



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

ELEKTRİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

DEVRE TEORİSİ

Ders Notu-5

DC Devrelerde

- **ÇEVRE AKIMLARI YÖNTEMİ (ÇAY)**
- **DÜĞÜM GERİLİMLERİ YÖNTEMİ (DÜGY)**

Doç. Dr. Recep YUMURTACI

DC ELEKTRİK DEVRELERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**Gevre Akımları Yöntemi (GAY)**

①

* G.A.Y. ile Devre Denklemlerinin Adım-Adım Elde Edilmesi

1. Adım: Devredeki akım kaynakları kaldırılır, akımı bilimeyen "Bağımsız Gevresler" belirlenir. Her bağımsız gevre için keyfi olarak rastgele bir "gevre yönü" (gevre akımı yönü) seçilir. Sonra kaldırılan akım kaynakları tekrar devreye bağlanır ve her akım kaynağı için birer gevre belirlenir. Akım kaynağının gevre yönü, akım kaynağının yönündedir ve değeri de akım kaynağının akımına eşittir.

* Devredeki dirençler için rastgele akım yönü seçilir.

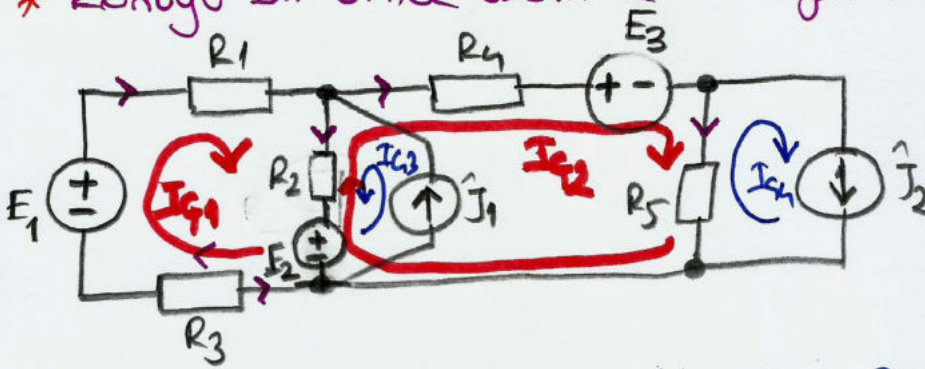
2. Adım: Devredeki tüm dirençlerin akımları "gevre akımları cinsinden" yazılır.

3. Adım: Akımı bilinmeyen bağımsız gevresler için Kirchhoff'un Gerilimler Yasası (KVL) yardımıyla **gevre denklemleri** yazılır. Gevre denklemleri yazılırken, direnç akım yönü o gevrenin yönü ile aynı ise direncin gerilimi (+), ters ise (-) alınır.

4. Adım: Direnç gerilimleri $V = R \cdot I$ bağıntısında yazılır ve denklemlerde direnç akımları (I_R) yerine gevre akımları cinsinden eşleştirmeler yapılır.

5. Adım: Denklemler düzenlenir ve matris biçiminde yazılır.

* Konuyu bir örnek üzerinde inceleyelim:



Gevre akımları:

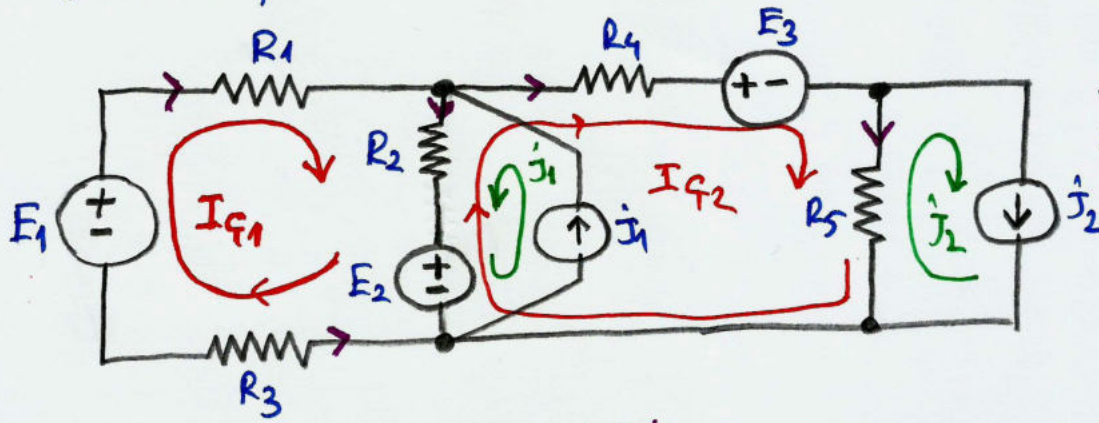
$I_{q1} = ?$
 $I_{q2} = ?$ } BİLİNMEYENLER

$I_{q3} = \hat{I}_1$
 $I_{q4} = \hat{I}_2$ } BİLİNENLER

Direnç akımlarını Gevre Akımları Cinsinden yazalım:

$$I_{R1} = I_{q1}, \quad I_{R2} = I_{q1} - I_{q2} + \hat{I}_1, \quad I_{R3} = -I_{q1}$$

$$I_{R4} = I_{q2}, \quad I_{R5} = I_{q2} - I_{q4} = I_{q2} - \hat{I}_2$$



$$\begin{aligned} I_{R1} &= I_{q1} \\ I_{R2} &= I_{q1} - I_{q2} + \hat{J}_1 \\ I_{R3} &= -I_{q1} \\ I_{R4} &= I_{q2} \\ I_{R5} &= I_{q2} - \hat{J}_2 \end{aligned}$$

I_{q1} çevresi için çevre denklemi:

$$-E_1 + V_{R1} + V_{R2} + E_2 - V_{R3} = 0$$

$$-E_1 + R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + E_2 - R_3 I_{R3} = 0$$

$$-E_1 + R_1 I_{q1} + R_2 (I_{q1} - I_{q2} + \hat{J}_1) + E_2 - R_3 (-I_{q1}) = 0$$

$$(R_1 + R_2 + R_3) I_{q1} - R_2 I_{q2} - E_1 + E_2 + R_2 \hat{J}_1 = 0 \quad \text{1. Denklemler}$$

I_{q2} çevresi için çevre denklemi:

$$-E_2 - V_{R2} + V_{R4} + E_3 + V_{R5} = 0$$

$$-E_2 - R_2 I_{R2} + R_4 I_{R4} + E_3 + R_5 I_{R5} = 0$$

$$-E_2 - R_2 (I_{q1} - I_{q2} + \hat{J}_1) + R_4 I_{q2} + E_3 + R_5 (I_{q2} - \hat{J}_2) = 0$$

$$-R_2 I_{q1} + (R_2 + R_4 + R_5) I_{q2} - E_2 + E_3 - R_2 \hat{J}_1 - R_5 \hat{J}_2 = 0 \quad \text{2. Denklemler}$$

