

Eğer x ve y , $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ ($t \in I$) şeklinde tanımlanmış fonksiyonlar ise o zaman bu denklemler ile tanımlanan $(x,y)=(f(t),g(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğridir. Bu denklemlere eğrinin "parametrik denklemleri" denir.

t değişkeni eğri için bir parametre, I da parametre aralığıdır. Parametre aralığı $[a,b]$ olursa, yani $a \leq t \leq b$ ise; eğrinin başlangıç noktası $(f(a),g(a))$, bitiş noktası $(f(b),g(b))$ olur.

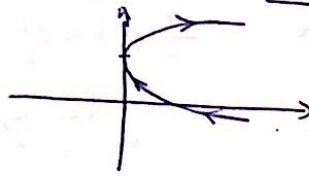
Analitikte birlikte denklemlere eğrinin bir "parametrizasyonu" denir. * Bir eğrinin binden fazla parametrizasyonu vardır.

* $x=t^2$ $y=t+1$ $-\infty < t < \infty$ eğrisinin denklemini x,y cinsinden bulup çiziniz.

$$y=t+1 \Rightarrow t=y-1 \Rightarrow x=t^2=(y-1)^2 \quad \boxed{x=(y-1)^2}$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow x \rightarrow \infty, y \rightarrow -\infty$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$$

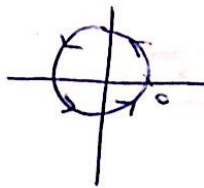


* $x=a \cos t$, $y=a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$x^2+y^2=a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2 \rightarrow a \text{ yarıçaplı, merkezli çember}$$

$$t=0 \Rightarrow x=a, y=0$$

$$t=2\pi \Rightarrow x=a, y=0$$



⊗ $x=1+2\cos t$, $y=2\sin t$ parametrizasyonu ile verilen eğriyi bulunuz. (P2)

$$\begin{aligned} x=1+2\cos t &\Rightarrow \cos t = \frac{x-1}{2} \\ y=2\sin t &\Rightarrow \sin t = \frac{y}{2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x=1+2\cos t \\ y=2\sin t \end{aligned}} \right\} \cos^2 t + \sin^2 t = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$
$$\Downarrow$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 4 \text{ cemberi}$$

★ Türev:

f ve g fonksiyonları t de türevlenebilir ise $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ de türevlenebilir. Bu durumda:

$$\left. \begin{aligned} \star y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad (f'(t) \neq 0) \\ \star \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \end{aligned} \right\}$$

⊗ $x=\sec t$, $y=\tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ eğrisinin $(\sqrt{2}, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemi?

$y=f(x)$ in (a, b) noktasındaki teğeti: $y-b=f'(a) \cdot (x-a)$

$$(a, b) = (\sqrt{2}, 1) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} = \sec t \\ 1 = \tan t \end{cases} \quad \boxed{t = \frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \cdot \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = f'(\sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

$$\text{Teğet: } y-1 = \sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{2}x - 1}$$

⊗ $x = t - t^2$, $y = t - t^3 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}$ türevini t cinsinden bulun. (P3)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-6t \cdot (1-2t) + 2(1-3t^2)}{(1-2t)^2}}{1-2t} = \frac{6t^2 - 6t + 2}{(1-2t)^3}$$

Parametrik Olarak Tanımlı Eğrinin Uzunluğu

Eğer C eğrisi : $x=f(t)$, $y=g(t)$, $a \leq t \leq b$ ile parametrik olarak tanımlıysa, $t=a$ dan $t=b$ 'ye artarken C nin uzunluğu:

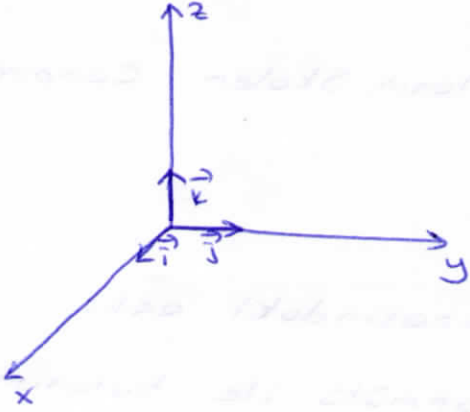
$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt \text{ dir.}$$

⊗ $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ çemberinin uzunluğu?

