

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Ç.Ö.1

$D \neq \emptyset$ olmak üzere, $D \subset \mathbb{R}^2$ olsun. D deki her bir (x,y) noktasına bir $z=f(x,y)$ reel sayısını esleyen f kuralına "iki değişkenli fonksiyon" denir. D kümesine "Tanım Kümesi" (Bölgesi), $z=f(x,y)$ değerlerinin kümesine de "Değer Kümesi" denir.

İki değişkenli bir fonksiyon genel olarak $z=f(x,y)$ şeklinde gösterilir. Burada x,y bağımsız değişkenler, z ise bu değişkenlere bağlı değişkendir. İki değişkenli fonksiyon $F(x,y,z)=0$ şeklinde kapalı olarak da ifade edilebilir.

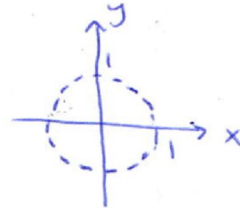
$z=f(x,y)$ fonksiyonu geometrik olarak uzayda bir yüzey üzerindeki bir noktanın z koordinatı olarak temsil edilebilir.

- Benzer şekilde $v=f(x,y,z)$; bağımsız değişkenleri x,y,z olan 3 değişkenli bir fonksiyondur.

- Genel olarak n değişkenli bir fonksiyon $v=f(x_1, \dots, x_n)$ şeklindedir.

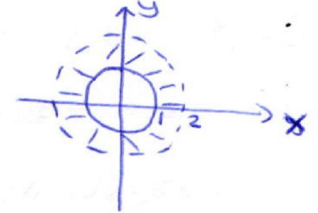
*) $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup şeklini çizin.

$$1-x^2-y^2 > 0 \rightarrow x^2+y^2 < 1 \Rightarrow$$



⑧ $z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(4-x^2-y^2) \rightarrow$ T. Bölgesi?

C.0.2

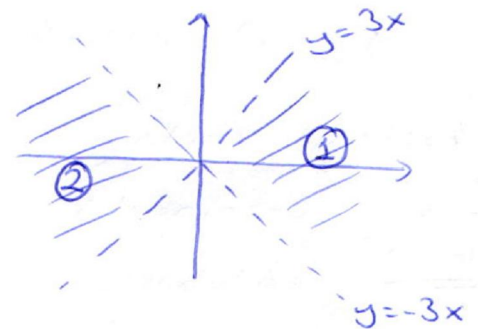
$$\left. \begin{array}{l} x^2+y^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 1 \\ 4-x^2-y^2 > 0 \Rightarrow 4 > x^2+y^2 \end{array} \right\} 1 \leq x^2+y^2 < 4 \Rightarrow$$


⑨ $z = \frac{1}{\sqrt{9x^2-y^2}}$ T. Bölgesi?

$$9x^2-y^2 > 0 \Rightarrow \begin{array}{cc} (3x-y) & (3x+y) \\ + & + \\ - & - \end{array} > 0$$

① $\left. \begin{array}{l} 3x-y > 0 \Rightarrow 3x > y \\ 3x+y > 0 \Rightarrow y > -3x \end{array} \right\} -3x < y < 3x$

② $\left. \begin{array}{l} 3x-y < 0 \Rightarrow 3x < y \\ 3x+y < 0 \Rightarrow y < -3x \end{array} \right\} 3x < y < -3x$

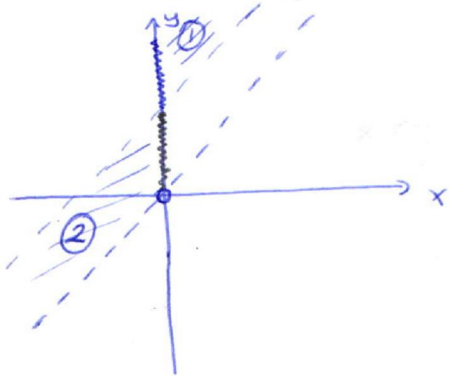


⑩ $f(x,y) = \ln[x \cdot \ln(y-x)]$ T. Bölgesi?