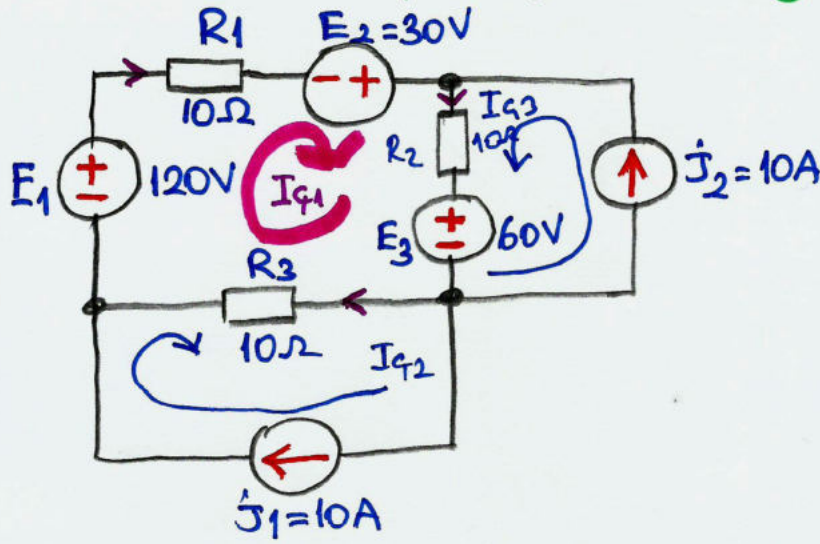
Devre Denklemleri:

$$(R_1 + R_2 + R_3) I_{q1} - R_2 I_{q2} - E_1 + E_2 + R_2 \hat{J}_1 = 0$$

$$-R_2 I_{q1} + (R_2 + R_4 + R_5) I_{q2} - E_2 + E_3 - R_2 \hat{J}_1 - R_5 \hat{J}_2 = 0$$

Denklemleri Matris Biçiminde Yazalım:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_3) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2 + R_4 + R_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ -R_2 & -R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{J}_1 \\ \hat{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Örnek (DC Devre, GAY, Bir bilinmeyenli, $\sum P=0$ isteniyor)

Devreyi G.A.Y. ile gözünüz.
 $\sum P=0$ olduğunu gösteriniz

Gözüm:

* Gevre akımları:

$$I_{q1}=? , I_{q2}=\hat{J}_1=10A \text{ ve } I_{q3}=\hat{J}_2=10A$$

* Direnç akımlarını gevre akımları cinsinden yazalım:

$$I_{R1}=I_{q1}, I_{R2}=I_{q1}+\hat{J}_2, I_{R3}=I_{q1}-\hat{J}_1$$

* Akımı bilinmeyen I_{q1} gevre için gevre denklemi:

$$-E_1 + R_1 \cdot I_{q1} - E_2 + R_2 \cdot I_{R2} + E_3 + R_3 \cdot I_{R3} = 0$$

$$-E_1 + R_1 \cdot I_{q1} - E_2 + R_2 \cdot (I_{q1} + \hat{J}_2) + E_3 + R_3 \cdot (I_{q1} - \hat{J}_1) = 0$$

$$(R_1 + R_2 + R_3) \cdot I_{q1} - E_1 - E_2 + E_3 - R_3 \cdot \hat{J}_1 + R_2 \cdot \hat{J}_2 = 0$$

$$(R_1 + R_2 + R_3) I_{q1} = E_1 + E_2 - E_3 + R_3 \cdot \hat{J}_1 - R_2 \cdot \hat{J}_2 = 0$$

Matris biçiminde de yazabiliriz:

$$[(R_1 + R_2 + R_3)] \cdot [I_{q1}] = [1 \ 1 \ -1] \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} + [R_3 \ -R_2] \cdot \begin{bmatrix} \hat{J}_1 \\ \hat{J}_2 \end{bmatrix}$$

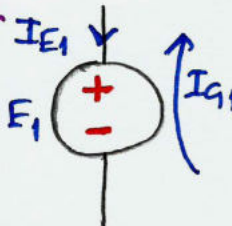
$$I_{q1}=?$$

$$(10 + 10 + 10) \cdot I_{q1} = 120 + 30 - 60 + 10 \cdot 10 - 10 \cdot 10$$

$$30 I_{q1} = 90 \Rightarrow \boxed{I_{q1} = 3A}$$

Gerilim ve Akım Kaynaklarının Güçlerinin Hesaplanması:

E₁

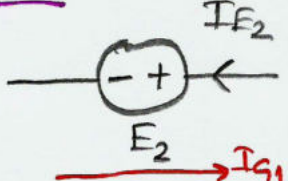


$$I_{E1} = -I_{Q1} = -3 \text{ A}$$

$$P_{E1} = E_1 \cdot I_{E1} = E_1 \cdot (-I_{Q1}) = 120 \cdot (-3) \Rightarrow \boxed{P_{E1} = -360 \text{ W}}$$

* P_{E1} 'in işaretinin (-) olması, E_1 'in devreye enerji verdiğini üretici (kaynak) olarak çalıştığını gösterir.

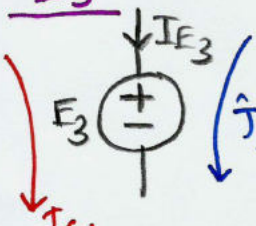
E₂



$$I_{E2} = I_{Q1} = -3 \text{ A}$$

$$P_{E2} = E_2 \cdot I_{E2} = E_2 \cdot (-I_{Q1}) = 30 \cdot (-3) \Rightarrow \boxed{P_{E2} = -90 \text{ W}}$$

E₃

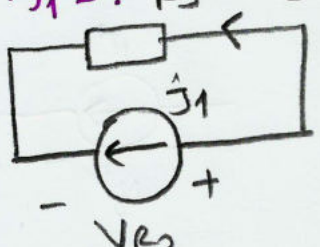


$$I_{E3} = I_{Q1} + \hat{J}_2 = 3 + 10 = 13 \text{ A}$$

$$P_{E3} = E_3 \cdot I_{E3} = 60 \cdot 13 \Rightarrow \boxed{P_{E3} = 780 \text{ W}}$$

* P_{E3} 'ün işaretinin (+) olması, E_3 'ün devreden enerji aldığı (şarj olan bir akü bataryası gibi) tüketici olduğunu gösterir.