$$\begin{aligned} f'(t) &= -r \sin t \Rightarrow (f'(t))^2 = r^2 \sin^2 t \\ g'(t) &= r \cos t \Rightarrow (g'(t))^2 = r^2 \cos^2 t \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f'(t) &= -r \sin t \\ g'(t) &= r \cos t \end{aligned}} \right\} \rightarrow (f')^2 + (g')^2 = r^2$$

$$L = \int_0^{2\pi} r dt = r t \Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{2\pi r}}$$

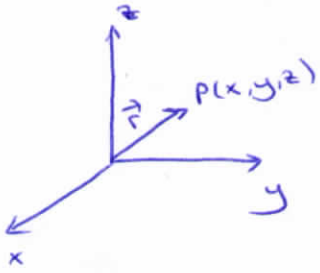
3-Boyutlu Uzayda Vektörler



3-boyutlu uzayda bir Kartezyen koordinat sistemi verildiğinde, sırasıyla orjinden $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ noktalarına olan, oklarla temsil edilen üç standart baz vektörü $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ olarak tanımlanır.

3-boyutlu uzaydaki herhangi bir vektör bu baz vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

* Örneğin (x,y,z) noktasının yer vektörü:



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ile verilir. $\vec{r}$ vektörünün uzunluğu:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ dir.}$$

* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 3-boyutlu uzayda iki nokta ise P_1 'den P_2 'ye olan $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ vektörü:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

olarak tanımlanır.

* $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, α : sabit

a) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j} + (u_3 + v_3)\vec{k}$ c) $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \alpha\vec{v}$ dir.

b) $\alpha \cdot \vec{u} = \alpha u_1\vec{i} + \alpha u_2\vec{j} + \alpha u_3\vec{k}$

Birim vektör: Uzunluğu 1 olan vektöre birim vektör denir. Her vektörün kendi doğrultu ve yönünde birim vektörü vardır. $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ için:

$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \vec{v}$ vektörü $\vec{u}$ yönünde ve doğrultusunda olan birim vektördür.

Skaler Çarpım

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

$$\text{ve } \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

vektörleri için

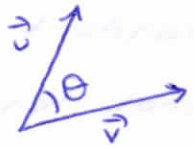
skaler çarpım:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

olarak tanımlanır. Skaler Çarpımın

sonucu bir sayıdır.

★ iki vektör arasındaki açı:



$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta \quad \text{formülü ile bulunur.}$$

★ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ dir. ($\vec{u} \perp \vec{v}$ dir)

★ Skaler Çarpımın Özellikleri:

$$\textcircled{1} \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\textcircled{2} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\textcircled{3} + \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (+\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (+\vec{v})$$

$$\textcircled{4} \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

$$\textcircled{5} \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\textcircled{6} |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

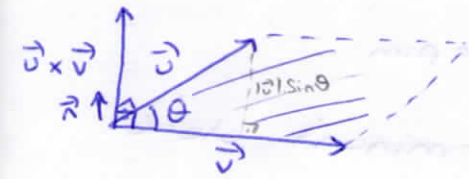
$$\textcircled{7} \vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

Vektörel Çarpım

* Skaler çarpım $\mathbb{R}^n$ de geçerlidir; fakat vektörel çarpım sadece $\mathbb{R}^3$ de geçerlidir.

* İki vektörün skaler çarpımı sonucu bir sayı; vektörel çarpımı sonucu bir vektör oluşur.

* Vektörel çarpım $\mathbb{R}^3$ deki vektörleri çarpmanın diğer bir yoludur.



$$A = h \cdot |v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \theta$$

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \theta$$

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri paralel değilse bir düzlem belirlerler.

$\vec{u} \times \vec{v}$ vektörü bu düzleme ve dolayısıyla $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine diktir. $|\vec{u} \times \vec{v}|$ taralı bölgenin alanına eşittir.

* $\vec{n}$, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ ye dik olan birim vektör olmak üzere

$$\vec{u} \times \vec{v} = (|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta) \cdot \vec{n} \text{ dir. } (\theta: \vec{u} \text{ ile } \vec{v} \text{ arasındaki açısı})$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \text{veya} \\ \theta = \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0 \text{ dir. Yani } \vec{u} \parallel \vec{v} \text{ ise vektörel çarpımları 0'dır}$$

Vektörel Çarpım için Determinant Formülü

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}, \quad \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \text{ olsun.}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

* $P(-3, 4, 1)$, $Q(-5, 2, 2)$, $R(1, 1, 1)$ noktaları verilsin.

a) $\vec{PQ}$, $\vec{QR}$ vektörlerini;

b) $\vec{PQ}$ vektörünün uzunluğunu;

c) $\vec{PQ}$ yönündeki birim vektörü;

d) $\vec{PQ}$ ve $\vec{QR}$ vektörleri arasındaki açıyı;

e) $\vec{PQ}$ ve $\vec{QR}$ ye dik olan bir vektör; bulunuz.

