

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

ELEKTRİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

DEVRE TEORİSİ

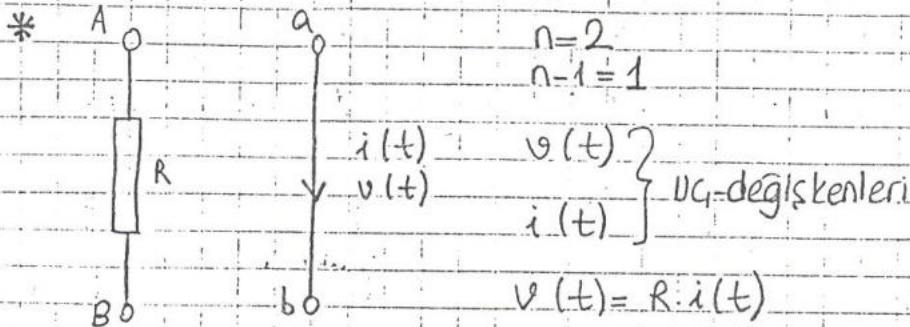
Ders Notu -2

- **ORTALAMA VE EFEKTİF DEĞER**
- **R, L, C ELEMANLARI**

Doç. Dr. Recep YUMURTACI

Devre Teorisinin I. Aksiyomu

n -uçlu bir devre elemanının bütün özellikleri bu eleman için seçilen herhangi bir uç-graf ile tanımlanan $n-1$ adet akım ve $n-1$ adet gerilim büyüklükleri arasında var olan $n-1$ tane matematiksel bağıntı ile tamamen belirlidir.



Akım birimi: Amper dir. (A)

Gerilim birimi: Volt tur. (V)

kilo Amper $1 \text{ kA} = 10^3 \text{ A}$

$1 \text{ MV} = 1 \cdot 10^6 \text{ V}$

milli Amper $1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$

$1 \text{ kV} = 1 \cdot 10^3 \text{ V}$

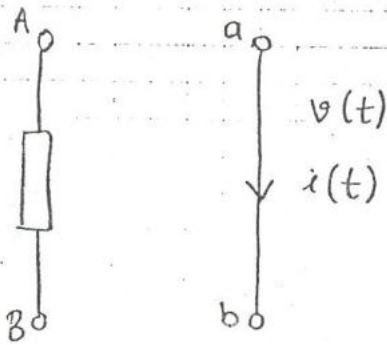
mikro Amper $1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}$

$1 \text{ mV} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

$1 \mu\text{V} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ V}$

Elektriksel güç ve enerji

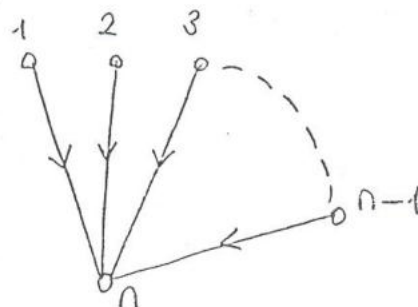
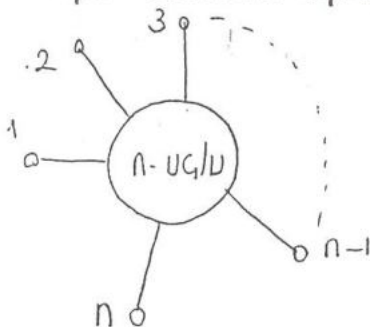
2 uçlu eleman



$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Ani güç

n uçlu eleman için;



$$\tilde{i}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

matrislerde çarpımda: satır ve sütun sayıları eşit olmalıdır. (Transpoze almak)
satır → sütun

Ani güç

$$p(t) = \tilde{i}(t)^T \cdot \tilde{v}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) & i_2(t) & \dots & i_{n-1}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

$$p(t) = i_1(t) \cdot v_1(t) + i_2(t) \cdot v_2(t) + \dots + i_{n-1}(t) \cdot v_{n-1}(t) \quad (1 \times 1 \text{ boyutlarında})$$

$$p(t) = \tilde{i}(t)^T \cdot \tilde{v}(t)$$

Transpoze

ya da $\tilde{v}(t)$ 'nin transpoze'si

Güç birimi: **Watt** (W) Gigawatt = **GW** = 10^9 W

Megawatt = **MW** = 10^6 W

kilo watt = **kW** = 10^3 W

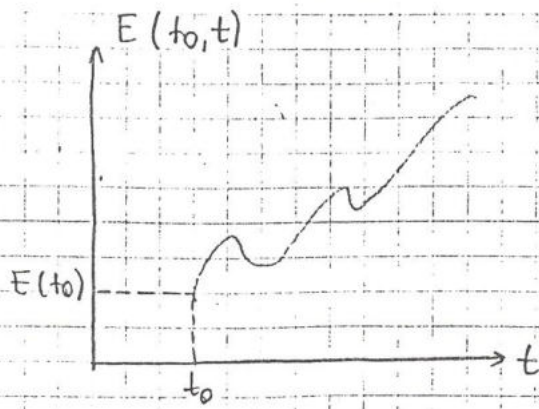
mili watt = **mW** = 10^{-3} W

mikrowatt = **μW** = 10^{-6} W

Elektrik Enerjisi

n uçlu elemanın $[t_0, t]$ aralığında verilen elektrik enerjisi:

$$E[t_0, t] = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \tilde{i}(\tau)^T \cdot \tilde{v}(\tau) d\tau$$



$E(t_0)$ = Elemanın t_0 anındaki (başlangıçtaki) enerjisi (birikmiş enerji)

Enerji Birimi: Joule [Ws]

kWh (kilowatt saat)

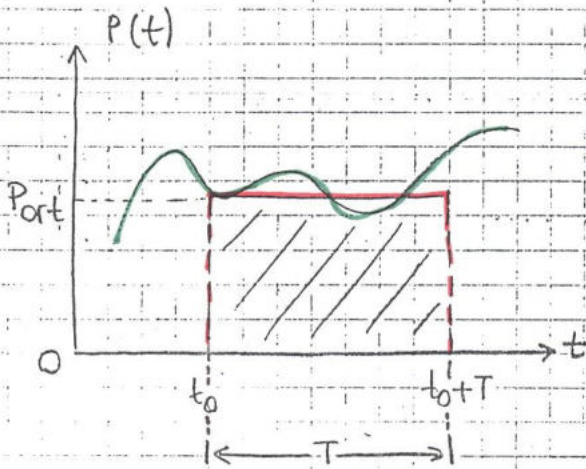
Aktif enerji

kVar (kilovar saat)

Reaktif enerji

Ortalama Güç

n uçlu bir devre elemanının $[t_0, t_0+T]$ aralığındaki ani gücünün ortalamasıdır = (1 periyotluk)



$$P_{ort} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(\tau) d\tau$$

Ortalama Enerji

$$E(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} p(\tau) d\tau$$

eleman

$P_{ort} \rightarrow (+)$ ise güç alıyor (üçü vs)

$$P_{ort} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(\tau) d\tau$$

$P_{ort} \rightarrow (-)$ ise güç veriyor (akü, pil vs)

$$T P_{ort} = \int_{t_0}^{t_0+T} p(\tau) d\tau$$

Pasif Devre Elemanı

$E(t_0) = 0$ olmak üzere

$[t_0, \infty]$ aralığında;

$E(t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \geq 0$ ise bu elemana "pasif elemanı" denir

Aktif devre elemanı

t nin bazı değerleri için $E(t) < 0$ oluyorsa bu elemana "aktif eleman", denir. Örnek: -pil
-akümülatör
-generatörler vb...

Kayıpsız eleman

$E(t_0) = 0$ olmak üzere;

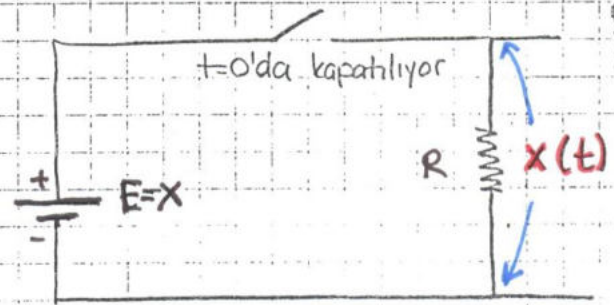
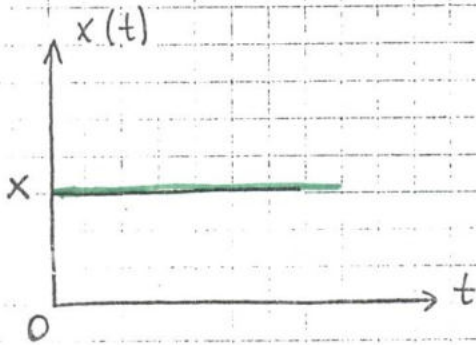
$$E(t) = \int_{t_0}^{\infty} p(\tau) d\tau = 0 \text{ ise bu elemana kayıpsız eleman denir.}$$

Akım ve Genilim Fonksiyon Bağımları

Basamak fonksiyonu

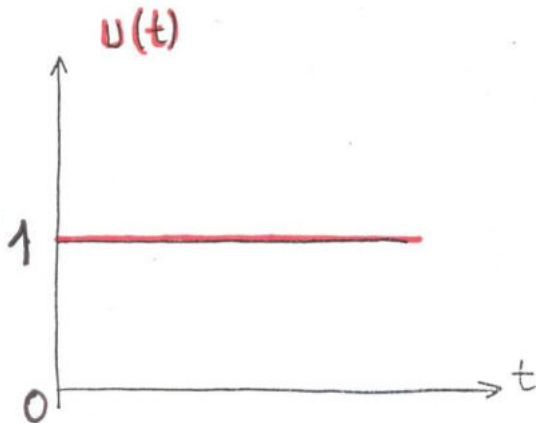


Pratikteki karşılığı



$$x(t) = \begin{cases} x & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

Özel hal $x=1$ ise bu fonksiyona "birim basamak fonksiyonu" denir. $u(t)$ ile gösterilir.