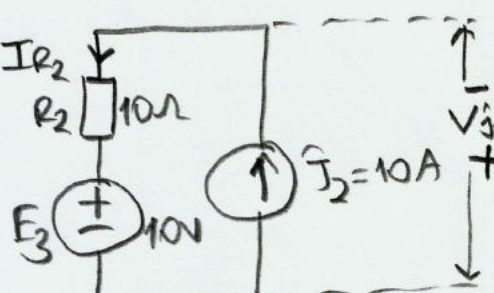
$P_{\hat{J}_1} = ?$



$$P_{\hat{J}_1} = \hat{J}_1 \cdot V_{j1} = \hat{J}_1 \cdot V_{R3} = \hat{J}_1 \cdot R_3 \cdot I_{R3} = \hat{J}_1 \cdot R_3 \cdot (I_{Q1} - \hat{J}_1)$$

$$P_{\hat{J}_1} = 10 \cdot 10 \cdot (3 - 10) \Rightarrow \boxed{P_{\hat{J}_1} = -700 \text{ W}}$$

$P_{\hat{J}_2} = ?$



$$V_{\hat{J}_2} = -(V_{R2} + E_3) = -(R_2 I_{R2} + E_3)$$

$$V_{\hat{J}_2} = -(R_2 \cdot (I_{Q1} + \hat{J}_2) + E_3) = -(10(3 + 10) + 60)$$

$$V_{\hat{J}_2} = -190 \text{ V}$$

$$P_{\hat{J}_2} = \hat{J}_2 \cdot V_{j2} = 10 \cdot (-190) \Rightarrow \boxed{P_{\hat{J}_2} = -1900 \text{ W}}$$

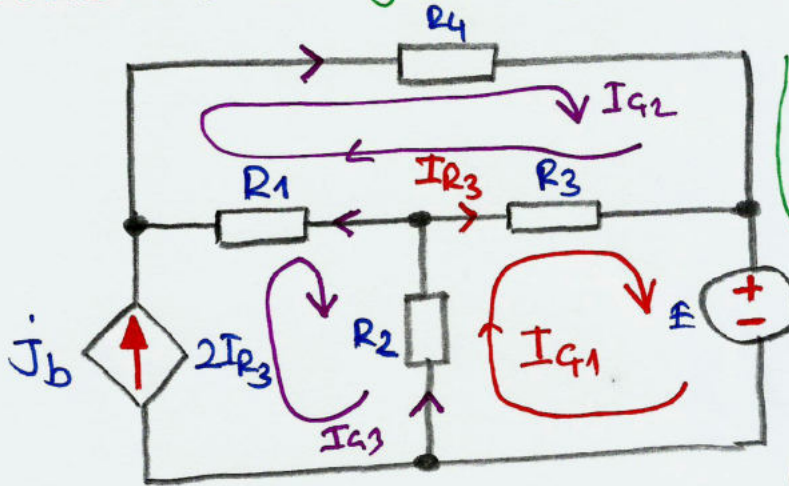
Dirençlerin Güçlerinin Hesaplanması:

$$P_{R1} = R_1 \cdot I_{E1}^2 = R_1 \cdot I_{Q1}^2 = 10 \cdot 3^2 \Rightarrow \boxed{P_{R1} = 90 \text{ W}}$$

$$P_{R2} = R_2 \cdot I_{E2}^2 = R_2 \cdot (I_{Q1} + \hat{J}_2)^2 = 10 \cdot (3 + 10)^2 \Rightarrow \boxed{P_{R2} = 1690 \text{ W}}$$

$$P_{R3} = R_3 \cdot I_{E3}^2 = R_3 \cdot (I_{Q1} - \hat{J}_1)^2 = 10 \cdot (3 - 10)^2 \Rightarrow \boxed{P_{R3} = 490 \text{ W}}$$

Eleman	GÜÇ	
	Üreteç	Tüketici
E_1	-360W	
E_2	-90W	
E_3		780W
$\dot{J}_1$	-700W	
$\dot{J}_2$	-1900W	
R_1		90W
R_2		1690W
R_3		490W
TOPLAM	-3090W	3090W

Örnek (DC Bağımlı Kaynaklı Devre, GAY)

a) GAY ile devre denklemlerini adım-adım elde ediniz ve matris biçiminde yazınız

b) Elde ettiğiniz denklemi gözerek R_3 direncinin gücünü hesaplayınız. ($P_{R3} = ?$)

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$$

Gözüm

a) * Çevre akımları: $I_{G1} = ?$, $I_{G2} = ?$, $I_{G3} = \hat{J}_b = 2I_{R3} = 2(I_{G1} - I_{G2})$

* Direnç akımlarını çevre akımları cinsinden yazalım:

$$I_{R1} = I_{G2} - \hat{J}_b, \quad I_{R2} = I_{G1} - \hat{J}_b, \quad I_{R3} = I_{G1} - I_{G2}, \quad I_{R4} = I_{G2}$$

* Akımı bilinmeyen çevreler için çevre denklemlerini yazalım:

I_{G1} çevresi için:

$$R_2 \cdot I_{R2} + R_3 \cdot I_{R3} + E = 0$$

$$R_2 \cdot (I_{G1} - \hat{J}_b) + R_3 \cdot (I_{G1} - I_{G2}) + E = 0$$

$$R_2 \cdot (I_{G1} - 2(I_{G1} - I_{G2})) + R_3(I_{G1} - I_{G2}) + E = 0$$

$$R_2 I_{G1} - 2R_2 I_{G1} + 2R_2 I_{G2} + R_3 I_{G1} - R_3 I_{G2} + E = 0$$

$$(R_3 - R_2) \cdot I_{G1} + (2R_2 - R_3) I_{G2} + E = 0 \quad \underline{\text{1. denklem}}$$

I_{G2} çevresi için:

$$-R_3 \cdot I_{R3} + R_1 \cdot I_{R1} + R_4 \cdot I_{R4} = 0$$

$$-R_3 \cdot I_{R3} + R_1(I_{G2} - \hat{J}_b) + R_4 \cdot I_{G2} = 0$$

$$-R_3 I_{R3} + R_1 \cdot I_{G2} - R_1 \cdot 2I_{R3} + R_4 \cdot I_{G2} = 0$$

$$(-2R_1 - R_3) I_{R3} + (R_1 + R_4) I_{G2} = 0$$

$$(-2R_1 - R_3)(I_{G1} - I_{G2}) + (R_1 + R_4) I_{G2} = 0$$

$$(-2R_1 - R_3) \cdot I_{G1} + (3R_1 + R_3 + R_4) I_{G2} = 0 \quad \underline{\text{2. denklem}}$$

$$(R_3 - R_2) \cdot I_{G1} + (2R_2 - R_3) \cdot I_{G2} = -E$$

$$(-2R_1 - R_3) \cdot I_{G1} + (3R_1 + R_3 + R_4) \cdot I_{G2} = 0$$

* Denklemleri Matris Biçiminde Yazalım:

