Denklemler, Pegem Akademi, 2017,

BAZI TEMEL İNTEGRAL FÖRMÜLLERİ

$$1. \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \quad (r \neq -1)$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$5. \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$6. \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$$

$$7. \int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + c$$

$$8. \int \operatorname{cosec} x \cdot \cot x dx = \operatorname{cosec} x + c$$

$$9. \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$10. \int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$11. \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$12. \int \operatorname{cosec} x dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$$

$$13. \int e^x dx = e^x + c$$

$$14. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$15. \int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$16. \int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$17. \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$18. \int \operatorname{cosec} hx \coth x dx = -\operatorname{cosec} hx + c$$

$$19. \int \sec hx \tanh x dx = +\sec hx + c$$

$$20. \int \operatorname{cosec} hx \coth x dx = -\operatorname{cosec} hx + c$$

$$21. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$22. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$23. \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + c$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$25. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$26. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$27. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$28. \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$29. \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c \quad 30. \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$31. \int \tan^2 x dx = \tan x - x + c \quad 32. \int \cot^2 x dx = -\cot x - x + c$$

$$33. \int \sin^3 x dx = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 x)\cos x + c$$

$$34. \int \cos^3 x dx = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 x)\sin x + c$$

$$35. \int \tan^3 x dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + c$$

$$36. \int \cot^3 x dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x + \ln|\sin x| + c$$

$$37. \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$38. \int \operatorname{cosec}^3 x dx = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x \cdot \cot x + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$$

$$39. \int \sin ax \sin bxdx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + c$$

$$40. \int \cos ax \cos bxdx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + c$$

$$41. \int \sin ax \cos bxdx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + c$$

$$42. \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$43. \int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$44. \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$45. \int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx$$

$$46. \int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

$$47. \int \operatorname{cosec}^n x dx = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cosec}^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} x dx$$

$$48. \int \sin^m x \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx$$

$$49. \int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + c$$

$$50. \int x \cos x dx = \cos x + x \sin x + c$$

$$51. \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$$

$$52. \int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$$

$$53. \int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$54. \int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$$

$$55. \int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

$$56. \int \operatorname{arc cot} x dx = x \operatorname{arc cot} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

$$57. \int \operatorname{arc sec} x dx = x \operatorname{arc sec} x - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$58. \int \operatorname{arccos} ecx dx = x \operatorname{arccos} ecx + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$59. \int x \arcsin x dx = \frac{1}{4} (2x^2 - 1) \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + c$$

$$60. \int x \arctan x dx = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan x - \frac{x}{2} + c$$

$$61. \int \ln x dx = x \ln x - x + c \qquad 62. \int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + c$$