Örneğin,

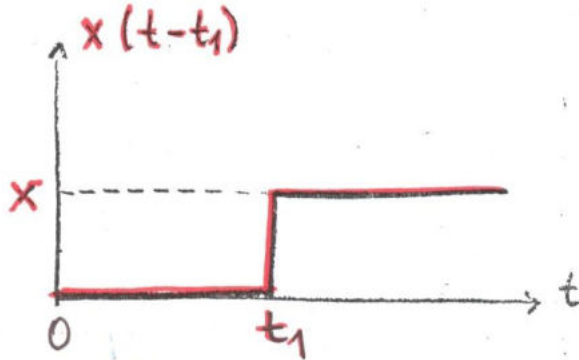
$$x(t) = 10 \text{ ise}$$

$$x(t) = 10 \cdot u(t) \text{ olarak ifade edilebilir.}$$

Ötelenmiş basamak fonksiyonu

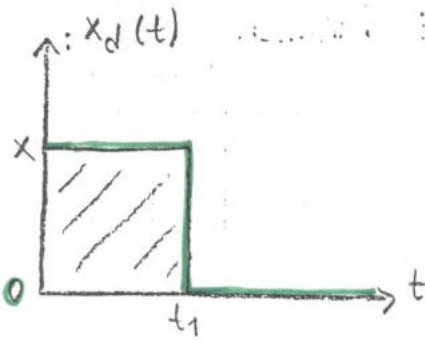
$$x(t) = \begin{cases} x, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

t_1 kadar ötelenmiş basamak fonksiyonu



$$x(t-t_1) = \begin{cases} x, & t \geq t_1 \\ 0, & t < t_1 \end{cases}$$

Darbe fonksiyonu

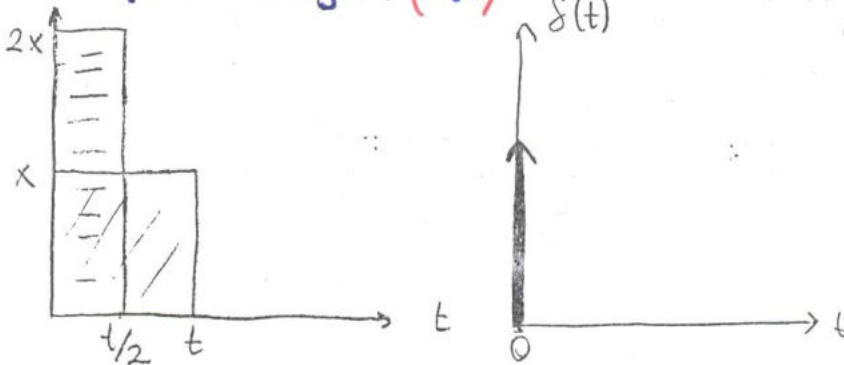


$$x_d(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases}$$

x : Darbenin genliği

t_1 : uygulama süresi

İmpuls fonksiyonu ($\delta(t)$)



$$\int_0^t x dt = x \cdot t = 1$$

Alanı 1 birim olan darbe

fonksiyonunda $t_1 \rightarrow 0$ alınırsa

$x \rightarrow \infty$ olur. Bu fonk. "impuls fonk." denir.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & ; t = 0 \\ 0 & ; t \neq 0 \end{cases}$$

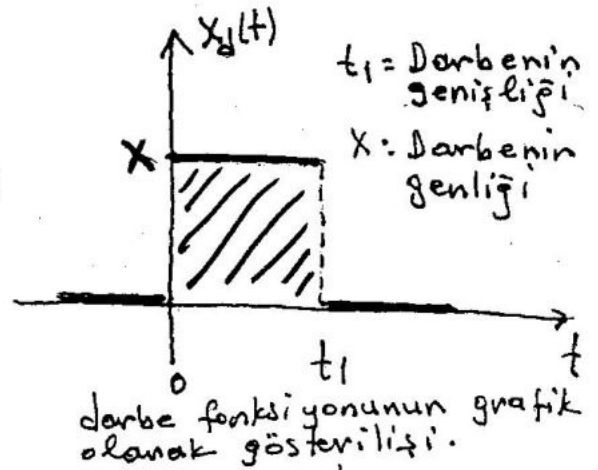
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Darbe fonksiyonu : (dikdörtgen darbe)

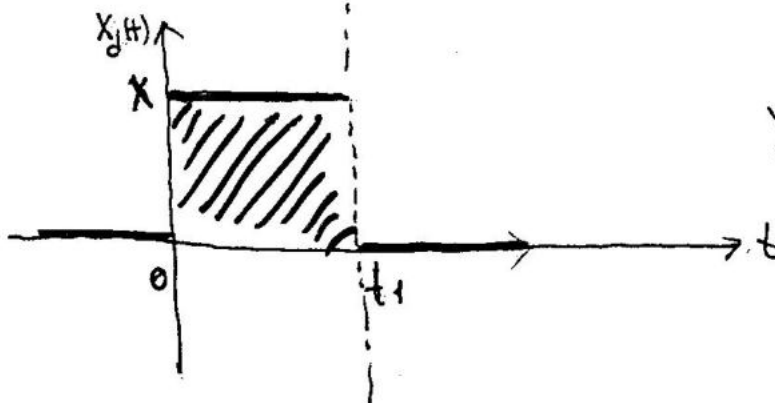
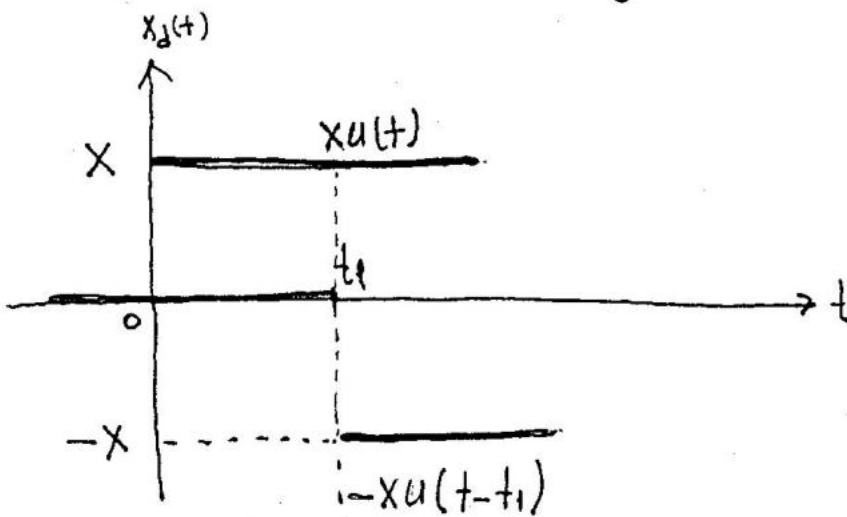
Tanım : Aşağıdaki özelliğe sahip fonksiyona DARBE FONKSİYONU denir.

$$X_d(t) = \begin{cases} 0 ; & t < 0 \\ X ; & 0 \leq t < t_1 \\ 0 ; & t \geq t_1 \end{cases}$$

darbe fonksiyonunun
matematiksel ifadesi



Darbe fonksiyonu iki basamak fonksiyonunun toplamı olarak yazılabilir.



$$X_d(t) = X(u(t) - u(t - t_1))$$

veya

$$X_d(t) = X u(t) - X u(t - t_1)$$

Üstel fonksiyon :

$\tau = \frac{1}{\alpha}$ ile gösterilirse, τ Zaman Sabiti adı verilir.

$$e^{-\alpha t} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

α pozitif bir sayı olduğundan $\frac{1}{\alpha}$ da pozitif bir sayı çıkacaktır.

$t = \tau$ olursa

$$X(\tau) = X \cdot e^{-\alpha \tau} = X e^{-\frac{\tau}{\tau}} = X e^{-1} = X e^{-1} = \frac{X}{e} \text{ olur}$$

$$X(\tau) = \frac{X}{e} \approx 0,368 X \text{ dir. (yaklaşık fonksiyon 3'de bir değeri ne düşüyor.)}$$

$2,7 \approx 3$

→ Zaman Sabiti kadar gidersen fonksiyonun aldığı değer, genliğinin yaklaşık $\frac{1}{3}$ 'üne düşüyor.

$$t = 5\tau \text{ olursa } X(5\tau) = \frac{X}{e^5} \approx \frac{X}{243} < \%1 X(t)$$

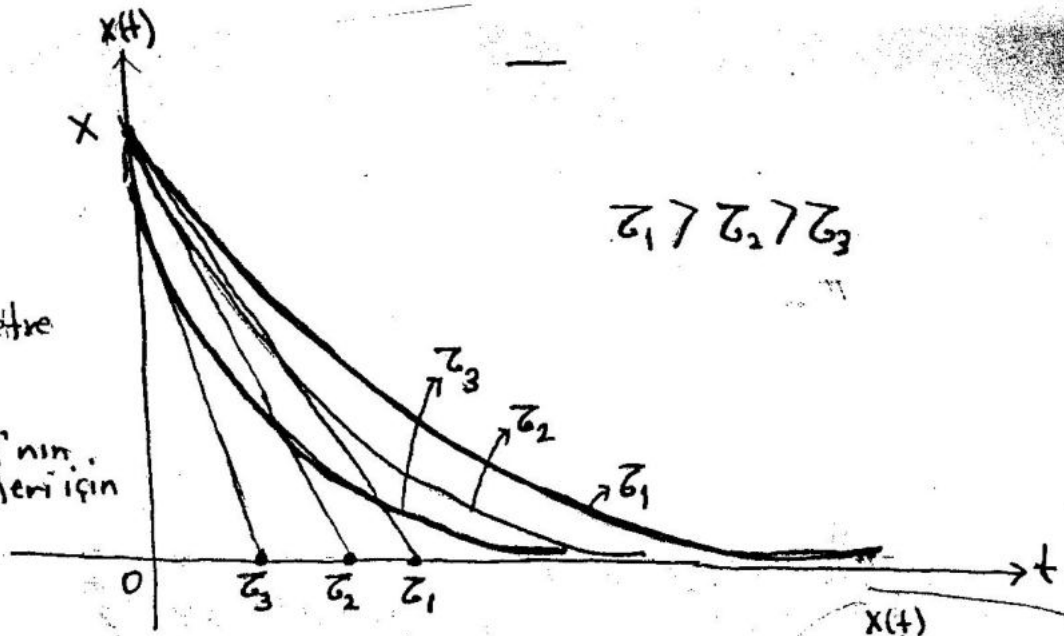
{ esas fonksiyonu
%1 değerinden
daha küçüktür.

Pratik olarak 5τ sonra (Zaman Sabitinin 5 katı kadar sonra) fonksiyonun SIFIRA ulaştığını varsayabiliriz. (fonksiyonun değeri X 'in %1'inden daha küçük değerlere düşüyor)

Zaman Sabiti büyüdükçe fonksiyonun sifıra ulaşması daha da büyüyecektir.

$X = \text{sabit}$
 $\alpha = \text{parametre}$

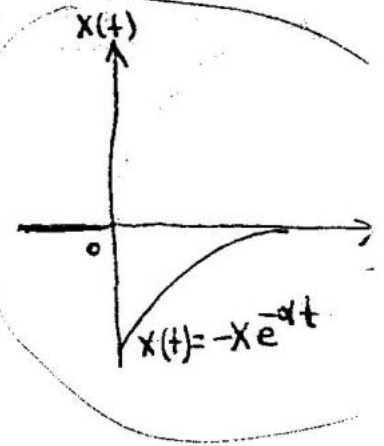
$X(t) = X e^{-\alpha t}$
 eğrisinin α 'nın
 çeşitli değerleri için
 çizimi



$\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$

● Ödev:

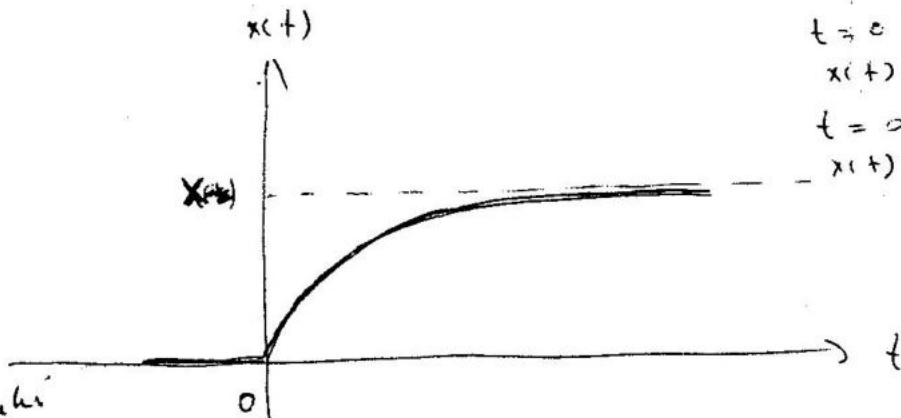
$$X(t) = \begin{cases} X(1 - e^{-\alpha t}); & t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$



$\alpha > 0, X > 0$ için eğrisini çiziniz

← . . . →

Bunun çizimini.