$$\begin{array}{cc} x \cdot \ln(y-x) > 0 & , \quad y-x > 0 & , \quad y-x \neq 1 & , \quad x \neq 0 \\ + & + & & - \\ - & - & & - \end{array}$$

① $x > 0, \ln(y-x) > 0, y > x \Rightarrow x > 0, y-x > 1, y > x \Rightarrow$ $x > 0$
 $y > x+1$

② $x < 0, \ln(y-x) < 0, y > x \Rightarrow x < 0, 0 < y-x < 1, y > x \Rightarrow$ $x < 0$
 $x < y < x+1$

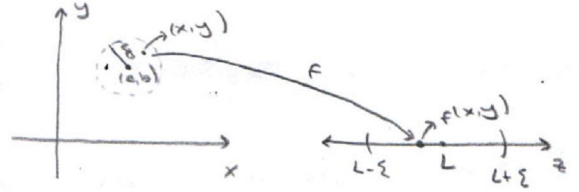


Limit ve Süreklilik

Her pozitif ε sayısı için, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ iken

$|f(x,y) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı mevcutsa $f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasındaki limiti L dir denir.

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ şeklinde gösterilir.



* Eğer limit varsa tektir.

* Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ in varlığı x , a 'ya sağdan veya soldan yaklaşıırken $f(x)$ in aynı sonlu sayıya yaklaşmasını gerektirir. Benzer olarak, iki değişkenli bir fonk. için, (x,y) , (a,b) ye nasıl yaklaşırsa yaklaşsa eğer $f(x,y)$ aynı L sayısına yaklaşıyorsa o zaman $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ limitine sahip olabiliriz. Özel olarak (x,y) (a,b) 'ye bir eğri boyunca yaklaşabilir.

* $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$: Düzlemde ($\mathbb{R}^2$ de) (x,y) ve (a,b) noktaları arasındaki mesafe, $|f(x,y) - L|$ ise $f(x,y)$ ve L arasındaki mesafedir.

Limit Kuralları: $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$ ise

C.0.6

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f \pm g) = L \pm M$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f}{g} = \frac{L}{M}$ ($M \neq 0$ koşuluyla)

* $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} 4x^2 + y^3 = 4 + 1 = 5$

* $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x-y}{x+yz} = \frac{1}{3}$

* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$ olduğunu gösterin.

Her $\varepsilon > 0$ için $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ iken $\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var mı?

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{4|x| \cdot y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{4|x| (x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta$$

$4\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0$ bulunur. Yani $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$ dir.

* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+,0^+)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = ?$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+,0^+)} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0^+,0^+)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0$$

* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos xy}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \frac{xy}{2})}{xy}$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2\sin^2 \frac{xy}{2}}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 \cdot \left(\frac{\sin \frac{xy}{2}}{\frac{xy}{2}} \right)^2 \cdot \frac{xy}{2}}{xy} = 1$$

Sandvich (Sıkıştırma) Teoremi

$(x,y) \neq (x_0,y_0)$ için, merkezi (x_0,y_0) da olan bir dairenin içinde $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ ise ve $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$ iken $g(x,y)$ ile $h(x,y)$ aynı L limitine yaklaşıyorlarsa o zaman

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \text{ dir.}$$

$$(*) \quad f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{y} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ile verilen $f(x,y)$ fonk-

yonunun $(0,0)$ noktasındaki limiti hesaplayınız.

$$y \neq 0 \text{ için } -1 \leq \sin \frac{1}{y} \leq 1 \text{ dir. O halde}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ ve } y \neq 0 \text{ için } -x^2 \leq \sin \frac{1}{y} \leq x^2 \text{ dir.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -x^2 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 = 0 \text{ olduğundan Sıkıştırma Teo. göre}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \cdot \sin \frac{1}{y} = 0 \text{ dir.}$$

İki Kat Limit (Ardışık Limit):

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ için:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right] = L_1 \quad \text{ve} \quad \lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right] = L_2 \quad \text{olsun.}$$

a) $L_1 = L_2$ ise fonksiyonun (a,b) noktasında iki kat limit vardır. (Bunu söylemek; $f(x,y)$ nin (a,b) de limit ^{sonuç} olduğunu söylemeye yetmez.)

b) $L_1 \neq L_2$ ise fonksiyonun (a,b) de iki kat limit yoktur. Dolayısıyla limiti yoktur.