$$\begin{bmatrix} (R_3 - R_2) & (2R_2 - R_3) \\ (-2R_1 - R_3) & (3R_1 + R_3 + R_4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{G1} \\ I_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot E$$

b) Sayısal çözüm

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10\Omega, E = 120V$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -30 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{G1} \\ I_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -120 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{G1} = \frac{\begin{vmatrix} -120 & 10 \\ 0 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ -30 & 50 \end{vmatrix}} = \frac{-120 \cdot 50 - 0 \cdot 10}{0 \cdot 50 - (-30 \cdot 10)} = \frac{-120 \cdot 50}{30 \cdot 10} \Rightarrow I_{G1} = -20A$$

$$I_{G2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -120 \\ -30 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ -30 & 50 \end{vmatrix}} = \frac{0 - (-30) \cdot (-120)}{0 \cdot 50 - 10 \cdot (-30)} = \frac{-3600}{10 \cdot 30} \Rightarrow I_{G2} = -12A$$

$$P_{R3} = ?$$

$$P_{R3} = R_3 \cdot I_{R3}^2 = R_3 (I_{G1} - I_{G2})^2 = 10 \cdot (-20 - (-12))^2 = 10 \cdot (-8)^2$$

$$P_{R3} = 640W$$

Sayısal Çözüm (Matris tersi yardımıyla)

Hatırlatma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$A \cdot \underline{x} = \underline{B}$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{B} \Rightarrow \underline{x} = \bar{A}^1 \cdot \underline{B}$$

2x2 matrisin tersi

Determinant: $\Delta = (a \cdot d - b \cdot c)$ olmak üzere,

$$\bar{A}^1 = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x} = \bar{A}^1 \cdot \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(a \cdot d - b \cdot c)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -30 & 50 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} -120 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \Rightarrow \Delta = (0 \cdot 50 - 10 \cdot (-30)) = 300$$

$$\bar{A}^1 = \frac{1}{300} \cdot \begin{bmatrix} 50 & -10 \\ 30 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{bmatrix} = \frac{1}{300} \cdot \begin{bmatrix} 50 & -10 \\ 30 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -120 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{bmatrix} = \frac{1}{300} \cdot \begin{bmatrix} 50 \cdot (-120) + 0 \cdot (-10) \\ -120 \cdot 30 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{300} \cdot \begin{bmatrix} -6000 \\ -3600 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{I_{q1} = -20A}$$
$$\boxed{I_{q2} = -12A}$$

Doç.Dr. Recep YUMURTACI - YTÜ Elektrik Müh.Bölümü

Düğüm Gerilimleri Yöntemi (DÜGY)

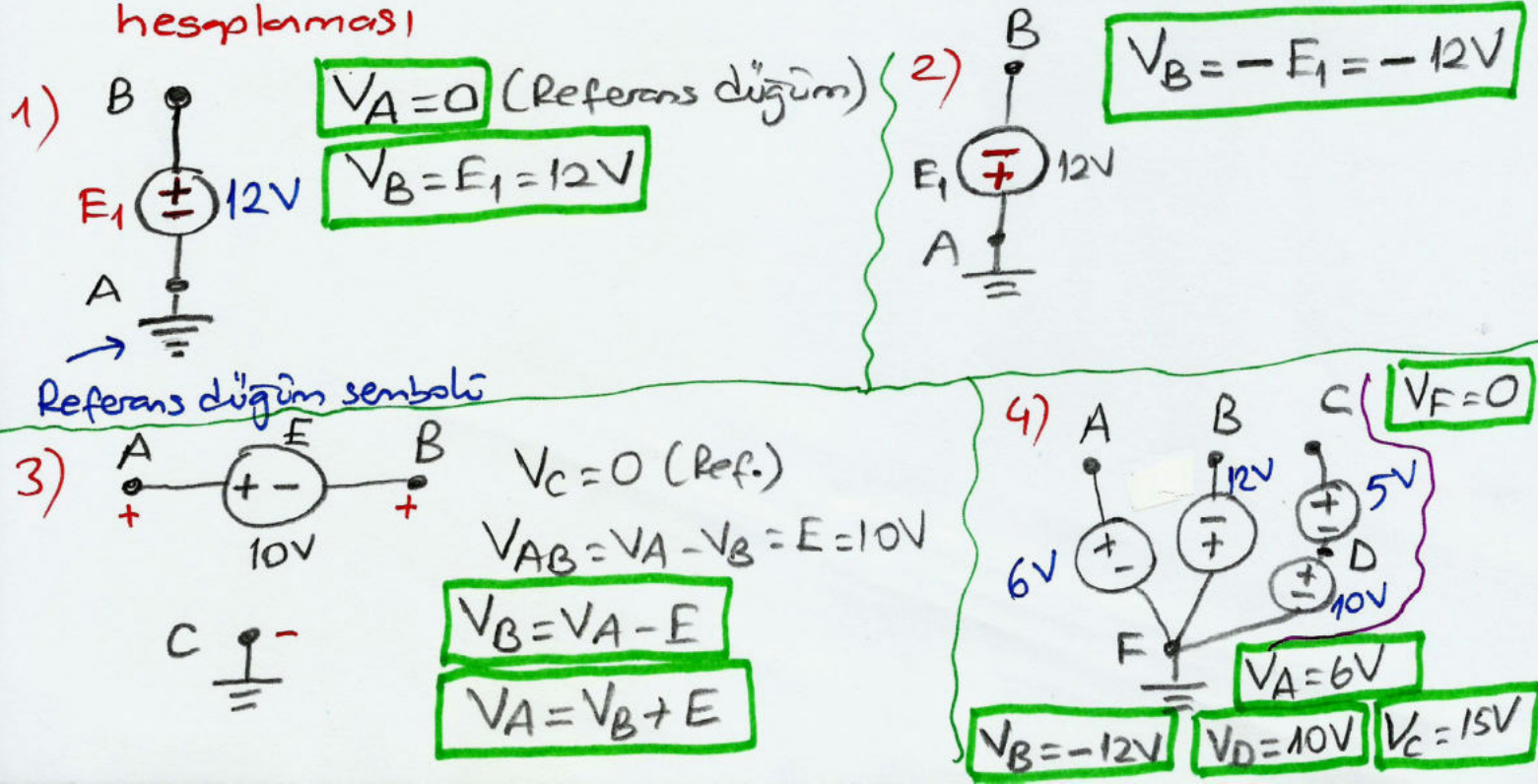
8

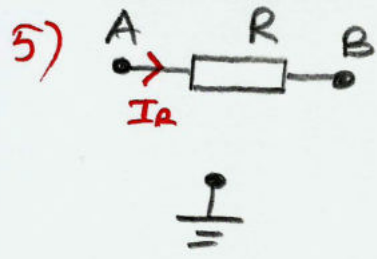
Referans Düğüm: Devredeki diğer tüm düğümlerin gerilimleri referans düğüme göre tanımlanır ve ölçülür. (Diğer düğümlerin gerilimleri ölçülürken daima voltmetrenin (-) ucu referans düğüme, (+) ucu gerilimi ölçülecek düğüme bağlanır.