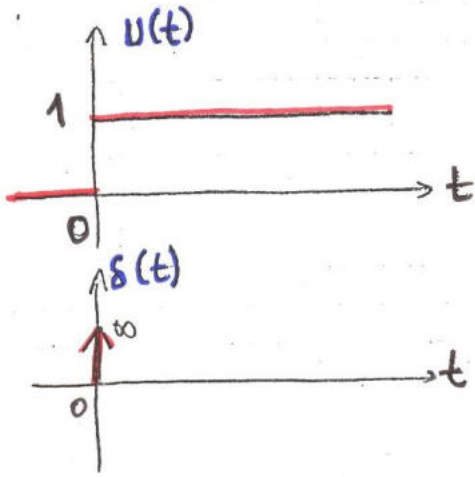
$t = 0$ için
 $X(t) = 0$
 $t = \infty$ için
 $X(t) = X$ olur.

akımı α değeri için
 gibi olur:

$$i(t) = \begin{cases} I(1 - e^{-\alpha t}) & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

,örneğin $I = 10 \text{ A}$ gibi
 diyebiliriz.

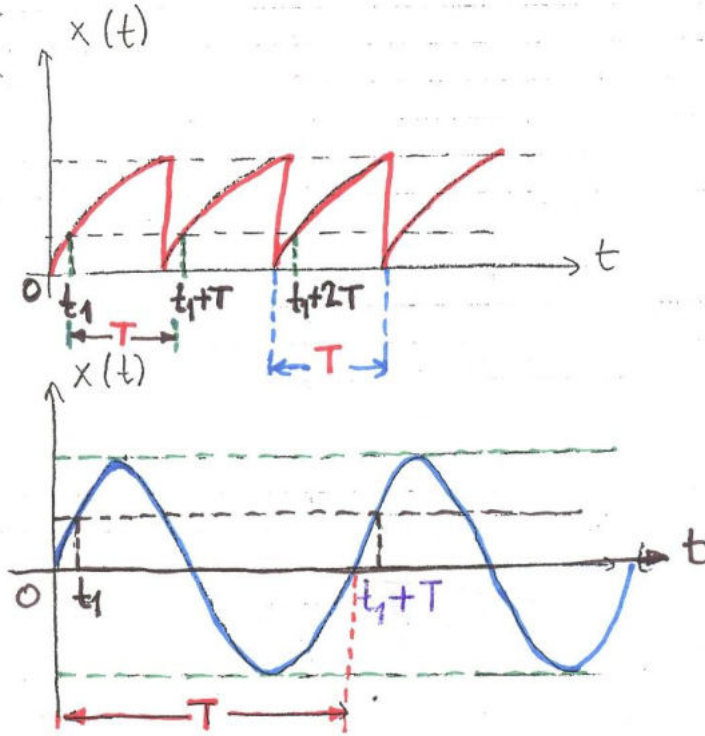
Not: Birim basamak fonk. $u(t)$ 'nin türevi impuls fonk.'na eşittir.



$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

→ Periyodik Fonksiyonlar

Bir $x(t)$ fonk. her t değeri için $x(t) = x(t+T)$ oluyorsa bu fonk. na "periyodik fonk.", denir. T : fonksiyonun periyodu



Periyodik fonk. t'm incelemelerde bir periyodu almak yeterlidir.

Frekans: Bir zamandaki periyod sayısı, birimi: $\frac{1}{s}$ veya Hertz (Hz)

$$f = \frac{1}{T}$$
 (Şehir şebekesinin $f = 50$ Hz)

Frekans birimleri:

Hertz Hz
kiloHertz kHz = 10^3 Hz

mega Hertz MHz = 10^6 Hz

Hatırlatma

mili (m) : 10^{-3}
mikro (μ) : 10^{-6}
nano (n) : 10^{-9}
piko (p) : 10^{-12}

kilo (k) : 10^3
mega (M) : 10^6
giga (G) : 10^9

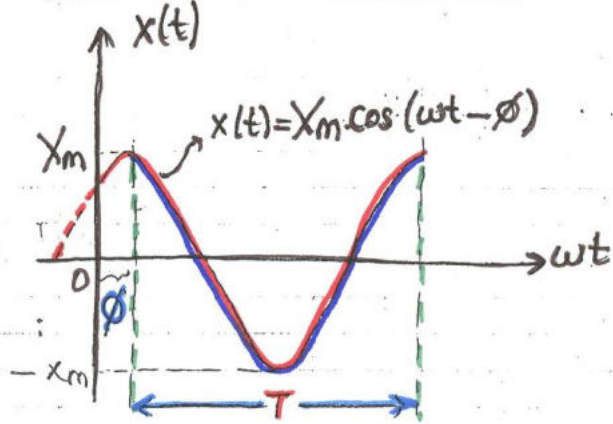
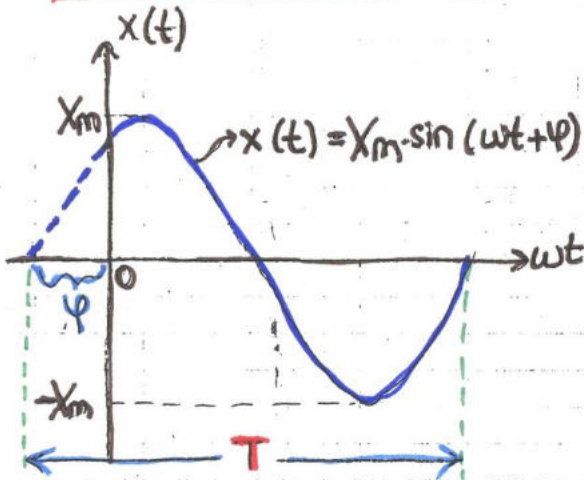
→ Sinüsoidal Fonksiyonlar

$$\omega = 2\pi f \text{ (Açısal frekans)}$$

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega t - \phi)$$

veya

$$x(t) = X_m \cdot \sin(\omega t + \psi)$$



X_m : genlik (tepe değer, max değer)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ [rad/s] Açısal hız veya açısal frekans}$$

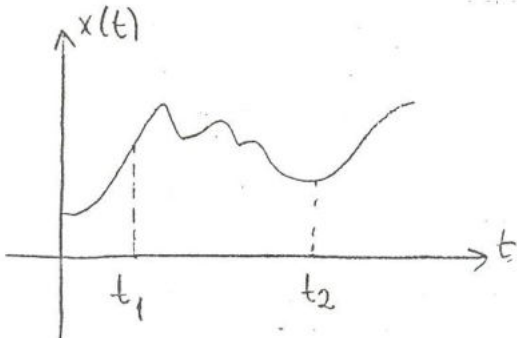
ϕ, ψ = Faz açısı

Ödev: $x(t) = 10 \sin(\omega t - 60^\circ)$ ve $x(t) = 20 (\cos \omega t + 45^\circ)$

$\omega = 1$ için nasıl arızılır?

Ortalama Değer

$x(t)$ 'nin $[t_1, t_2]$ aralığında ortalama değeri

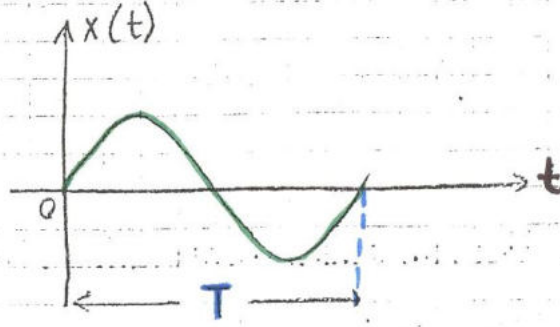


$$X_{ort} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

Periyodik fonk. ortalaması 1 periyod için hesaplanır.

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 0 \\ t_2 = T \end{array} \right\} \text{alınarak}$$

$$X_{\text{ort}} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$



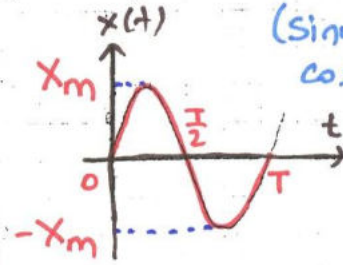
Efektif değer (Etkin) değer (rms değer)

$x(t)$ 'nin $[t_1, t_2]$ aralığında efektif değeri

Sinüsoidal fonksiyonlar

$(\sin \omega t, \sin(\omega t + \varphi), \cos \omega t, \cos(\omega t + \theta))$ için efektif değeri

$$* X_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt}$$



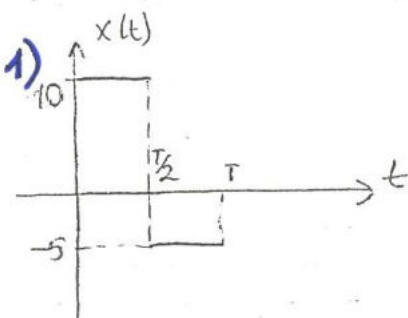
$$X_{\text{ef}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

periyodik fonksiyonun efektif değeri

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 0 \\ t_2 = T \end{array} \right\} \text{alınarak}$$

$$! X_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

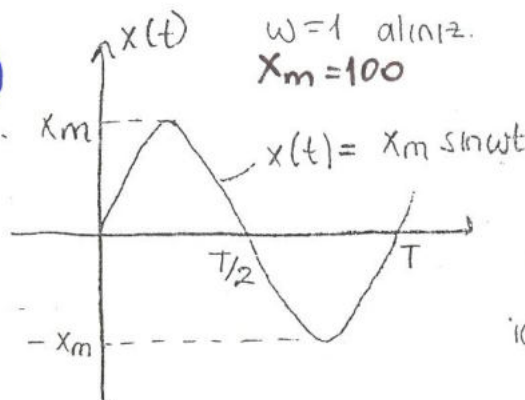
→ Ödev



- a) $X_{\text{ort}} = ?$
b) $X_{\text{ef}} = ?$

$f = 50 \text{ Hz}$ dir

* 2)

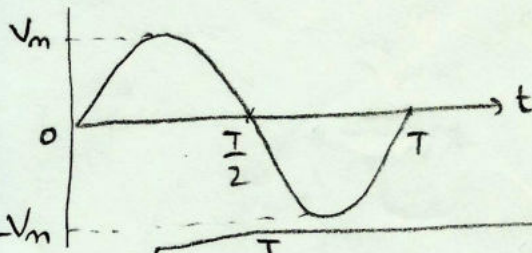


a) $X_{\text{ort}} = ?$

b) $X_{\text{ef}} = ?$

c) Yarı periyod için ort. değeri?