Limitin Yokluğu İçin Gift Yol Testi

Eğer bir $f(x,y)$ fonksiyonunun; (x,y) noktası farklı iki yol boyunca (a,b) ye yaklaşıken farklı limitleri varsa bu durumda $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ mevcut değildir.

★ Örneğin $(0,0)$ noktasında $f(x,y)$ nin limitinin mevcut olmadığını göstermek için:

I. Yol: $\left. \begin{array}{l} y=x \\ y=x^2 \\ y=x^3 \\ \vdots \end{array} \right\}$ yolları boyunca alınan limitlerin sonucunun farklı olduğu gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir.

II. Yol: $y=kx$ veya $y=kx^2$ veya $y=kx^3 \dots$ yolları boyunca alınan limitlerin sonucunun k 'ye bağlı olduğu gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir.

III. Yol: iki kat limitin olmadığı gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir.

* $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ daki limitinin varlığını araştırınız.

Ç.Ö.9

$y=kx^2$ için $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 k x^2}{x^4 + k^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2k x^4}{x^4(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2} \rightarrow$ Sonuç k 'ye bağlı, limit yok

* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - y^2}{3y^2 + x^2}$ limitinin varlığını araştırınız.

I. Yol: $y=kx$ için $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - k^2 x^2}{3k^2 x^2 + x^2} = \frac{3-k^2}{3k^2+1} \rightarrow$ Sonuç k 'ye bağlı, limit yok

II. Yol: $y=x$ boyunca limit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x^2}{3x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$

$y=x^2$ " " : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x^4}{x^2 + 3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3-x^2)}{x^2(1+3x^2)} = 3$
Limit yok!

III. Yol: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{3x^2 - y^2}{3y^2 + x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3x^2}{x^2} \right] = 3$

$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - y^2}{3y^2 + x^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[-\frac{y^2}{3y^2} \right] = -\frac{1}{3}$

$\neq$ iki kat limit yok
Dolayısıyla limit mevcut değil!

Süreklilik: $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ise yani:

- ① fonksiyon (a,b) de limite sahip
 - ② fonksiyon (a,b) de tanımlı
 - ③ (a,b) daki limit $= f(a,b)$
- } ise fonk. (a,b) de sürekli dir.

* Bir fonksiyon tanım kümesinin her noktasında sürekli ise sürekli fonksiyondur.

* $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{y} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Fonk. $(0,0)$ de sürekli midir?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{x \cdot \sin \frac{1}{y}}_0 = 0$$

$$f(0,0) = 0 \checkmark$$

Fonk. tanımlı
değeri 0

Limit var
0

↘ ↙

$$\lim_{(x,y)} f(x,y) = 0 = f(0,0) = 0 \quad \text{Fonk. süreklidir}$$

$$(*) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Fonksiyonunun (0,0) daki sürekliliğini inceleyelim. Nedenini araştırıyoruz.

Fonksiyon (0,0) da tanımlıdır. ✓

$$y=mx \text{ boyunca limit: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(mx^2)}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(mx^2)}{mx^2} \cdot \frac{1}{1+m^2}$$

$$= \frac{m}{1+m^2} \rightarrow \text{Sonuç } m'ye \text{ bağımlı limit yok!}$$

$f(x,y)$ nin (0,0) da limiti mevcut olmadığından fonk. (0,0) da sürekli değildir.

Kısmi Türevler

$z = f(x,y)$ Fonksiyonunun x ve y değişkenine göre

1. mertebe kısmi türevleri:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1(x,y) = f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \Rightarrow y'yi \text{ sabit düşünüp } x'e \text{ göre türev alınır}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_2(x,y) = f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \Rightarrow x'i \text{ sabit düşünüp } y'ye \text{ göre türev alınır}$$

limitlerinin mevcut olması koşulu ile $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ fonksiyonlarıdır.