Cözüm

$$a) \vec{PQ} = \langle -5 - (-3), 2 - 4, 2 - 1 \rangle = \langle -2, -2, 1 \rangle = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{QR} = \langle 1 - (-5), 1 - 2, 1 - 2 \rangle = \langle 6, -1, -1 \rangle = 6\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$b) |\vec{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$$

$$c) \vec{u} = \frac{\vec{PQ}}{|\vec{PQ}|} = \frac{-2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{3} = \left\langle -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$$

$$d) \vec{PQ} \cdot \vec{QR} = \langle -2, -2, 1 \rangle \cdot \langle 6, -1, -1 \rangle = -2 \cdot 6 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -12 + 2 - 1 = -11$$

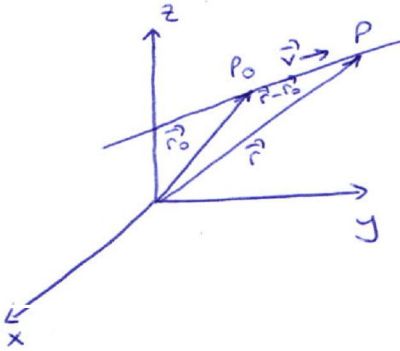
$$|\vec{QR}| = \sqrt{6^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{38}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{QR}}{|\vec{PQ}| \cdot |\vec{QR}|} = \frac{-11}{3 \cdot \sqrt{38}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-11}{3\sqrt{38}}\right)$$

$$e) \vec{v} = \vec{PQ} \times \vec{QR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$= 3\vec{i} + 4\vec{j} + 14\vec{k}$$

UZAYDA DOĞRULAR VE DÜZLEMLER

Uzayda Doğru ve Doğru Parçaları



$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ P_0 noktasının yer vektörü ve $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ sıfırdan farklı bir vektör olsun. Bu durumda P_0 'dan geçen ve $\vec{v}$ ye paralel olan tek bir doğru vardır.

Eğer, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ bu doğru üzerindeki başka bir P noktasının yer vektörü ise o zaman $\vec{r} - \vec{r}_0$ bu doğru boyunca uzanır ve dolayısıyla $\vec{v}$ ye paraleldir. Bu durumda bir t reel sayısı için

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{v}} \text{ olur.}$$

★ $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$: P_0 dan geçen ve $\vec{v}$ ye paralel olan doğrunun vektörel denklemidir.★

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ yazılırsa

$$\boxed{x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct} \text{ elde edilir.}$$

★ $x = x_0 + at$
★ $y = y_0 + bt$
★ $z = z_0 + ct$ } $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan geçen $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ ye paralel olan doğrunun standart parametrik denklemidir.

★ $\vec{v}$ vektörüne doğrunun yön vektörü denir.

★ t parametresi $(-\infty, \infty)$ aralığında değerler alır.

★ İki doğru paralel ise yön vektörleri de paraleldir.

Bir doğru denklemini yazmak için → ① Doğru üzerinde noktaya ihtiyacımız var.
→ ② Doğruya paralel vektöre

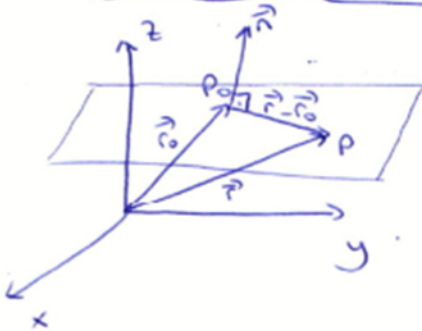
* $(-2, 0, 4)$ den geçen $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ ya paralel doğru?