Örnek Sinüsoidal Fonksiyonun Efektif Değeri



$$v(t) = V_m \sin \omega t \Rightarrow V_{ef} = ?$$

$$X_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (V_m \sin \omega t)^2 dt}$$

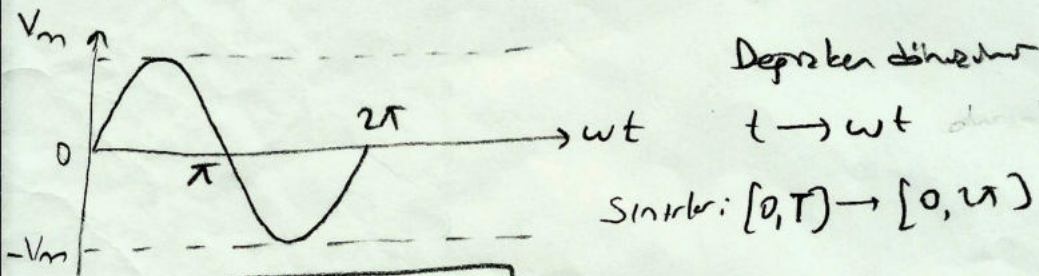
$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{V_m^2}{T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt}$$

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2T} \left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right]} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2T} \left[t \Big|_0^T - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \Big|_0^T \right]} \quad \begin{matrix} \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \\ (f = \frac{1}{T}) \end{matrix}$$

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2T} \left[T - \frac{1}{2\omega} (\sin 2\pi - \sin 0) \right]} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2T} \left[T - \frac{1}{2\omega} (\sin 2\pi - \sin 0) \right]} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2T} \cdot T}$$

$$V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

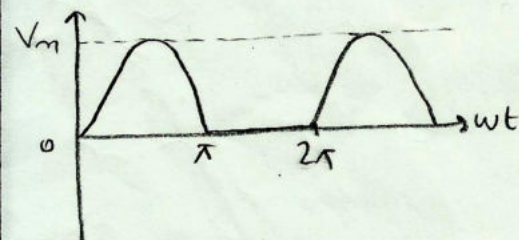
Grafığı t yerine ωt 'ye göre çizelimiz. $\omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot t$ $t = \frac{T}{2}$ için $\omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \pi$
 $t = T$ için $\omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot T = 2\pi$



Sınırları: $[0, T] \rightarrow [0, 2\pi]$

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_m^2 \sin^2 \omega t d\omega t} = \dots = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \text{ bulunur.}$$

Örnek



$$V_{ef} = ? \quad V_{ort} = ?$$

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_m^2 \sin^2 \omega t d\omega t} = V_m \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\omega t) d\omega t}$$

$$V_{ef} = V_m \cdot \sqrt{\frac{1}{4\pi} \left[\omega t \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \Big|_0^{\pi} \right]} = \frac{V_m}{2}$$

$$V_{ort} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} V_m \sin \omega t d\omega t = \frac{V_m}{2\pi} (-\cos \omega t) \Big|_0^{\pi} = \frac{V_m}{2\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{V_m}{\pi}$$

$$V_{ort} = \frac{V_m}{\pi}$$

Sinüsoidal Fonksiyon farklı frekanslı bileşenlerden oluşursa efektif değerinin bulunması,

Bilgi: $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$

$$x(t) = x_{1m} \sin \omega_1 t + x_{2m} \sin \omega_2 t + x_{3m} \sin \omega_3 t$$

Efektif Değerler: $x_1 = \frac{x_{1m}}{\sqrt{2}}$ $x_2 = \frac{x_{2m}}{\sqrt{2}}$ $x_3 = \frac{x_{3m}}{\sqrt{2}}$

Toplam dalganın $x(t)$ 'nin efektif değeri

$$x_{ef} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \text{ Re bulunur.}$$

Örnek

$$i(t) = 100 + 150 \sin 300t + 200 \sin 100t + 100 \sin 200t$$

Re $I_{ef} = ?$

$$I_1 = 100 \text{ A (dc akında } I_{ef} = I_{ort})$$

$$I_2 = \frac{150}{\sqrt{2}} = 106 \text{ A}$$

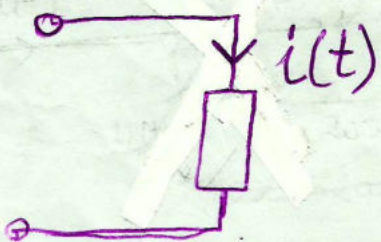
$$I_3 = \frac{200}{\sqrt{2}} = 141,4 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70,7 \text{ A}$$

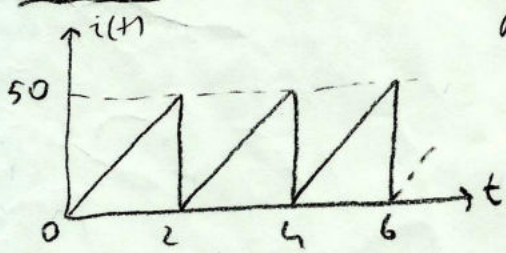
$$I_{ef} = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2}$$

$$I_{ef} = \sqrt{100^2 + 106^2 + 141,4^2 + 70,7^2}$$

$$I_{ef} = 215 \text{ A}$$



Örnek



a) $I_{ort} = ?$ b) $I_{ef} = ?$ c) Bu dkm 20Ω 'lık bir dirençten geçerse direnç üzerindeki güçleri ve gücü bulunur.

Diyar denklemini $i = at + b$

$$\left. \begin{array}{l} t=0 \text{ için } i=0 \\ t=2 \text{ " } i=50 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b=0 \\ 50 = a \cdot 2 \\ a=25 \end{array}$$

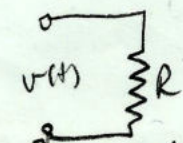
$$i(t) = 25t$$

$$i(t) = 25t \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$I_{ort} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 25t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} t^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 4 = 25 \text{ A}$$

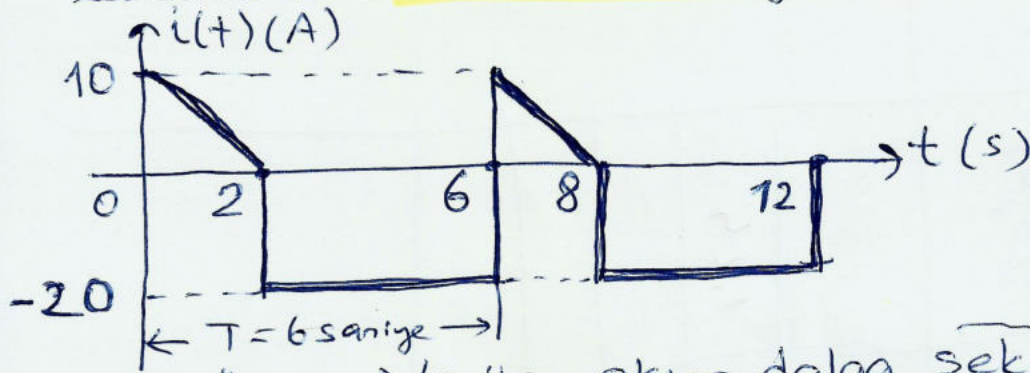
$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^2 (25t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 25^2 \int_0^2 t^2 dt} = \sqrt{\frac{625}{2} \cdot \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^2}$$

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{625}{2} \cdot \frac{8}{3}} = \sqrt{833,33} = 28,86 \text{ A}$$



$$V_{Ref} = R \cdot I_{ef} = 20 \cdot 28,86 = 577,2 \text{ V} \quad P_R = I_{ef}^2 \cdot R = 28,86^2 \cdot 20 = 16658 \text{ W} \approx 16,66 \text{ kW}$$

ÖRNEK (Ortalama Değer - Efektif Değer) (9/2)



a) $I_{ort} = ?$

b) $I_{ef} = ?$

c) $i(t)$ akımı, $R=5\Omega$ lık bir dirence uyguladıkta bir günlük tüketimi kaç kWh olur?

Çözüm : Verilen akım dalga şekline göre fonksiyonun periyodu $T=6$ saniyedir. Akım $0 \leq t \leq 2$ aralığında bir doğru denklemi, $2 \leq t \leq 6$ aralığında da bir sabit biçiminde değişim göstermektedir.

Doğru denklemi: $i = a \cdot t + b$

$t=0$ için $i=10 \Rightarrow 10 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b=10$

$t=2$ için $i=0 \Rightarrow 0 = a \cdot 2 + 10 \Rightarrow a=-5$

$0 \leq t \leq 2$ aralığında

$i = a \cdot t + b$

$i(t) = -5t + 10$

$i(t)$ 'nin matematiksel ifadesi:

$$i(t) = \begin{cases} (-5t + 10), & 0 \leq t \leq 2 \\ (-20), & 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

a) Ortalama Değer

$$I_{ort} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T i(t) dt = \frac{1}{6} \left[\int_0^2 (-5t + 10) dt + \int_2^6 (-20) dt \right]$$

$$I_{ort} = \frac{1}{6} \cdot \left[\left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 + (-20t) \Big|_2^6 \right]$$

$$I_{ort} = \frac{1}{6} \cdot \left[-\frac{5}{2}(2^2 - 0^2) + 10(2 - 0) - 20(6 - 2) \right] = \frac{1}{6} \cdot \left[-\frac{5}{2} \cdot 4 + 20 - 20 \cdot 4 \right]$$

$$I_{ort} = \frac{1}{6} \cdot (-70) \Rightarrow I_{ort} = -11,667 \text{ A}$$

b) Efektif Değer

(2/2)

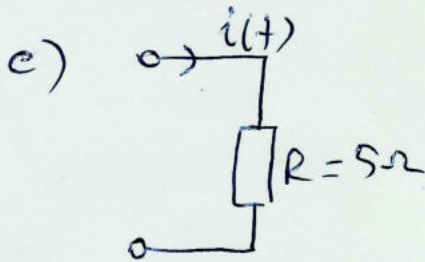
$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \left[\int_0^2 (-5t+10)^2 dt + \int_2^6 (-20)^2 dt \right]}$$

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \left[\int_0^2 (25t^2 - 100t + 100) dt + \int_2^6 400 dt \right]}$$

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \left[\left(\frac{25}{3} \cdot t^3 - \frac{100}{2} \cdot t^2 + 100t \right) \Big|_0^2 + 400t \Big|_2^6 \right]}$$

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{6} \left[\frac{25}{3} \cdot 2^3 - 50 \cdot 2^2 + 100 \cdot 2 + 400(6-2) \right]} = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot [1666,67]}$$

$$I_{ef} = \sqrt{277,78} = 16,667 A \Rightarrow \boxed{I_{ef} = 16,667 A}$$



Güç: $P = R \cdot I_{ef}^2 = 5 \cdot 16,667^2 = 1389 W$

$$\boxed{P = 1,389 kW}$$

Direkt bir güde tüketici enerji

$$E = P \cdot t = 1,389 \cdot 24 = 33,336 kWh$$

$\downarrow$ kWh $\downarrow$ kw $\rightarrow$ h (saat)

$$\boxed{E = 33,336 kWh}$$

Not : $(x+y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2$

$$(-5t+10)^2 = (-5t)^2 + 2 \cdot (-5t) \cdot 10 + 10^2$$

$$\boxed{(-5t+10)^2 = 25t^2 - 100t + 100}$$

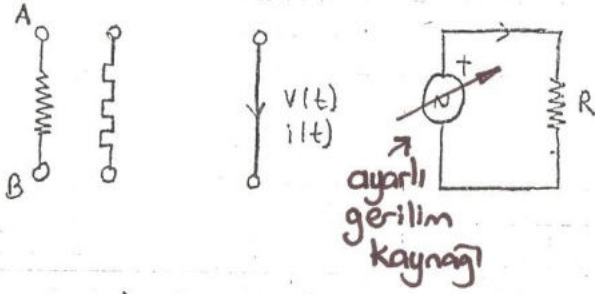
NOT: Sinüsoidal fonksiyonlar için efektif değer, tepe değerinin $\sqrt{2}$ 'ye bölümüyle bulunur.