(11)

Burada $f_x(x,y)$, y sabit olmak üzere sadece x 'in bir fonksiyonu olarak göz önüne alınan $f(x,y)$ nin birinci mertebe türevidir. $f_y(x,y)$; x in sabit tutularak sadece y nin bir fonksiyonu olarak göz önüne alınan $f(x,y)$ nin birinci mertebe türevidir.

NOTASYON:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a,b)} = f_x(a,b) = f_1(a,b)$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(a,b)} = f_y(a,b) = f_2(a,b)$$

NOT: Toplamlar, çarpımlar, bölümler için geçerli olan tüm türev kuralları kısmi türevler için de geçerlidir.

$$*) z = x^3y^2 + x^4y + 4x^3y^4 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4x^3y + 12x^2y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + x^4 + 16x^3y^3 + 2y$$

$$*) f(x,y) = e^{xy} \cdot \cos(x+y) \Rightarrow f_1(0,\pi) = ?$$

$$f_1(x,y) = y e^{xy} \cos(x+y) - e^{xy} \sin(x+y)$$

$$f_1(0,\pi) = \pi \cdot e^0 \cdot \frac{\cos \pi}{-1} - e^0 \cdot \frac{\sin \pi}{0} = -\pi$$

$$*) f(x,y) = x^2y \text{ fonksiyonu } f_y \text{ 'yi tanım ile bulunuz.}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2(y+h) - x^2y}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 \cancel{h}}{\cancel{h}} = \underline{\underline{x^2}}$$

(12)

$$(*) f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ türevlerinin $(0,0)$ değerlerini mevcut ise hesaplayınız.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - \overbrace{f(0,0)}^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin \frac{1}{|h|} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - \overbrace{f(0,0)}^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin \frac{1}{|h|} = 0$$

Basit Zincir Kuralı (Bileşke Fonk. Türevi)

$$z = f(g(x,y)) \text{ için } \frac{\partial}{\partial x} f(g(x,y)) = f'(g(x,y)) \cdot g_x(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(g(x,y)) = f'(g(x,y)) \cdot g_y(x,y)$$

$$(*) z = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ ise } x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

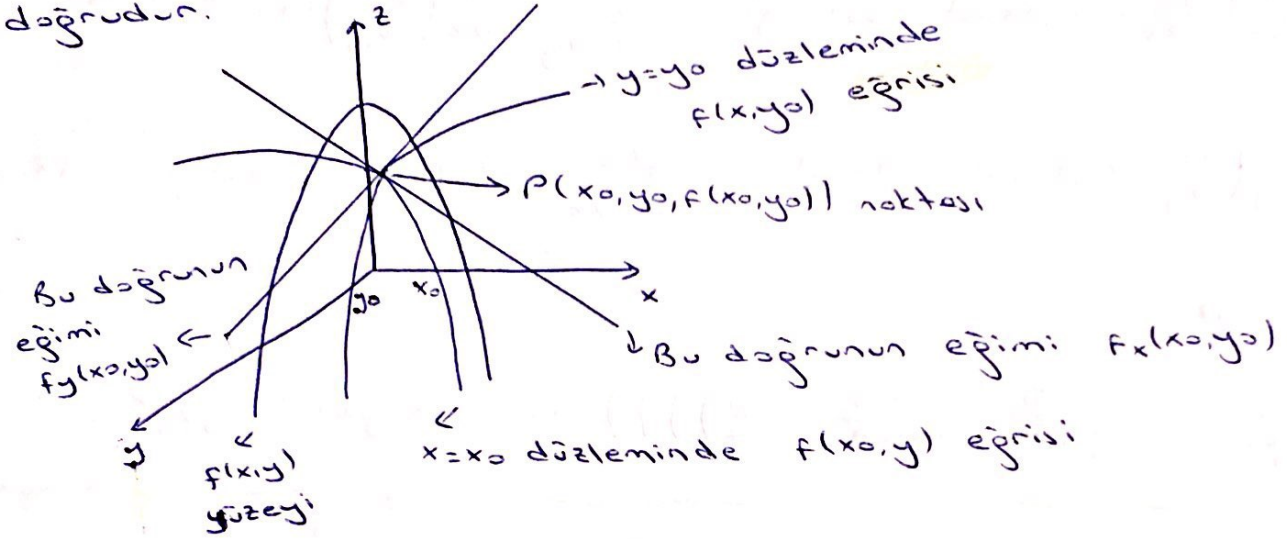
$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y} \cdot f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{-x}{y^2} \Rightarrow y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y} \cdot f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