Referans düğümün belirlenmesi

- 1) Devrede sadece bir tane gerilim kaynağı varsa, o gerilim kaynağının (-) ucu referans düğüm seçilir.
- 2) Devrede birden fazla gerilim kaynağı varsa ve bu gerilim kaynaklarının birer uçları ortak olarak aynı düğüme bağlı ise o ortak düğüm referans düğüm seçilir.
- 3) Devrede birden fazla gerilim kaynağı varsa fakat bu gerilim kaynaklarının bağlı olduğu ortak bir düğüm yok ise o zaman herhangi bir düğüm referans düğüm seçilebilir.

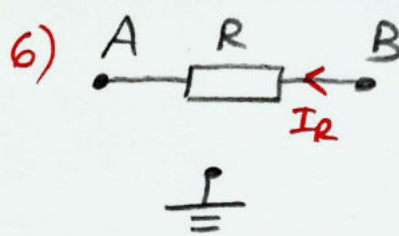
* Referans düğüme göre diğer düğümlerin gerilimlerinin değer ve dirençlerin akımlarının düğüm gerilimlerine göre hesaplanması



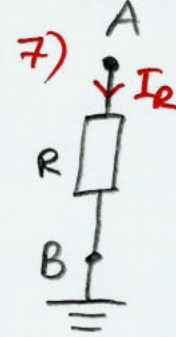


$$I_R = \frac{V_A - V_B}{R}$$

$$I_R = G \cdot (V_A - V_B)$$



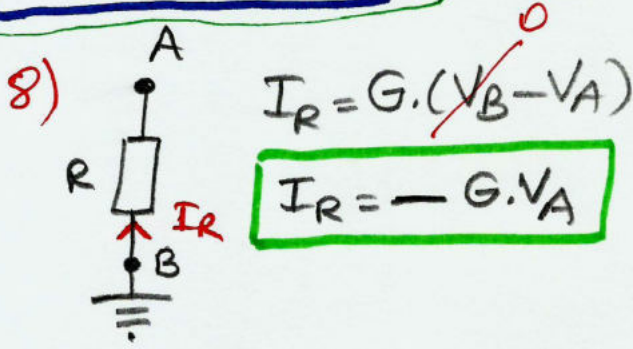
$$I_R = G \cdot (V_B - V_A)$$



$$I_R = G(V_A - V_B)$$

$$I_R = G \cdot V_A$$

(9)



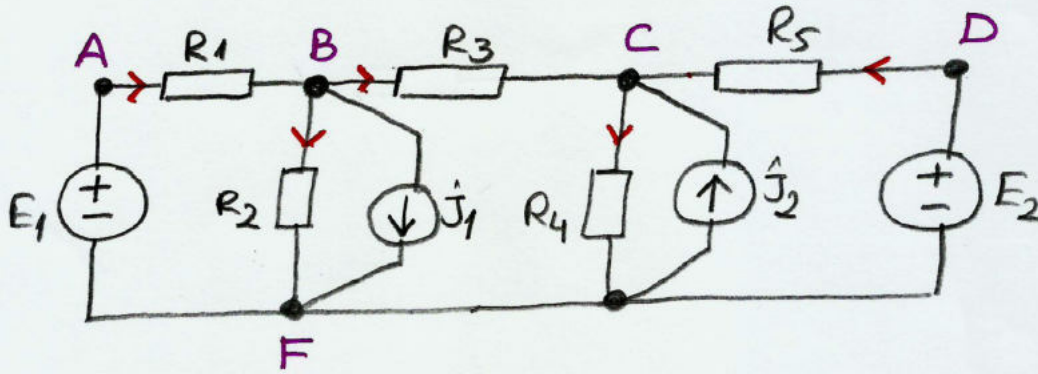
$$I_R = G \cdot (V_B - V_A)$$

$$I_R = -G \cdot V_A$$

Doç. Dr. Recep YUMURTACI
-TÜ-

DC Elektrik Devresinin Düğüm Gerilimleri Yöntemi (DÜĞY) ile çözülmesini ve devre denklemlerinin DÜĞY ile "Adım-Adım" elde edilmesini bir örnek üzerinde inceleyelim:

Örnek:

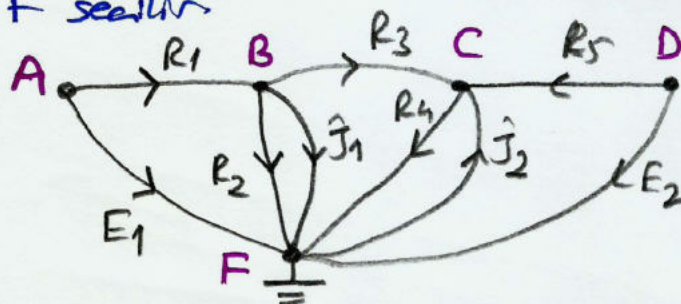


1. Adım: Referans düğüm belirlenir. Dirençler için rastgele akım yönü işaretlenir (sealır). Devre grafi çizilir, gerilimi bilinmeyen düğümler belirlenir.

HATIRLATMA: Akım yönü kabulü → Düğümden çıkan akım yönü (+)
→ Düğüme gelen akım yönü (-)

Referans düğüm: F sealır

Devre grafi:



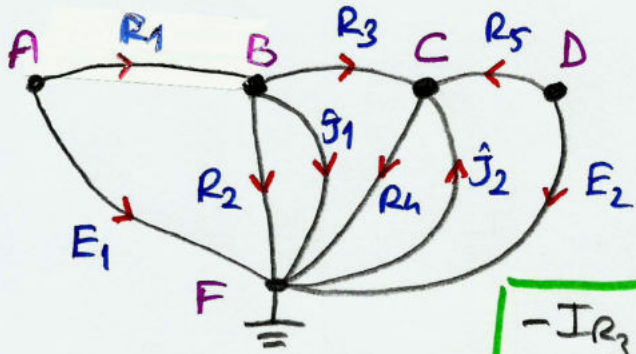
Düğüm gerilimleri

$$V_F = 0, V_A = E_1, V_D = E_2$$

Bilinenler

$V_B = ?$
 $V_C = ?$ } Bilinmeyenler

2. Adım: Gerilimi bilinmeyen düğümler (B ve C) için düğüm denklemleri yazılır. (Yani, Kirchhoff'un Akımlar Yasası (KCL) uygulanır)



B düğümü için

$$-I_{R1} + I_{R2} + I_{R3} + \hat{J}_1 = 0 \quad (1)$$

C düğümü için

$$-I_{R3} + I_{R4} - \hat{J}_2 - I_{R5} = 0 \quad (2)$$

3. Adım: Direnç akımları $I_R = G \cdot V_R$ şeklinde yazılır. Direnç gerilimleri düğüm gerilimleri cinsinden yazılır ve bu direnç akımları (1) ve (2) eşitliklerinde yerine konulur.