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + at = -2 + 2t \\ y &= y_0 + bt = 0 + 4t \\ z &= z_0 + ct = 4 - 2t \end{aligned} \right\} \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

* $P(-3, 2, -3), Q(1, 1, 4)$ den geçen doğrunun parametrik denk.?

$$\vec{v} = \vec{PQ} = \langle 4, -3, 7 \rangle \quad \begin{aligned} x &= x_0 + at = -3 + 4t \\ y &= y_0 + bt = 2 - 3t \\ z &= -3 + 7t \end{aligned}$$

Uzayda Düzlemler



$\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasının yer vektörü ve $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ sıfırdan farklı bir vektör olsun. Bu durumda P_0 'dan geçen $\vec{n}$ ye dik tek düzlem vardır.

Eğer, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ düzlem üzerindeki başka bir P noktasının yer vektörü ise o zaman $\vec{P_0P}$ vektörü ile $\vec{n}$ vektörü birbirine dik olur.

$$\vec{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0 \Rightarrow \boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0} \Rightarrow P_0 \text{ dan geçen } \vec{n} \text{ ye dik düzlemin vektörel denklemi}$$

* $\vec{n}$ vektörüne düzlemin normal vektörü denir.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ yazılırsa

$$\boxed{A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0} \Rightarrow \text{Po'dan geçen } \vec{n} \text{ ye dik düzlemin bileşen denklemi}$$

$$Ax + By + Cz = \overbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0}^0 \Rightarrow \boxed{Ax + By + Cz = 0}$$

*) $P_0(-3, 0, 7)$ den geçen $\vec{n} = \underset{A}{5}\vec{i} + \underset{B}{2}\vec{j} - \underset{C}{1}\vec{k}$ ye dik düzlem?

$$5(x+3) + 2(y-0) + (z-7) = 0 \Rightarrow 5x + 2y + z = -22$$

*) $X = (2, 1, 4)$ den geçen $\vec{v} = \vec{n}$
 $\downarrow$
 $x = 2 + t$
 $y = 1 + 2t$
 $z = 3 + 0t$

$\vec{n} = \begin{matrix} A & B & C \\ \langle 1, 2, 0 \rangle \end{matrix}$
 $X = (2, 1, 4)$
 $x_0 \ y_0 \ z_0$

$l: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$ doğrusuna dik düzlem?

$1 \cdot (x-2) + 2(y-1) + 0(z-4) = 0$
 $\boxed{x + 2y = 4}$

*) $(2, 0, 1)$ den geçen ve $X(1, 1, 0)$ ve $Y(4, -1, -2)$ noktalarından geçen doğruya dik düzlem?

$$\vec{n} = \overrightarrow{XY} = \begin{matrix} A & B & C \\ \langle 3, -2, -2 \rangle \end{matrix}$$

$(2, 0, 1)$
 $x_0 \ y_0 \ z_0$

$3(x-2) - 2(y-0) - 2(z-1) = 0$
 $\boxed{3x - 2y - 2z = 4}$

*) $2x + y + 3z = 6$ düzleminin normalini, düzlem üzerinde bir noktayı ve eksenleri kesim noktalarını bulunuz.

$$2x + y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n} = \langle 2, 1, 3 \rangle$$

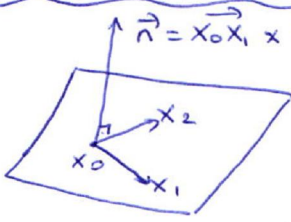
$$* \ x = y = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow (1, 1, 1)$$

$$* \ x = y = 0 \Rightarrow z = 2$$

$$y = z = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x = z = 0 \Rightarrow y = 6$$

3 Nokta ile Belirlenmiş Düzlemin Normali



$$\vec{n} = \vec{x_0x_1} \times \vec{x_0x_2}$$

Aynı doğru üzerinde olmayan x_0, x_1, x_2 noktalarından geçen düzlemin normali:

$$\vec{n} = \vec{x_0x_1} \times \vec{x_0x_2}$$

* $A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$ den geçen düzlem?

$$\vec{AB} = \langle 2, 0, -1 \rangle \quad \vec{AC} = \langle 0, 3, -1 \rangle$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} = \langle 3, 2, 6 \rangle \quad \begin{matrix} A & B & C \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ A(0,0,1) \end{matrix}$$

$$3x + 2y + 6(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{3x + 2y + 6z = 6}$$

Paralel ve Kesişen Düzlemler - Doğrular

① Normal vektörleri paralel olan iki düzlem paraleldir. İki düzlem paralel değilse kesişiyordur.