+

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

* $z=f(x,y)$ yüzeyinin $x=x_0$ [$y=y_0$] düzlemiyle kesisimiyle oluşan $z=f(x_0,y)$ [$z=f(x,y_0)$] eğrisinin $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ noktasındaki eğimi f in y ye göre [x e göre] (x_0,y_0) noktasındaki kısmi türevine esittir. Eğrinin P deki teğet doğrusu bu eğimle P den geçen doğrudur.



* $z=f(x,y)$ yüzeyinin $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ noktasında iki tane teğet doğrusu olduğunu gördük. Bu iki doğrunun tanımladığı düzleme "teğet düzlem" denir.

İkiden fazla Değişkenli Fonksiyonların Türevi:

Eğer $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ n değişkenli bir fonksiyon ise o zaman f in her bir değişkene göre alınan n tane kısmi türevi $f_1(x_1,\dots,x_n), f_2(x_1,\dots,x_n), \dots, f_n(x_1,\dots,x_n)$ olur.

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2xy}{1+xz+yz^2} \right) = - \frac{2xy \cdot x}{(1+xz+yz^2)^2} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2xy}{1+xz+yz^2} \right) = \frac{2y(1+xz+yz^2) - 2xy \cdot z}{(1+xz+yz^2)^2}$$

Yüksek Mertebeden Türevler

C.0.14

ikinci ve daha yüksek mertebeden kısmi türevler, hesaplanmış mevcut kısmi türevlerin kısmi türevleri alınarak elde edilir.

* $z = f(x, y)$ için 2. mertebe kısmi türevler:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f_{11}(x, y) = f_{xx}(x, y) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f_{21}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f_{22}(x, y) = f_{yy}(x, y) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f_{12}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

* $w = f(x, y, z)$ ise:

$$\frac{\partial^5 w}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right) \right) = f_{32212}(x, y, z) = f_{zyyxy}(x, y, z)$$

* $f(x, y) = x \cos y + e^{x \cdot y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial y^2}, \frac{\partial f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + e^{x \cdot y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x \cdot y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \cos y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin y + e^x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sin y + e^x$$

* $z = \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \checkmark$$

Korşık Törev Teoremi

Eğer $f(x,y)$ ve onun kısmi törevleri f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} , (a,b) de süreklili ve (a,b) yi içeren bir bölgede tanımlı iseler $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ dir.

★ 2. mertebe törevlerde olduğu gibi süreklili olduğu müddetce tüm mertebeden törevlerin törev alma sırası bir önem ifade etmez.

(*) $z = e^{kx} \cdot \cos ky$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ old. gösterin.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -k e^{kx} \sin ky \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -k^2 e^{kx} \sin ky$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = k e^{kx} \cos ky \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -k^2 e^{kx} \sin ky \quad] =$$

★ Eğer tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ da $f'(a)$ türevine sahipse fonk. $x=a$ da sürekli'dir. Ancak, bu özellik kısmi türevlerde geçerli değildir.

Fok değişkenli fonksiyon bir noktada tüm 1. mertebeden türevlere sahip olsa bile fonk. o noktada sürekli olmayabilir.

★ $f(x,y)$ nin 1. mertebe kısmi türevleri f_x ve f_y (x_0, y_0) 'i içeren bir bölgede sürekli ise fonksiyon (x_0, y_0) da sürekli dir diyebiliriz.

$$*) f(x,y) = \begin{cases} 0 & , xy \neq 0 \\ 1 & , xy = 0 \end{cases}$$

a) $y=x$ boyunca $f(x,y)$ nin $(0,0)$ daki limiti?

b) f 'in $(0,0)$ da sürekli olmadığını gösterin

c) f_x ve f_y nin $(0,0)$ da mevcut olduğunu gösterin.