Direnç Akımları:

$$I_{R1} = G_1 \cdot V_{R1} = G_1 (V_A - V_B) \Rightarrow I_{R1} = G_1 (E_1 - V_B)$$

$$I_{R2} = G_2 \cdot V_{R2} = G_2 (V_B - V_F) \Rightarrow I_{R2} = G_2 \cdot V_B$$

$$I_{R3} = G_3 \cdot V_{R3} = G_3 (V_B - V_C) \Rightarrow I_{R3} = G_3 (V_B - V_C)$$

$$I_{R4} = G_4 \cdot V_{R4} = G_4 (V_C - V_F) \Rightarrow I_{R4} = G_4 \cdot V_C$$

$$I_{R5} = G_5 \cdot V_{R5} = G_5 (V_D - V_C) \Rightarrow I_{R5} = G_5 (E_2 - V_C)$$

Elde ettiğimiz düğüm gerilimlerine bağlı direnç akımlarını (1) ve (2) eşitliklerinde yerine yazalım:

(1) için

$$-G_1 \cdot (E_1 - V_B) + G_2 \cdot V_B + G_3 (V_B - V_C) + \hat{J}_1 = 0$$

$$-G_1 E_1 + G_1 V_B + G_2 V_B + G_3 V_B - G_3 V_C + \hat{J}_1 = 0$$

$$(G_1 + G_2 + G_3) \cdot V_B - G_3 \cdot V_C - G_1 \cdot E_1 + \hat{J}_1 = 0 \quad \text{1. DENKLEM}$$

$$(2) \text{ denklemini: } -I_{R3} + I_{R4} - \hat{J}_2 - I_{R5} = 0$$

①①

$$-G_3(V_B - V_C) + G_4 \cdot V_C - \hat{J}_2 - G_5(E_2 - V_C) = 0$$

$$-G_3 \cdot V_B + G_3 \cdot V_C + G_4 \cdot V_C - \hat{J}_2 - G_5 \cdot E_2 + G_5 \cdot V_C = 0$$

$$-G_3 \cdot V_B + (G_3 + G_4 + G_5) \cdot V_C - G_5 \cdot E_2 - \hat{J}_2 = 0 \quad \text{2. DENKLEM}$$

4. Adım: Denklemler matris biçiminde yazılır ve sayısal çözüm yapılır

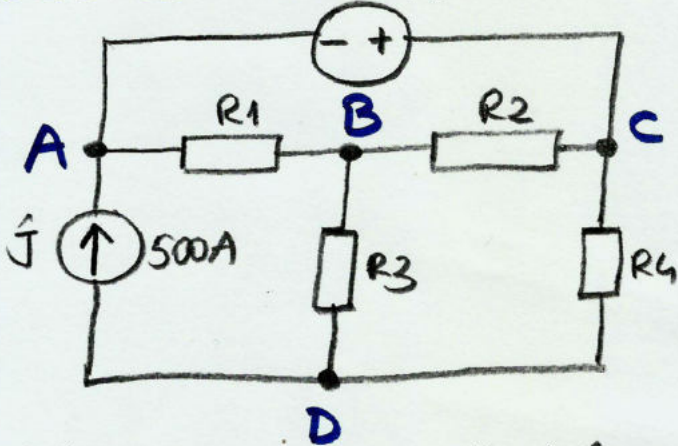
$$(G_1 + G_2 + G_3) \cdot V_B - G_3 \cdot V_C - G_1 \cdot E_1 + \hat{J}_1 = 0$$

$$-G_3 \cdot V_B + (G_3 + G_4 + G_5) \cdot V_C - G_5 \cdot E_2 - \hat{J}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_2 + G_3) & -G_3 \\ -G_3 & (G_3 + G_4 + G_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_B \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G_1 & 0 \\ 0 & -G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{J}_1 \\ \hat{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Örnek:

E=50V



Şekildeki devrede Düğüm Gerilimleri Yöntemi ile

a) Devre grafini çiziniz, devre denklemlerini Adım - Adım elde ediniz ve matris biçiminde yazınız

b) Elde ettiğiniz denklemleri gözerek R_1 direncinin gücünü hesaplayınız ($R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 0,1 \Omega$)

c) $\sum P = 0$ olduğunu gösteriniz

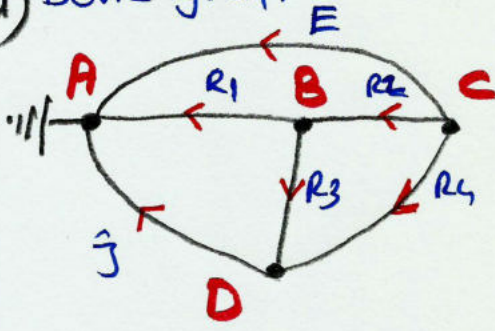
Doç.Dr. Recep YUMURTACI - YTÜ

Gözüm:

Doç. Dr. Recep YUMURTACI - YTL

(12)

a) Devre grafi



* Devrede sadece bir gerilim kaynağı (E) var. E'nin (-) uanun bağlı olduğu A düğümünü referans seçeriz

Düğüm gerilimleri

$$V_A = 0 \text{ (Referans)}$$

$$V_C = E = 50V$$

$$V_B = ?, V_D = ?$$

* Önce direnç akımlarını düğüm gerilimlerine bağlı olarak yazalım.

$$I_{R1} = G_1 \cdot (V_B - V_A) \Rightarrow I_{R1} = G_1 \cdot V_B$$

$$I_{R2} = G_2 \cdot (V_C - V_B) \Rightarrow I_{R2} = G_2 (E - V_B)$$

$$I_{R3} = G_3 \cdot (V_B - V_D) \text{ ve } I_{R4} = G_4 \cdot (V_C - V_D) \Rightarrow I_{R4} = G_4 (E - V_D)$$

* Gerilimi bilinmeyen düğümler (B ve D) için düğüm denklemlerini yazalım bu denklemlerde direnç akımlarını yukarıdaki gibi yazalım:

B için

$$I_{R1} - I_{R2} + I_{R3} = 0 \Rightarrow G_1 \cdot V_B - G_2 (E - V_B) + G_3 (V_B - V_D) = 0$$

$$(G_1 + G_2 + G_3) \cdot V_B - G_3 \cdot V_D - G_2 \cdot E = 0 \quad 1. \text{ denklemin}$$