$$X_{ef} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

→ sadece sinüsoidal fonk. için

Elektrik Devre Elemanlarının Matematiksel Modelleri

• Lineer (Doğrusal) Direnç (R):

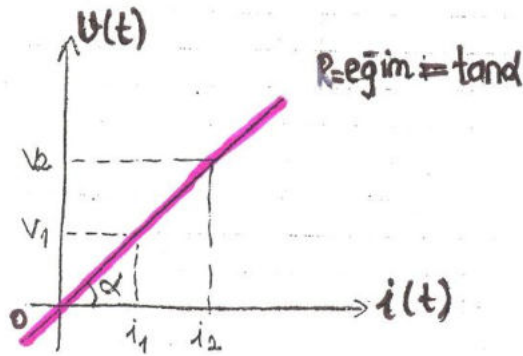


$$V_1(t) \rightarrow i_1(t)$$

$$V_2(t) \rightarrow i_2(t)$$

$$V_n(t) \rightarrow i_n(t)$$

$$\frac{V_1(t)}{i_1(t)} = \frac{V_2(t)}{i_2(t)} = \dots = \frac{V_n(t)}{i_n(t)} = R \text{ direnç}$$



Lineer direnç karakteristiği

R: Direnç (Ω)

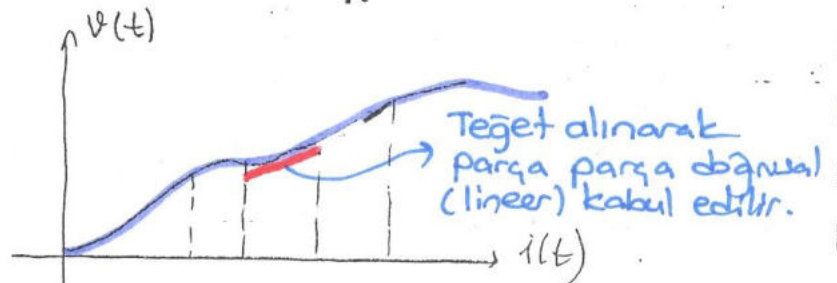
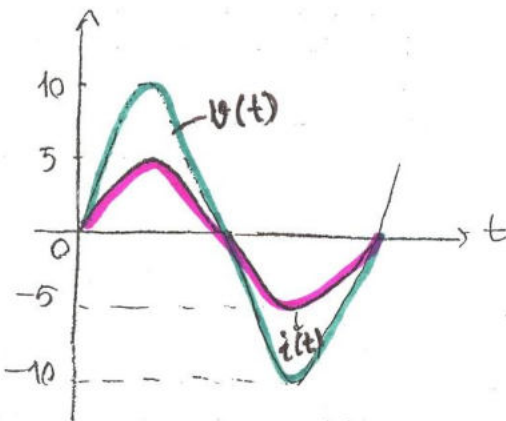
$$R = \frac{V(t)}{i(t)}$$

* Lineer direnç elemanında akım ve gerilimin dalga şekli aynıdır.

$$V(t) = 10 \sin \omega t$$

$$R = 2 \Omega$$

$$i(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{10 \sin \omega t}{2} = 5 \sin \omega t$$

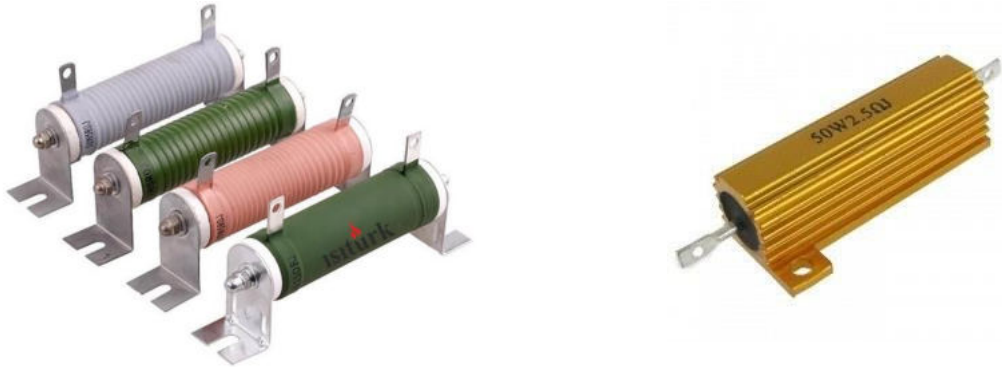


Lineer-olmayan (non-linear) direnç karakteristiği

Direnç (R) (Görseller)



Elektronik devrelerinde kullanılan çeşitli dirençler



Elektrik ve elektronik devrelerinde kullanılan daha yüksek güçlü dirençler



34.5/0.4 kV Transformatör nötr direnci ($R=20\ \Omega$, 1kA, 20 MW)

Dirençin tersi (iletkenlik veya kondüktans)

$$v(t) = R \cdot i(t)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{i(t)}{v(t)} = G$$

$$G = \frac{1}{R}$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{1}{R} \cdot v(t) \rightarrow G$$

$$i(t) = G \cdot v(t)$$

$G = \frac{1}{R}$: iletkenlik

G'nin birimi : $\left[\frac{1}{\Omega}\right] = [S] = [\text{mho}]$ ^{siemens}

direnç (R) birimi

→ iletkenlik ($G = 1/R$) birimi

MΩ

→

μS

kΩ

→

mS

Ω

→

S

mΩ

→

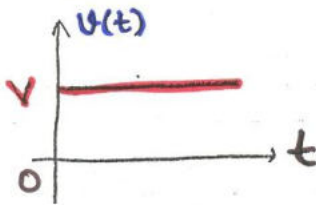
kS

μΩ

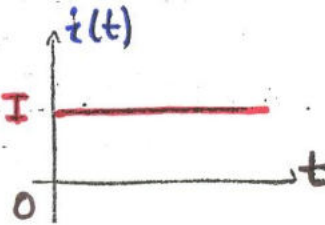
→

MS

Doğru akımda ;



$$v(t) = V$$

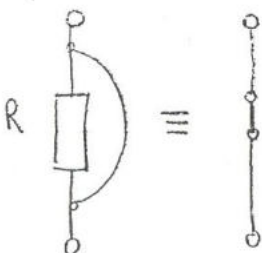


$$i(t) = I$$

$$V = R \cdot I$$

$$I = G \cdot V$$

Kısa devre

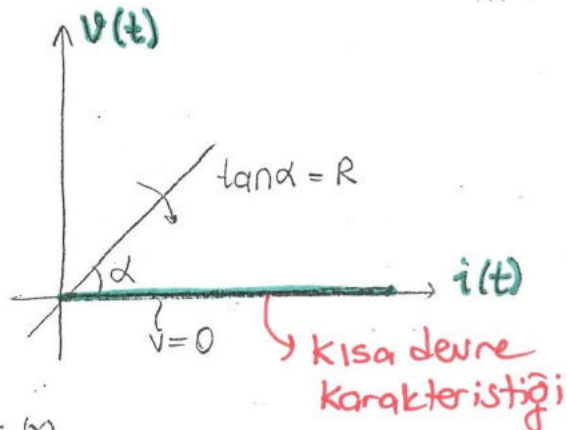


Kısa devrede ;

$$R = 0$$

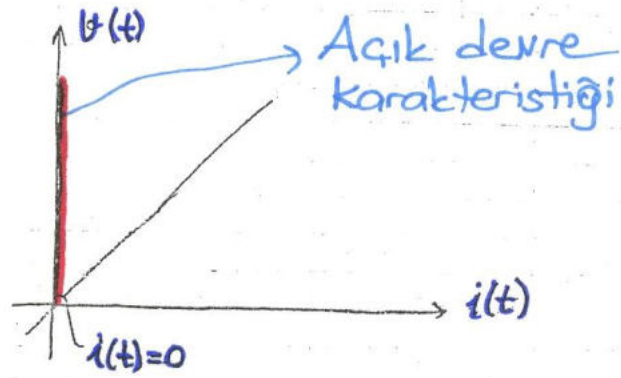
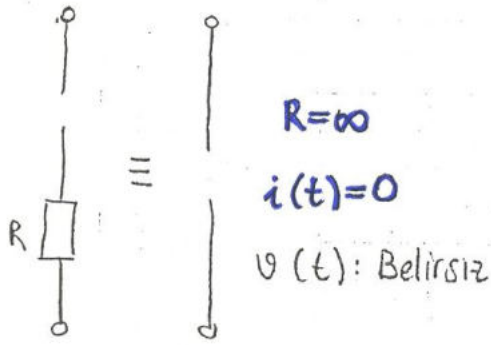
$$v(t) = 0$$

$i(t)$ çok büyük
(belirsiz)



$$R = 0 \Rightarrow G = \frac{1}{R} = \infty$$

Açık devre



Dirençin Ani Gücü

$$P(t) = U(t) \cdot i(t) = R \cdot i(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) \Rightarrow \boxed{P(t) = R \cdot i^2(t)} \quad [W]$$

$$P(t) = U(t) \cdot i(t) = U(t) \cdot \frac{U(t)}{R} = \frac{U^2(t)}{R} \Rightarrow \boxed{P(t) = \frac{U^2(t)}{R}} \quad [W]$$

doğru akımda

$$\boxed{P = I^2 \cdot R}$$

$$\boxed{P = \frac{V^2}{R}}$$

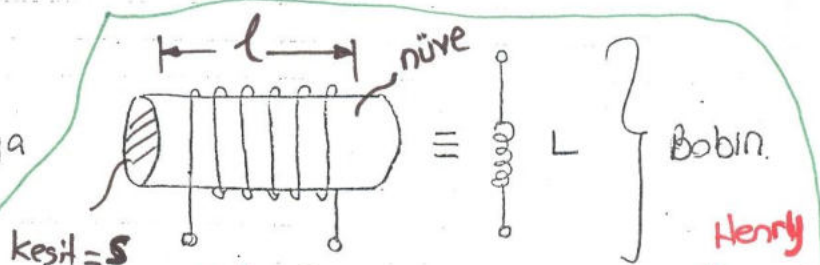
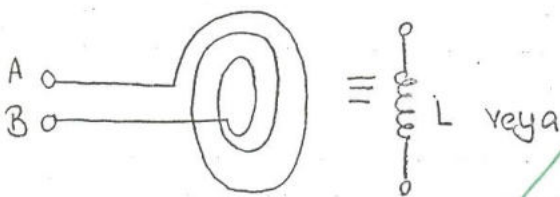
Direnç "pasif" elemandır.

$$E(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau \geq 0$$

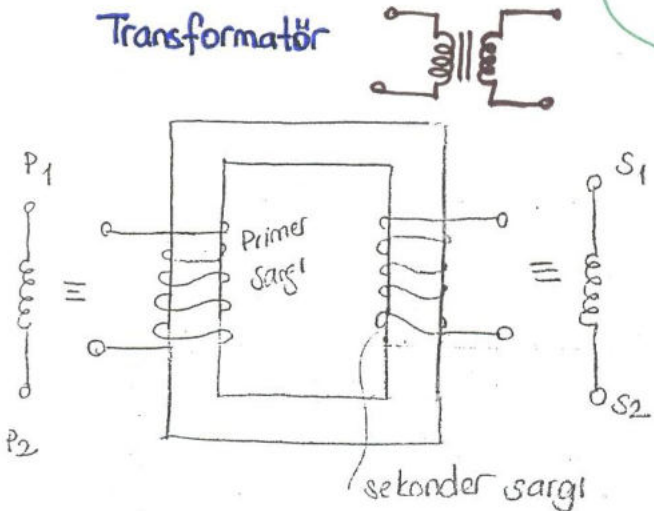
$$E(t) = \int_0^t R \cdot i^2(\tau) d\tau \geq 0$$

Akım (-) olsa bile karesi (i^2) (+) olduğu için $E(t)$ her zaman (+) olur.