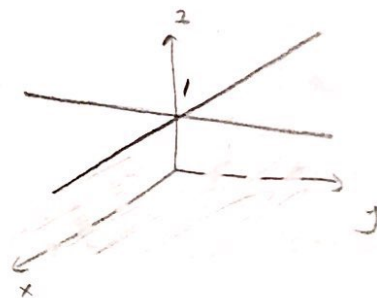
a) $y=x$ boyunca orijin hariç $xy \neq 0$ dir.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

$$b) f(0,0) = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

$> \neq$ sürekli değil



c) $f_x(0,0)$ için $y=0$ sabit $\Rightarrow x.y=0 \Rightarrow f(x,y)=1 \Rightarrow f_x(0,0)=0$ ✓

$f_y(0,0)$ için $x=0$ " $\Rightarrow x.y=0 \Rightarrow f(x,y)=1 \Rightarrow f_y(0,0)=0$ ✓

Zincir Kuralı

C.O.17

① Eğer $z=z(x,y)$ 1. mertebe kısmi türevleri sürekli olan bir fonksiyon ve $x=x(t)$ $y=y(t)$ türevlenebilir fonksiyonlar ise:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{dir.} \quad z \xrightarrow[\text{C.O.}]{} x, y \xrightarrow[\text{T.O.}]{} t$$

② $z=f(x,y)$ 1. mertebe kısmi türevleri sürekli olan bir fonksiyon ve $x=x(s,t)$ $y=y(s,t)$ s ve t nin türevlenebilir fonksiyonları ise o zaman:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$z \xrightarrow[\text{C.O.}]{} x, y \xrightarrow[\text{C.O.}]{} s, t$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

⊗ $w=xy$, $x=\cos t$, $y=\sin t$ ise $\left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=\pi/2}$ türevini zincir

kuralını kullanarak hesaplayın.

$$w \xrightarrow[\text{C.O.}]{} x, y \xrightarrow[\text{T.O.}]{} t$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x=0, y=1$$

$$= y \cdot (-\sin t) + x \cdot \cos t$$

$$\left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1 \cdot (-\sin \frac{\pi}{2}) + 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = -1$$

⊗ $w=xy+z$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t \Rightarrow \left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=0} = ?$

$$w \xrightarrow[\text{C.O.}]{} x, y, z \xrightarrow[\text{T.O.}]{} t$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$= y \cdot (-\sin t) + x \cdot \cos t + 1 \cdot 1$$

$$t=0 \Rightarrow x=1, y=0$$

$$\left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=0} = 0 \cdot (-\sin 0) + 1 \cdot \cos 0 + 1 = 2$$

*) $w = 2y + x + z^2$, $x = \frac{r}{s}$, $y = r^2 + \ln s$, $z = 2r \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$

r ve s cinsinden bulun.

$w \xrightarrow{\text{c.o.}} x, y, z \xrightarrow{\text{c.o.}} r, s$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{r}{s^2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{s} + 2z \cdot 0 = \frac{2s-r}{s^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot 2r + 2z \cdot 2 = \frac{1}{s} + 4r + 4z = 12r + \frac{1}{s}$$

*) $\frac{\partial}{\partial x} f(x^2y, x+2y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x^2y, x+2y)$ değerlerini f 'in kısmi türevleri cinsinden bulun.

$$\begin{aligned} x^2y &= u \\ x+2y &= v \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2y &= u \\ x+2y &= v \end{aligned} \right\} f(u, v)$$

$f \xrightarrow{\text{c.o.}} u, v \xrightarrow{\text{c.o.}} x, y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f_u \cdot (2xy) + f_v \cdot (1) = 2xy f_u + f_v$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f_u \cdot x^2 + f_v \cdot 2 = x^2 f_u + 2 f_v$$

Kapalı Fonksiyon Türevi : $z = f(x, y)$ olmak üzere,

$f(x, y, z) = 0$ fonksiyonu için :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} \text{ dir.}$$

ispat: $f(x, y, z) = 0$ ise

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{f_x}{f_z}$$

$$f \rightarrow x, y, z \rightarrow x, y \quad \left(\begin{aligned} x, y &\rightarrow \text{bağımsız değ.} \\ z &\rightarrow \text{bağımlı değ.} \end{aligned} \right)$$