② $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ ise iki düzlem diktir. $\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$ Düzlemler arası açı

③ Bir düzlemin normali $\vec{n}$, bir doğrunun yön vektörü $\vec{v}$ olsun.
a) $\vec{n} \parallel \vec{v}$ ise doğru ile düzlem diktir.
b) $\vec{n} \perp \vec{v}$ ise " " " paraleldir.

* $x - 2y + 5z = 1$ düzlemi ile $\vec{r}(t) = \langle 2-t, 1+2t, -1+t \rangle$ doğrusu paralel midir?

$$x - 2y + 5z = 1 \Rightarrow \vec{n} = \langle 1, -2, 5 \rangle$$

$$x = 2-t$$

$$y = 1+2t$$

$$z = -1+t$$

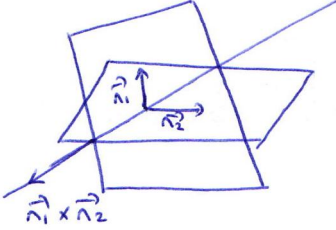
$$\Rightarrow \vec{v} = \langle -1, 2, 1 \rangle$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = -1 - 4 + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}$$

Doğru ile Düzlem Paraleldir.

Not: Doğru ile Doğru Kesişince → Nokta
 " " Düzlem " → Nokta
 Düzlem " Düzlem " → Doğru

Kesişim Doğruları:



iki düzlemin kesişim doğrusu (arakesit doğrusu); düzlemlerin normal vektörleri $\vec{n}_1$ ve $\vec{n}_2$ nin ikisine de diktir. Dolayısıyla, arakesit doğrusu $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ ye paraleldir.

* Doğrunun yön vektörü: $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

*) $3x-2y+z=2$ ve $x-y+3z=8$ ile verilen düzlemlerin arakesit doğrusunun parametrik denklemleri?

$$\begin{aligned} 3x-2y+z=2 &\rightarrow \vec{n}_1 = \langle 3, -2, 1 \rangle \\ x-y+3z=8 &\rightarrow \vec{n}_2 = \langle 1, -1, 3 \rangle \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ = \langle -5, -8, -1 \rangle \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ x-y+3z=8 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow -2y+z=-1 \\ -y+3z=7 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} y=2 \\ z=3 \end{array} \right. \quad (1, 2, 3) \rightarrow \text{Arakesit üzerinde nokta}$$

$$\begin{cases} x=1-5t \\ y=2-8t \\ z=3-t \end{cases}$$

*) $x-y=3$, $x+y+z=0$ düzlemlerinin arakesit doğrusuna paralel vektör? Arakesit doğrusu?

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= \langle 1, -1, 0 \rangle \\ \vec{n}_2 &= \langle 1, 1, 1 \rangle \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \langle -1, -1, 2 \rangle \end{array} \right.$$

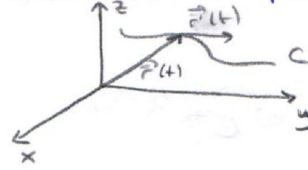
$$\begin{aligned} \begin{cases} x-y=3 \\ x+y+z=0 \end{cases} &\quad \left\{ \begin{array}{l} z=0 \Rightarrow x-y=3 \\ x+y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases} \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{3}{2}-t \\ y=-\frac{3}{2}-t \\ z=2t \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vektörel Fonksiyonlar

(12)

3-boyutlu uzayda hareket eden bir parçacığın hareketi, onun pozisyonunun üç koordinatı t zamanının fonksiyonları ile verilerek tanımlanabilir:

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t)$$



Bu durumda parçacığın t zamanındaki konum vektörü $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ olur. Bu şekilde tanımlanmış $\vec{r}(t)$ fonksiyonuna "vektörel fonksiyon" denir. $t \in D$ ($0 < t < \infty$) olmak üzere D nin her elemanına bir vektör atar.

* Burada t artarken parçacık bir yol boyunca hareket eder, ki bu 3-boyutlu uzayda bir C -eğrisidir.

Türev: Eğer f, g, h fonksiyonları t de türevlenebilir ise

$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ fonksiyonu t de türevlenebilir.