D için

$$\hat{J} - I_{R3} - I_{R4} = 0 \Rightarrow \hat{J} - G_3 (V_B - V_D) - G_4 (E - V_D) = 0$$

$$-G_3 \cdot V_B + (G_3 + G_4) \cdot V_D - G_4 \cdot E + \hat{J} = 0 \quad 2. \text{ denklemin}$$

* Denklemleri matris biçiminde yazalım:

$$(G_1 + G_2 + G_3) \cdot V_B - G_3 \cdot V_D - G_2 \cdot E = 0$$

$$-G_3 \cdot V_B + (G_3 + G_4) \cdot V_D - G_4 \cdot E + \hat{J} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_2 + G_3) & -G_3 \\ -G_3 & (G_3 + G_4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_B \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2 \\ G_4 \end{bmatrix} \cdot E + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \hat{J}$$

b) Sayısal çözüm

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 0,1 \Omega \Rightarrow G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ Sienar},$$

$$E = 50 \text{ V ve } \hat{J} = 500 \text{ A}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_B \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} 50 + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 500$$

$$\begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_B \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cramer Yöntemi ile

$$V_B = \frac{\begin{vmatrix} 500 & -10 \\ 0 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{500 \cdot 20 - (-10) \cdot 0}{30 \cdot 20 - (-10) \cdot (-10)} = \frac{500 \cdot 20}{500} = 20 \text{ V}$$

$$V_D = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 500 \\ -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{0 - (-10) \cdot 500}{500} = 10 \text{ V}$$

$$P_{R_1} = ?$$

$$V_D = 10 \text{ V}$$

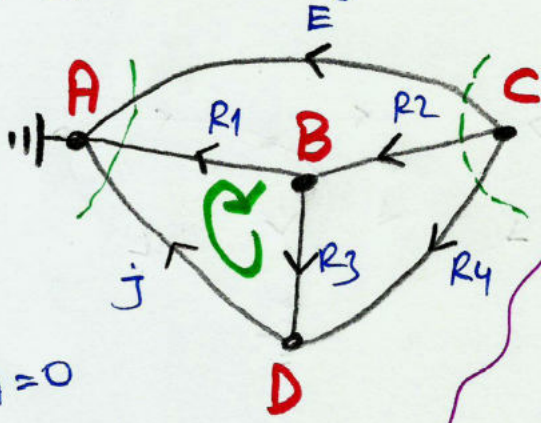
$$V_{R_1} = V_B - V_A = V_B = 20 \text{ V}$$

$$P_{R_1} = \frac{V_{R_1}^2}{R_1} = \frac{20^2}{0,1} \Rightarrow P_{R_1} = 4000 \text{ W} = 4 \text{ kW}$$

c) $\sum P = 0$ (sonraki sayfada) $\rightarrow$

Doc. Dr. Recep YUMURTAÇI - YTD
c) $\sum P = 0$ olduğunu gösteriniz (DÜĞYİK)

(14)



$$\begin{aligned} V_A &= 0 \\ V_B &= 20V \\ V_C &= E = 50V \\ V_D &= 10V \end{aligned}$$

Dirençlerin Güçleri

$$V_{R1} = V_B = 20V \Rightarrow P_{R1} = \frac{V_{R1}^2}{R_1} = \frac{20^2}{0,1}$$

$$P_{R1} = 4000W$$

$$V_{R2} = V_C - V_B = E - V_B = 50 - 20 = 30V$$

$$P_{R2} = \frac{V_{R2}^2}{R_2} = \frac{30^2}{0,1} \Rightarrow P_{R2} = 9000W$$

$$V_{R3} = V_B - V_D = 20 - 10 = 10V$$

$$P_{R3} = \frac{V_{R3}^2}{R_3} = \frac{10^2}{0,1} \Rightarrow P_{R3} = 1000W$$

$$V_{R4} = V_C - V_D = E - V_D = 50 - 10 = 40V$$

$$P_{R4} = \frac{V_{R4}^2}{R_4} = \frac{40^2}{0,1} \Rightarrow P_{R4} = 16000W$$

E Gerilim Kaynağının Gücü

$P_E = E \cdot I_E \Rightarrow I_E = ?$ (I_E 'yi C veya A düğümünden düğüm denklemlerinden bulabiliriz)

A düğümü denklemini

$$-I_E - I_{R1} - j = 0 \Rightarrow I_E = -j - I_{R1} \text{ ve } j = 500A$$

$$I_{R1} = G_1 \cdot V_{R1} = 61 \cdot V_B = 10 \cdot 20 = 200A$$

$$I_E = -j - I_{R1} = -500 - 200 \Rightarrow I_E = -700A$$

$$P_E = E \cdot I_E = 50 \cdot (-700) \Rightarrow P_E = -35000W$$

j Akım Kaynağının Gücü

$P_j = V_j \cdot j \Rightarrow V_j = ?$ V_j 'yi j akım kaynağının olduğu servise göre denklemlerden bulabiliriz. Ancak grafiğe $V_j = V_D$ olduğu görülmüştür. $V_j = V_D = 10V$

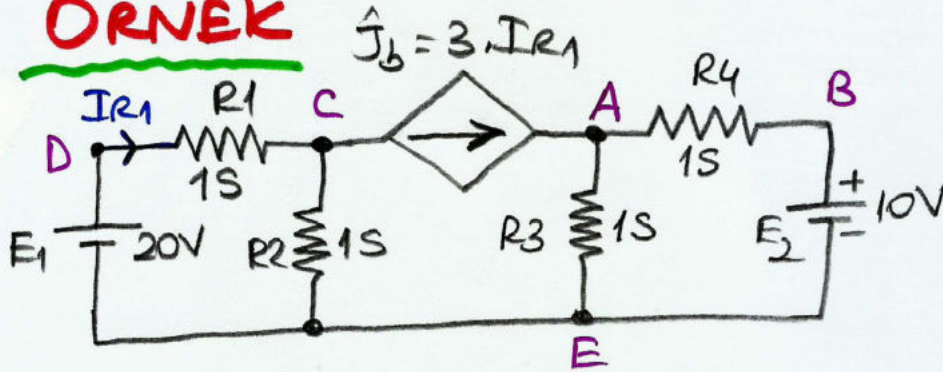
$$P_j = V_j \cdot j = 10 \cdot 500 \Rightarrow P_j = 5000W$$