① $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos y = 0$ ise $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0,0)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,0,0)}$ bulun. C.0.19

I. Yol (Uzun Yol)

$x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos y = 0 \rightarrow x'$ e göre türev alırsak

$3x^2 + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \left[z e^{xz} + x \frac{\partial z}{\partial x} e^{xz} \right] + \frac{\partial z}{\partial x} \cos y = 0 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow$

$\left. \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos y = 0 \rightarrow y'$ ye göre türev alırsak:

$2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + e^{xz} + y \times \frac{\partial z}{\partial y} e^{xz} + \frac{\partial z}{\partial y} \cos y - z \sin y = 0$

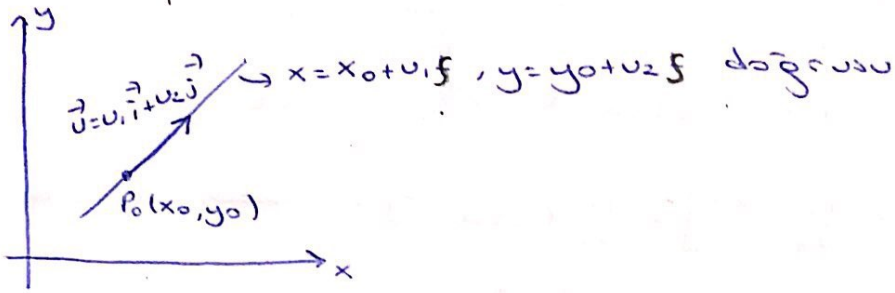
$x=y=z=0 \Rightarrow 1 + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -1$

II. Yol formül ile

$F: x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos y = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z} = - \frac{3x^2 + zye^{xz}}{2z + xye^{xz} + \cos y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0,0)} = 0$

$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y}{F_z} = - \frac{e^{xz} - z \sin y}{2z + xye^{xz} + \cos y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,0,0)} = -1$



$P_0(x_0, y_0)$ noktasında, $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$ birim vektörü yönünde $f(x, y)$ fonksiyonunun türevi, limitin mevcut olması halinde

$$\left(\frac{df}{ds} \right)_{u, P_0} = (D_u f)_{P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u_1 s, y_0 + u_2 s) - f(x_0, y_0)}{s} \quad \text{dır.}$$

$f_x(x_0, y_0) \rightarrow f$ in $\vec{i}$ yönündeki
 $f_y(x_0, y_0) \rightarrow f$ in $\vec{j}$ " " } yönlü türevleridir.

④ Yönlü türev tanımı ile $P_0(1, 2)$ noktasında $f(x, y) = x^2 + yx$ fonksiyonunun $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$ vektörü yönündeki türevini hesaplayın.

$$(D_u f)_{P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} s\right) - f(1, 2)}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} s\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s\right) - 3}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} s + s^2}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + s \right) = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{2}}}}$$

Gradyent Vektör

C.O.24

$f(x,y)$ fonksiyonunun gradyent vektörü:

$$\text{Grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \quad \text{dör.}$$

Yönlü Türev: Eğer $f(x,y)$, $P_0(x_0,y_0)$ içeren bir bölgede türelenebilir ise, f 'in P_0 daki $\vec{v}$ birim vektörü yönündeki türevi

$$(D_{\vec{v}}f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{v} \quad \text{formülü ile hesaplanır.}$$

$x = x_0 + s u_1$
 $y = y_0 + s u_2$
 $f \rightarrow x, y \rightarrow s \quad \left(\frac{df}{ds} \right)_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} = f_x \cdot u_1 + f_y \cdot u_2 = \nabla f \cdot \vec{v}$

*) $f(x,y) = x e^y + \cos xy$ nin $(2,0)$ noktasındaki $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ yönündeki türevi?

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\nabla f = (e^y - y \sin xy)\vec{i} + (x e^y - x \sin xy)\vec{j}$$

$$\nabla f|_{(2,0)} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$(D_{\vec{v}}f)_{(2,0)} = \left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j} \right) (\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = \underline{\underline{-1}}$$

NOT: $z = f(x,y)$ nin $(D_{\vec{v}}f)_{P_0}$ türevi:

① $\vec{v}$ yönünde P_0 daki yönlü türev

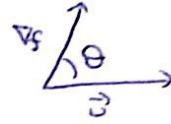
② " " " " artış hızı/oranı

③ " " " " azalış hızı/oranı

④ " " " " değişim oranı anlamlarına gelir.