2 uçlu lineer endüktans elemanı (bobin) (L)



Transformatör

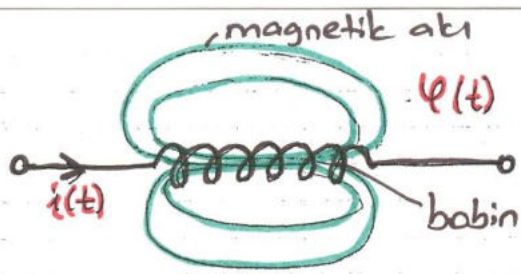


- N : Sarım sayısı
- μ : Magnetik geçirgenlik $[H/m]$
- S : Nüvenin kesiti $[m^2]$
- l : Nüvenin uzunluğu $[m]$
- L : Endüktans $[H]$

Bobinin endüktansı:

$$\boxed{L = \frac{N^2 \cdot \mu \cdot S}{l}}$$

μ malzemeye göre değişir.



$\psi(t)$: Magnetik akı fonksiyonu
[Weber [Wb]]

$$i_1(t) \longrightarrow \psi_1(t)$$

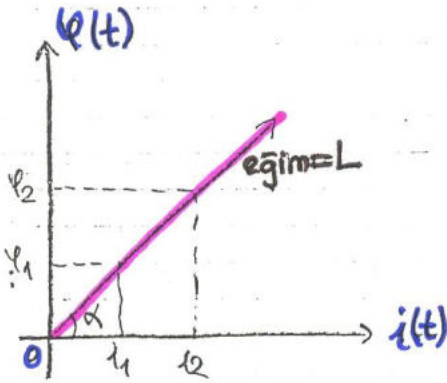
$$i_2(t) \longrightarrow \psi_2(t)$$

$$i_n(t) \longrightarrow \psi_n(t)$$

$$\frac{\psi_1(t)}{i_1(t)} = \frac{\psi_2(t)}{i_2(t)} = \dots = \frac{\psi_n(t)}{i_n(t)} = L = \text{sabit}$$

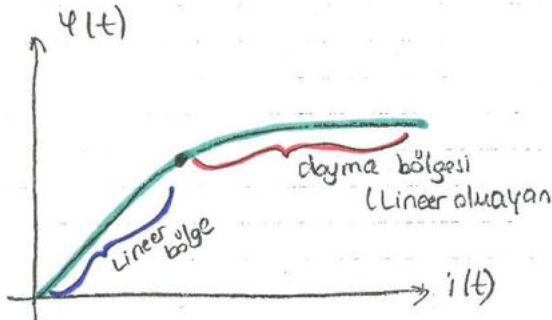
Bobinin endüktansı

birimi: Henry [H], [mH]
[μH]



Bobinin uç denklemini

$$\psi(t) = L \cdot i(t)$$



(*) N sarımlı bobinde indüklenen gerilim;

$$e(t) = N \cdot \frac{d\psi(t)}{dt}$$

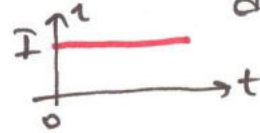
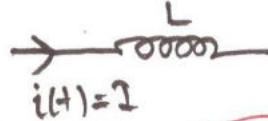
(*) Bir sarımdaki gerilim

$$e(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

$$\psi(t) = L \cdot i(t)$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Bir endüktanstan geçen akım, doğru akımda ise $i(t) = I = \text{sabit}$ $\frac{di}{dt} = 0$ olur



$$U_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 0 \text{ olur. } U=0 \text{ once kısa devrede olur.}$$

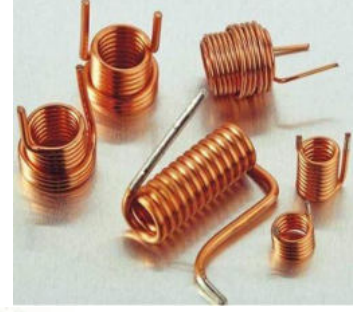
0 (dc)

0 halde "doğru akı devrelerinde bobin kısa devre gibi davranır"

$$\Rightarrow U(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

bobinin (endüktansın) uç denklemini

Endüktans (Bobin) (L) (Görseller)



Elektrik ve elektronik devrelerinde kullanılan çeşitli bobinler



Güç transformatörlerinin yüksek gerilim bobinleri

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t \psi(\tau) d\tau + i_0 \quad \text{ilk anda bobinden geçen akım}$$

Lineer endüktans içinde enerji depolayan elemandır. Bu enerjiyi magnetik alanda depolar.

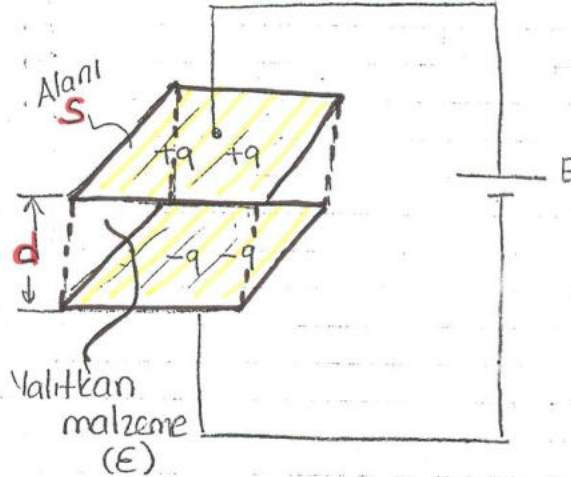
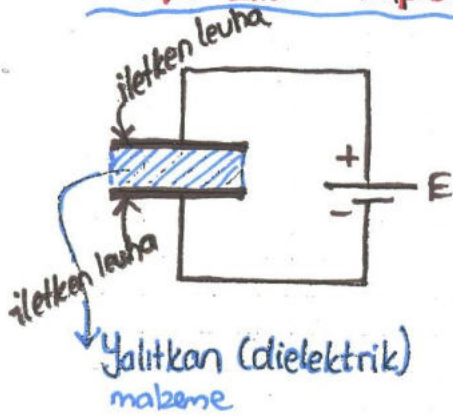
$$E_L(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t) \geq 0$$

Lineer endüktans pasif elemandır.

BURADA VIDEO-8 (ENDÜKTANSLAR) GÖSTERİLECEK

Araştırma: $E(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$ olduğunu ispatlayınız ödevi

2-uc'lu Lineer kapasite elemanı (kondansatör) (C)



Kondansatörün kapasitesi

$$C = \epsilon \cdot \frac{S}{d}$$

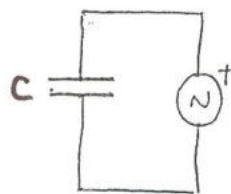
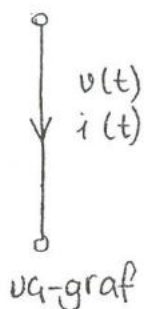
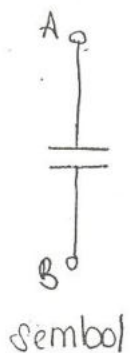
S : Elektrot yüzeyi (m^2)

d : Elektrotlar arası mesafe (m)

ϵ : Dielektrik malzemenin dielektrik sabiti ($\frac{F}{m}$)

C = Kondansatörün kapasitesi (F)

kapasite birimi: Farad (F)



Gerilim uygulanınca yük

$$V_1(t) \rightarrow q_1(t)$$

$$V_2(t) \rightarrow q_2(t)$$

$$V_n(t) \rightarrow q_n(t)$$

BURADA VIDEO-9 (KONDANSATÖRÜN ÇALIŞMASI) GÖSTERİLECEK

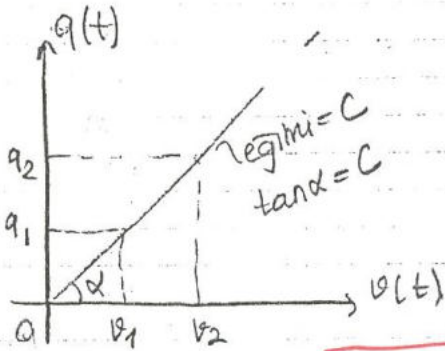
$$\frac{q_1(t)}{v_1(t)} = \frac{q_2(t)}{v_2(t)} = \dots = \frac{q_n(t)}{v_n(t)} = C = \text{Sabit}$$

↳ Kondansatörün kapasitesi

Kondansatörün
uç denklemleri

$$q(t) = C \cdot v(t)$$

↓ yük (coulomb) (C) ↓ Kapasite (F) ↓ gerilim (V)



$$\mu F = 10^{-6} F$$

$$nF = 10^{-9} F$$

$$pF = 10^{-12} F$$

Akımın tanımı: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ $q(t) = C \cdot v(t)$

$$\frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} v(t) \Rightarrow v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_0$$

ilk anda
(t=0)
kondansatör
uçlarındaki gerilim

Lineer kondansatör enerji depolayan bir elemandır. Bu enerjiyi elektrik alanında depolar.

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \geq 0$$

Lineer kapasite
pasif elemandır.