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}\vec{i} + \frac{dg}{dt}\vec{j} + \frac{dh}{dt}\vec{k}$$

* Eğer $\frac{d\vec{r}}{dt}$ sürekli ise ve asla 0 olmuyorsa, yani f, g, h fonksiyonlarının hepsi aynı ^{anda} 0 olmayan 1. mertebe türevleri varsa, $\vec{r}$ tarafından gidilen eğri düzgündür.

* Eğer $\vec{r}$ uzayda düzgün bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın konum vektörü ise:

① $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ parçacığın hız vektörüdür, ve eğriye teğettir.

② $|\vec{v}|$ parçacığın süratidir.

③ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ivme vektörüdür.

V. ①

④ $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ vektörü birim teğet vektördür. t zamanında hareketin yönüdür. ($\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$) (13)

$$\text{Hız} = (\text{Sürat}) \cdot (\text{Yön}) = |\vec{v}| \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{v}$$

* $\vec{r}(t) = 3\cos t \vec{i} + 3\sin t \vec{j} + t^2 \vec{k} \Rightarrow$ birim teğet vektör?

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin t \vec{i} + 3\cos t \vec{j} + 2t \vec{k} \quad \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{9 + 4t^2}$$

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} = -\frac{3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}} \vec{i} + \frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}} \vec{j} + \frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}} \vec{k}$$

Limit ve Süreklilik

$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, D tanım bölgesi vektör-değerli bir fonksiyon ve $\vec{L} = L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k}$ bir vektör olsun.

* $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{L}$ iken

$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L_1$, $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = L_2$, $\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = L_3$ dır. Yani:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \right) \vec{i} + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \right) \vec{j} + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \right) \vec{k} \text{ dır.}$$

* $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ ise $\vec{r}(t)$, $t_0 \in D$ noktasında süreklidir.

* $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = ?$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos t \right) \vec{i} + \left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin t \right) \vec{j} + \left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} t \right) \vec{k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{\pi}{4} \vec{k}$$

⑩ $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ konum vektörü ile verilen cismin (14)
 $t=1$ deki hız ve ivme vektörlerini bulunuz.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{j} + 6t\vec{k}$$

$$t=1 \text{ için } \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \quad \vec{a} = 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

⑪ Konum vektörü $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t^2 \vec{k}$ olan cismin
 $t=1$ deki süratini ve ivmesini bulun.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + 2t \vec{k} \quad \Rightarrow \vec{v}(1) = -\sin 1 \vec{i} + \cos 1 \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j} + 2\vec{k} \quad \Rightarrow \vec{a}(1) = -\cos 1 \vec{i} - \sin 1 \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{Sürat} = |\vec{v}| = \sqrt{\sin^2 1 + \cos^2 1 + 2^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

Vektörel Fonksiyonlar İçin Türev Kuralları

$\vec{u}(t), \vec{v}(t)$ türevlenebilir vektör değerli fonksiyonlar; $\lambda(t)$ türevlenebilir skaler değerli fonksiyon olsun.

$$a) \frac{d}{dt} (\vec{u} + \vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$b) \frac{d}{dt} (\lambda(t) \vec{u}(t)) = \frac{d\lambda(t)}{dt} \vec{u}(t) + \lambda(t) \cdot \frac{d\vec{u}(t)}{dt}$$

$$c) \frac{d}{dt} (\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$$

$$d) \frac{d}{dt} (\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$$

$$e) \frac{d}{dt} (\vec{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t) \cdot \vec{u}'(\lambda(t))$$

f) Eğer $\vec{r}$ sabit uzunluklu ($|\vec{r}(t)| = c = \text{sabit}$) vektörel

fonksiyon ise $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$ dır. $\vec{r} \cdot \vec{r} = c^2$
 $\vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{r}' = 0$
 $2\vec{r} \cdot \vec{r}' = 0$
 $\vec{r} \cdot \vec{r}' = 0$

Yay Uzunluğu

Bir $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ $a \leq t \leq b$ eğrisinin uzunluğu

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \text{ dir. } \vec{r}(t) \text{ yi bir parçeci-$$

ğin konum vektörü olarak düşünersek: $S = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$ olur.

* $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \cos t\vec{j} + \sin t\vec{k}$ eğrisinin $0 \leq t \leq \pi$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} - \sin t\vec{j} + \cos t\vec{k} \Rightarrow S = \int_0^\pi \underbrace{\sqrt{1 + \sin^2 t + \cos^2 t}}_{\sqrt{2}} dt = \underline{\underline{\sqrt{2}\pi}}$$