Yönlü Türevin Özellikleri

$$D_{\vec{u}}F = \nabla F \cdot \vec{u} = |\nabla F| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\theta = |\nabla F| \cdot \cos\theta$$



① $\cos\theta = 1$ yani $\theta = 0$ olduğunda F fonksiyonu en hızlı şekilde artar (en büyük yönlü türev değerine ulaşır). $\vec{u}$ ile ∇F aynı yöndedir. Yani, F en çok P 'deki gradyent vektörü yönünde artar. Bu yöndeki türev:

$$D_{\vec{u}}F = |\nabla F| \cdot (\cos\theta) = |\nabla F|$$

② Benzer şekilde, F fonksiyonu en fazla $-\nabla F$ yönünde azalır. ($\theta = 180^\circ$). Bu yöndeki türev:

$$D_{\vec{u}}F = |\nabla F| \cdot \cos(\pi) = -|\nabla F|$$

③ $\nabla F \neq 0$ gradyenine dik olan herhangi bir $\vec{u}$ yönü F 'deki sıfır değişimin yönüdür. Çünkü $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir ve

$$D_{\vec{u}}F = |\nabla F| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ dir.}$$

* $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ nin aşağıdaki durumlarda yönünü bulun.

a) (1,1) de en çok artan

b) (1,1) " " " azalan

c) " F 'deki sıfır değişimin yönleri nedir?

$$\nabla F = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \nabla F|_{(1,1)} = \vec{i} + \vec{j}$$

a) $\vec{u}$ ile ∇F aynı yöndedir. $\vec{u} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

b) $\vec{u}$ ile ∇F ters yönlü. $\vec{u} = -\frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

c) $\vec{u} \perp \nabla F \Rightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} \quad \nabla F = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \vec{u} \cdot \nabla F = 0$

$$a + b = 0 \Rightarrow a = -b \quad a = 1 \Rightarrow b = -1 \\ a = -1 \Rightarrow b = 1$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \quad u_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

* $f(x,y)$ türevlenebilir fonksiyonunun tanım kümesinin her (x_0, y_0) noktasında, f in gradyent vektörü $\nabla f, (x_0, y_0)$ da seviye eğrisine normaldir.

 $f(x,y)$ fonksiyonu $\vec{r} = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$ eğrisi boyunca sabit değer alıyorsa $f(g(t), h(t)) = c$ dir. t 'ye göre türev:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \right) (g'(t)\vec{i} + h'(t)\vec{j}) = 0$$

Gradyentler için Cebirsel Kurallar

$$\textcircled{1} \nabla(f \cdot g) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$$

$$\textcircled{2} \nabla(f \cdot g) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$$

$$\textcircled{3} \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}$$

$\nabla f \cdot \vec{r}'(t) = 0 \rightarrow$ Teğet $\perp \nabla f$
 $\nabla f \rightarrow$ eğriye normal

3 Değişkenli Fonksiyonlar

Türevlenebilir bir $f(x,y,z)$ fonksiyonu ve $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ birim vektörü için:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3$$

* Daha önce iki değişkenli fonksiyonlar için belirttiğimiz kurallar 3 değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

* $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ in $P(1,1,0)$ noktasında $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ yönündeki türevi bulunuz. f en hızlı olarak P_0 da hangi yönde değişir? Bu yöndeki değişim oranı nedir?

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

$$\nabla f = (3x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j} - \vec{k} \quad \nabla f|_{(1,1,0)} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$(D_u f)_{P_0} = \vec{u} \cdot \nabla f|_{P_0} = \frac{4}{7}$$

Fonksiyon en hızlı $\nabla f = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ yönünde artar, $-\nabla f$ yönünde azalır. Bu yönlerde değişim oranları:

$$|\nabla f| = 3 \quad -|\nabla f| = -3$$