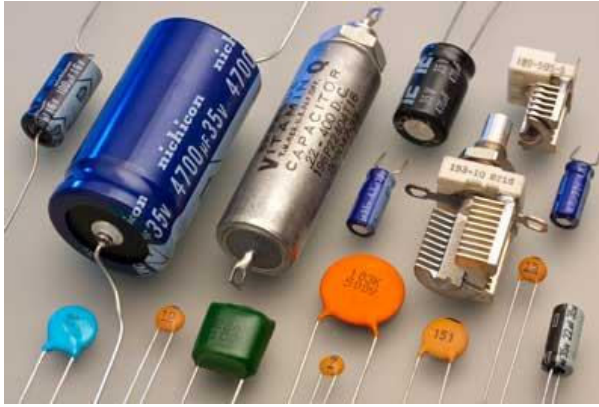
İspat: $E(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau = \int_0^t v(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \int_0^t C \cdot v(t) \cdot \frac{d}{dt} v(t) dt = \dots = \frac{1}{2} C v^2(t)$

BURADA VIDEO-10 KONDANSATÖRLERLE İLGİLİ AYRINTILI VIDEO) GÖSTERİLECEK

Elektrik Devrelerinde Kaynaklar

- 1- Gerilim kaynağı
- 2- Akım kaynağı

Kondansatör (C) (Görseller)



Elektronik devrelerinde kullanılan çeşitli kondansatörler



AC 220 V bir fazlı buzdolabı kondansatörü

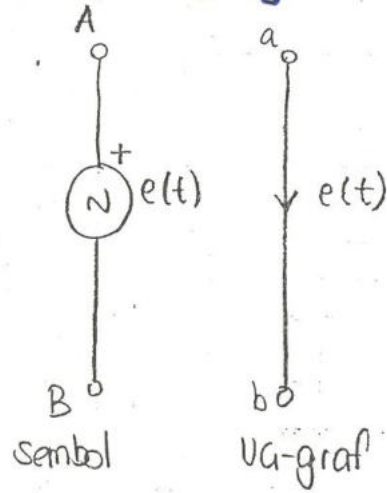


400V 25 kVar

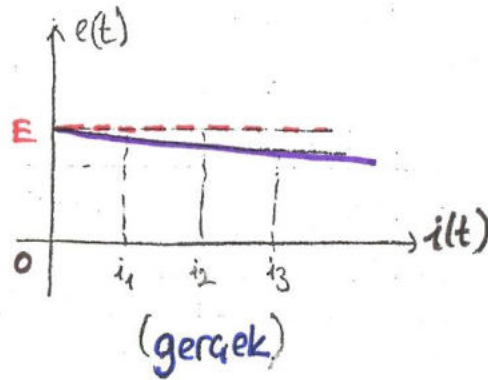
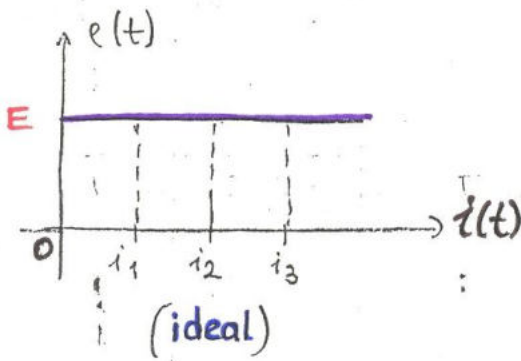


Reaktif Güç Kompanzasyon panolarında kullanılan üç fazlı kondansatörler

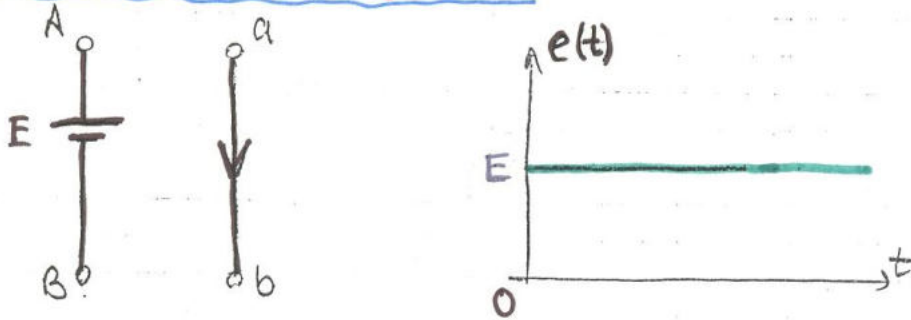
Gerilim Kaynağı



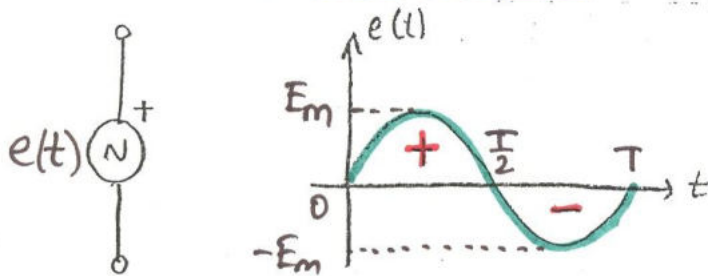
İçinden geçen akım ne olursa olsun uçlarındaki gerilim aynı kalan kaynağa "ideal gerilim kaynağı" denir



Doğru gerilim kaynağı (dc)

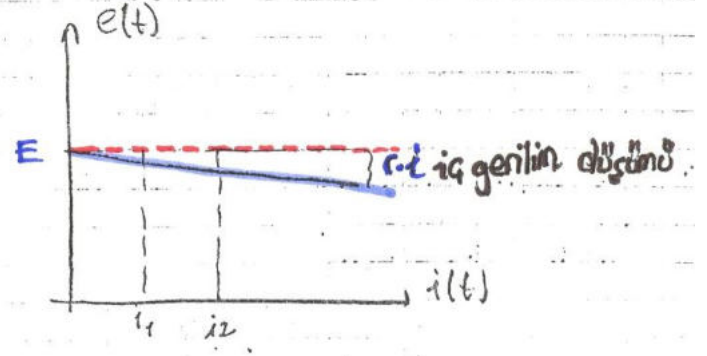
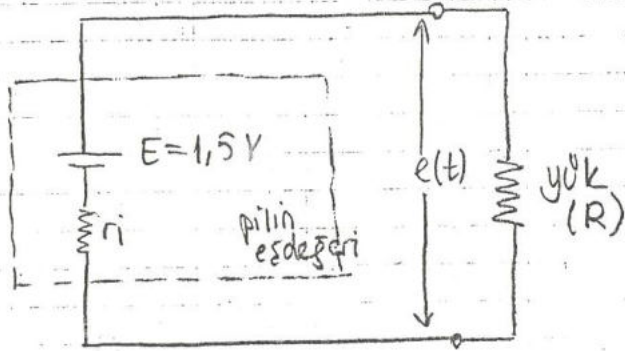


Alternatif (ac) gerilim kaynağı

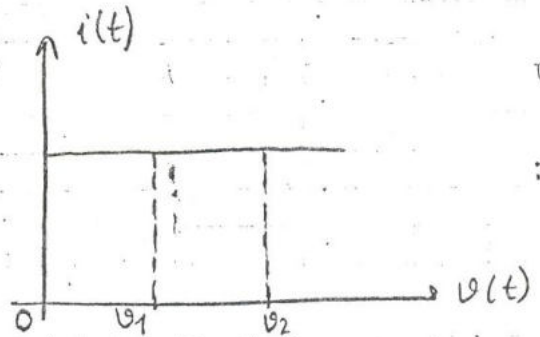
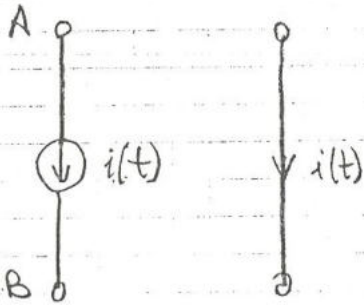


İdeal ac gerilim kaynağında çekilen akım ne olursa olsun gerilimin efektif değeri, tepe değeri ve frekansı değişmez.

Pratikte her gerilim kaynağının bir iç direnci vardır. Bu iç direnç nedeniyle çekilen akım arttıkça kaynak uçlarındaki gerilim azalır.

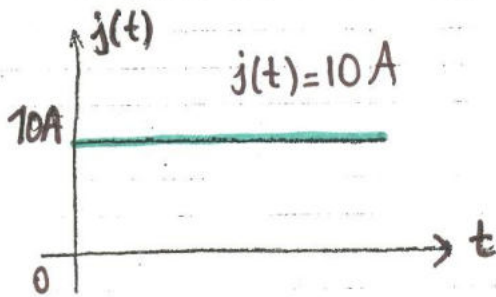


Akım kaynağı

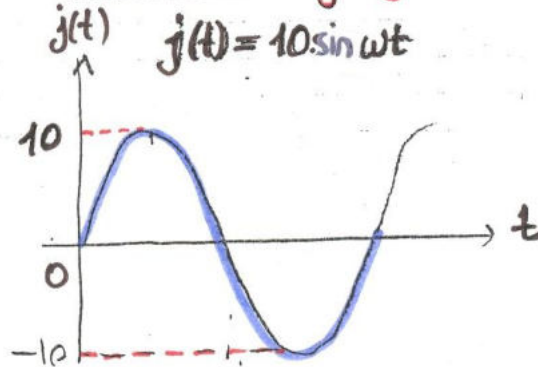


Uçlarındaki gerilim ne olursa olsun içinden geçen akım aynı kalan elemanlar denir.

dc akım kaynağı



ac akım kaynağı

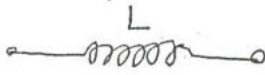


* Bütün kaynaklar enerji verdikleri için aktif elemanlardır.

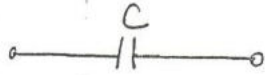
(*)



$$V_R(t) = R \cdot i(t)$$



$$V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$



$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

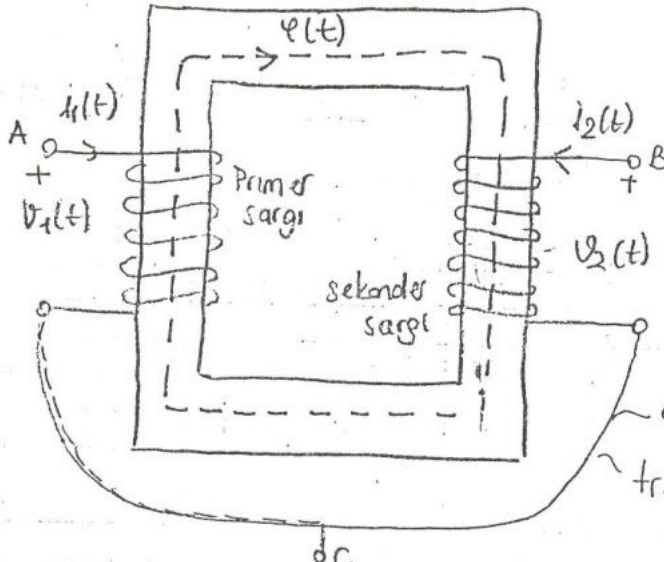
dc'de akım sabit olduğu için $\frac{di}{dt} = 0$ olur $\Rightarrow V_L = 0$

$V_L = 0$ dc'de bobin devre gibi davranır.

$i_C = 0$ dc'de kondansatör açık devre gibi davranır.

Kondansatöre dc gerilim uygulanırsa, $V = \text{sabit}$ olduğu için $\frac{dv}{dt} = 0$ olur $\Rightarrow i_C = 0$

3-üçlü elemanlar İdeal transformator



$V_1(t) \rightarrow i_1(t)$ akım geçer

$i_1(t) \rightarrow \phi(t) = L \cdot i_1(t)$

$\phi(t) \rightarrow V_2(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$

alt uçlar birleştirilirse
trf. ön çalışması değişmez.

N_1 : Primer sarım sayısı

N_2 : Sekonder sarım sayısı ise, dönüştürme oranı n ,

$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

Transformatorün primerine $V_1(t)$ ac gerilimi uygulanınca $i_1(t)$ akımı geçer, $i_1(t)$ magnet devrede $\phi(t)$ akısını oluşturur! $\phi(t)$ akısı sekonder sargıda $V_2(t)$ gerilimini endükler.