izoleten (+) çıkışın j'nin devreden enerji aldığı görülmüştür

ELEMAN	GÜÇ	
R1	4kW	
R2	9kW	
R3	1kW	
R4	16kW	
E		-35kW
j	5kW	
TOPLAM	35kW	-35kW

$$\sum P = 35kW - 35kW = 0$$

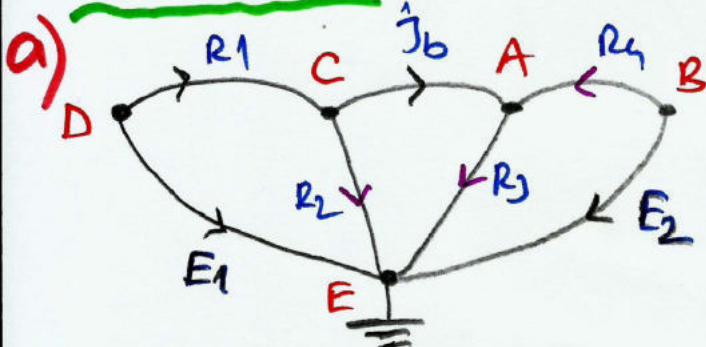
ÖRNEK



Devrede direnç değerleri yerine Siemens (S) olarak iletkenlikleri ($G = \frac{1}{R}$) verilmiştir.

Devreyi DÜĞÜ ile görerek I_{R4} değerini hesaplayınız.
R4'ün akım yönünü belirleyiniz.

Çözüm



Düğüm gerilimleri:

$$V_E = 0 \text{ (ref.)}$$

$$V_D = E_1 = 20V$$

$$V_B = E_2 = 10V$$

$$V_A = ?$$

$$V_C = ?$$

Direnç Akımları

$$I_{R1} = G_1(E_1 - V_C)$$

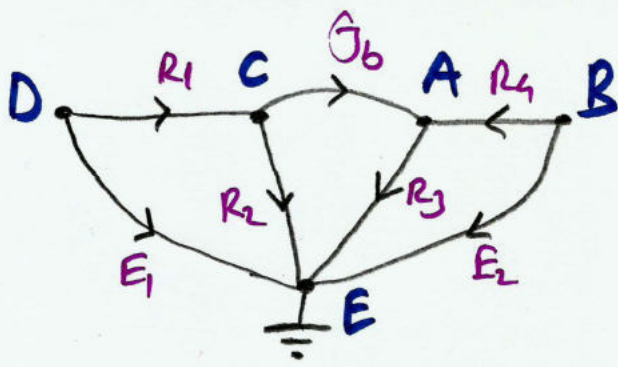
$$I_{R2} = G_2 V_C$$

$$I_{R3} = G_3 V_A$$

$$I_{R4} = G_4(E_2 - V_A)$$

Akım dögüm denklemi

$$-j_b + I_{R3} - I_{R4} = 0$$



A için

(16)

$$-\hat{J}_b + I_{E_1} - I_{E_4} = 0$$

$$\hat{J}_b = 3I_{E_1} = 3G_1 \cdot V_{C1} = 3G_1(E_1 - V_C)$$

$$-3G_1(E_1 - V_C) + G_3 \cdot V_A - G_4(E_2 - V_A) = 0$$

$$I_{E_1} = G_1(E_1 - V_C)$$

$$I_{E_2} = G_2 \cdot V_C$$

$$I_{E_3} = G_3 \cdot V_A$$

$$I_{E_4} = G_4(E_2 - V_A)$$

$$-3G_1 E_1 + 3G_1 V_C + G_3 V_A - G_4 E_2 + G_4 V_A = 0$$

$$(G_3 + G_4) \cdot V_A + 3G_1 \cdot V_C - 3G_1 E_1 - G_4 E_2 = 0$$

1. denklem

C için

$$-I_{E_1} + \hat{J}_b + I_{E_2} = 0 \text{ ve } \hat{J}_b = 3G_1(E_1 - V_C)$$

$$-G_1(E_1 - V_C) + 3G_1(E_1 - V_C) + G_2 V_C = 0$$

$$-G_1 E_1 + G_1 V_C + 3G_1 E_1 - 3G_1 V_C + G_2 V_C = 0$$

$$(G_2 - 2G_1) V_C + 2G_1 \cdot E_1 = 0 \quad \text{2. denklem}$$

Denklemleri matris biçiminde yazalım:

$$(G_3 + G_4) \cdot V_A + 3G_1 \cdot V_C = 3G_1 E_1 + G_4 E_2$$

$$(G_2 - 2G_1) \cdot V_C = -2G_1 \cdot E_1$$

$$\begin{bmatrix} (G_3 + G_4) & 3G_1 \\ 0 & (G_2 - 2G_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3G_1 & G_4 \\ -2G_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

b) Sayısal çözüm

$$G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = 1S, E_1 = 20V, E_2 = 10V$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 \\ -2 \cdot 20 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ -40 \end{bmatrix}$$

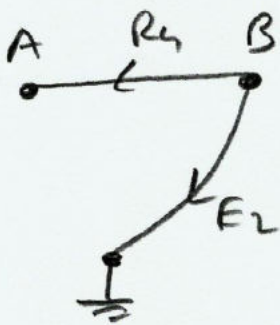
Doç. Dr. Recep YUMURTACI - ITÜ

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ -40 \end{bmatrix}$$

$$V_A = \frac{\begin{vmatrix} 70 & 3 \\ -40 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(-1) \cdot 70 - 3 \cdot (-40)}{2 \cdot (-1) - 0} = \frac{50}{-2} \Rightarrow \boxed{V_A = -25V}$$

$$V_C = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 70 \\ 0 & -40 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-80}{-2} \Rightarrow \boxed{V_C = 40V}$$

$$I_{R_4} = ?$$



$$I_{R_4} = G_4 \cdot V_{R_4} = G_4 (V_B - V_A)$$

$$I_{R_4} = 1 \cdot (E_2 - V_A) = 1 \cdot (10 - (-25))$$

$$\boxed{I_{R_4} = 35A}$$

R_4 'in akım yönü?

$$V_A = -25V \text{ ve } V_B = E_2 = 10V \Rightarrow V_B > V_A$$

Akım yönü $\boxed{B \rightarrow A}$ dir.

Ek Soru

$$P_{\hat{J}_b} = ?$$

$$P_{\hat{J}_b} = V_{\hat{J}_b} \cdot \hat{J}_b \Rightarrow V_{\hat{J}_b} = ?$$



$$\underline{\underline{I}} \quad E$$

$$V_{\hat{J}_b} = V_C - V_A = 40 - (-25) = 65V$$

$$\hat{J}_b = 3I_{R_4} = 3G_1(E_1 - V_C) = 3 \cdot 1 \cdot (20 - 40)$$

$$\hat{J}_b = -60A$$

$$P_{\hat{J}_b} = V_{\hat{J}_b} \cdot \hat{J}_b = 65 \cdot (-60) \Rightarrow \boxed{P_{\hat{J}_b} = -3900W}$$