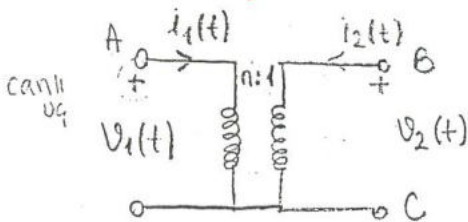
(*)

N_1 sarımlı primere gerilim uygulanınca

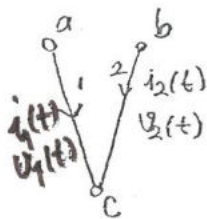
$N_1 > N_2$ ise indirici trf. ($n > 1$)

$N_1 < N_2$ ise yükseltici trf. ($n < 1$)

İdeal Trf.'ün matematiksel modeli



sembol



Ug-graf

$$\begin{bmatrix} V_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix}$$

Ug-denklemleri

matematiksel model

$$\Rightarrow V_1(t) = n \cdot V_2(t)$$

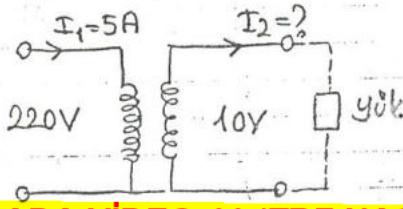
$$i_2(t) = -n \cdot i_1(t)$$

gerilim ve akımların efektif değeri alınırsa

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \boxed{V_1 I_1 = V_2 I_2} \quad \vec{P}_1 = P_2$$

örnek:



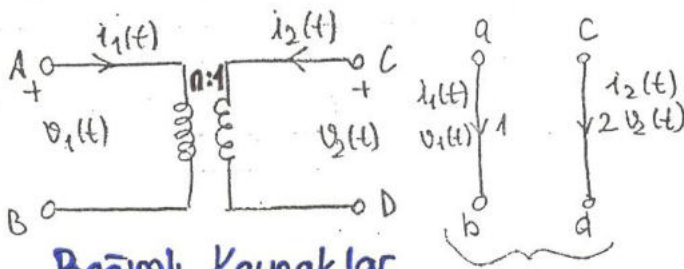
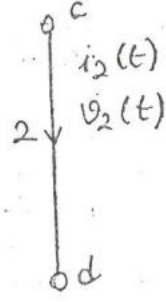
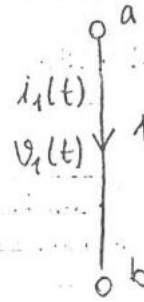
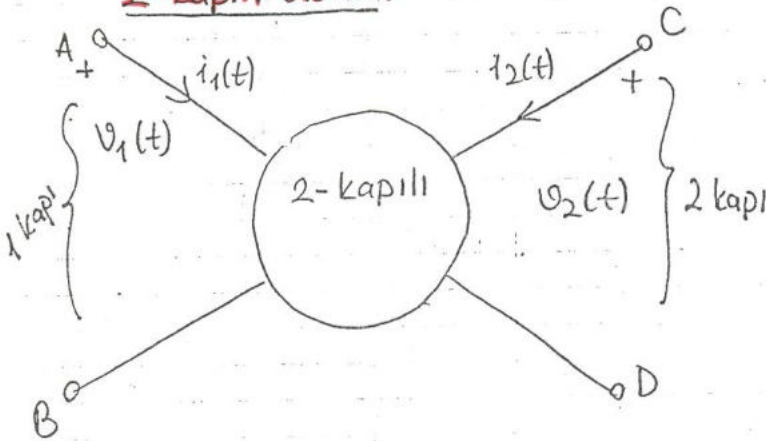
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

$$\frac{220}{10} = \frac{I_2}{5} \quad I_2 = 110A$$

BURADA VIDEO-11 (TRF NASIL ÇALIŞIR?) GÖSTERİLECEK

2-kapılı 4-uculu eleman olarak ideal trf.

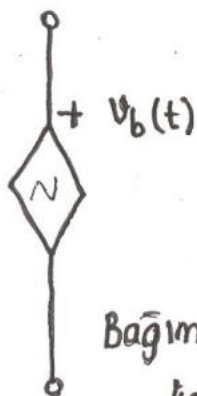
2-kapılı eleman



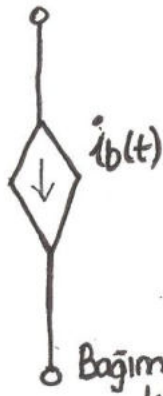
Bağımlı Kaynaklar

$$\begin{bmatrix} V_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix}$$

Bağımlı kaynaklar,
* Aktif elemanlardır. Devreye enerji verirler.



Bağımlı gerilim kaynağı

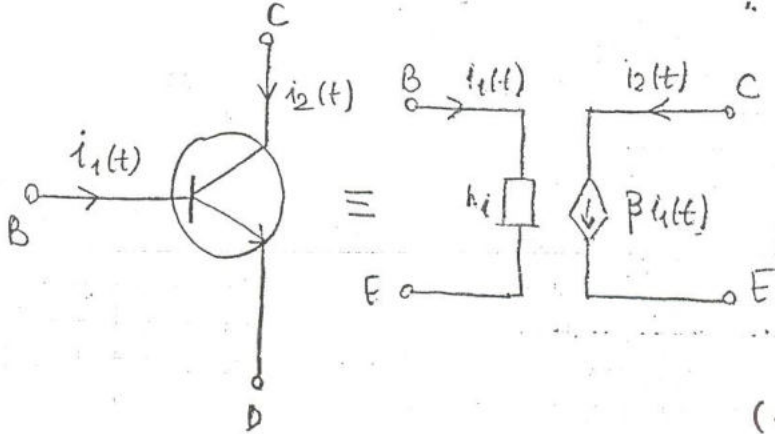


Bağımlı akım kaynağı

4 geşit. bağımlı kaynak vardır.

- En üst kullananlar:
- 1) Akım bağımlı (kontrollü) akım kaynağı $\rightarrow i_b = k \cdot i_1$
 - 2) Gerilim " " " " $\rightarrow i_b = k \cdot v_1$
 - 3) " " " gerilim " $\rightarrow v_b = k \cdot v_1$ ($k = s/bt$)
 - 4) Akım " " " " $\rightarrow v_b = k \cdot i_1$

Örneğin transistör akım bağımlı akım kaynağı olarak modellenir. (x)



$$i_2(t) = \beta i_1(t)$$

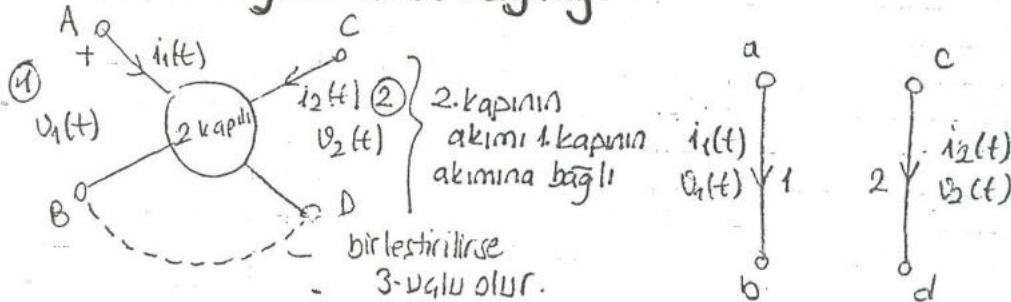
β : Akım kazancı (sabit)

$$i_1 = 1 \text{ mA}, \beta = 100 \text{ ise}$$

$$i_2 = 100 \text{ mA olur.}$$

$$(i_2 = \beta \cdot i_1 = 100 \cdot 1 = 100 \text{ mA})$$

~ Akım bağımlı akım kaynağı ~

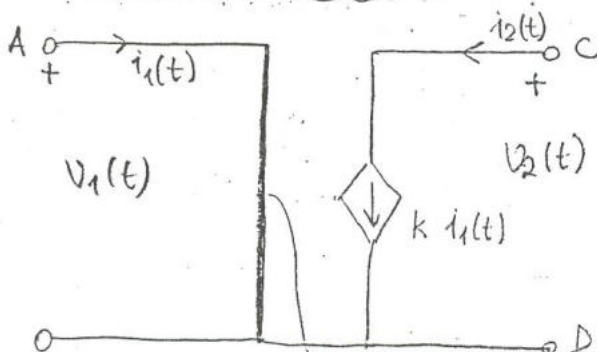


$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

Kontrol eden büyüklük

$$\begin{cases} i_2(t) = k i_1(t) \end{cases} \rightarrow \text{Kontrol edilen büyüklük}$$

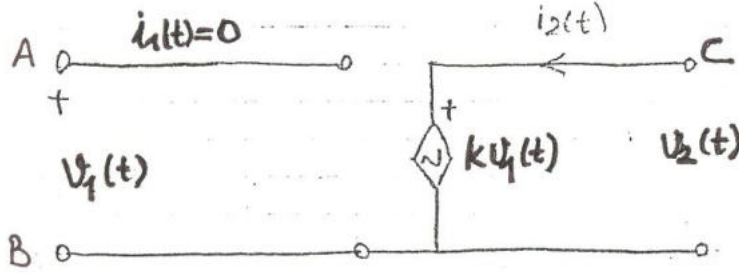
$v_1(t) = 0 \rightarrow$ (1.kapı kısa devre gibi davranıyor)



$v_1(t) = 0$ olduğu için kısa devre olarak gösteriliyor.

~ Gerilim Bağımlı Gerilim Kaynağı ~

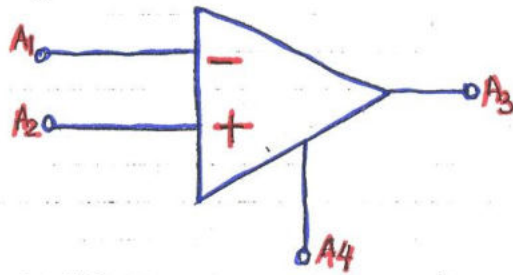
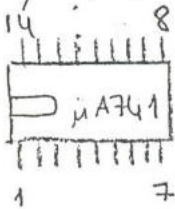
$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} i_1(t) &= 0 \text{ (Açık devre)} \\ v_2(t) &= k \cdot v_1(t) \end{aligned}$$



İşlemsel Kuvvetlendirici (OPAMP)

Gerçekten bir entegre devredir.

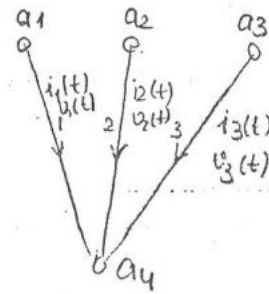
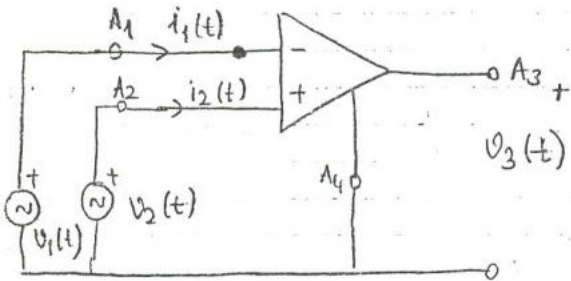
Örn: $\mu A741$ entegresi



A_1, A_2 : Giriş uçları

A_3 : Çıkış ucu

A_4 : Ortak uç



$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -A & A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix}$$

$$i_1(t) = 0$$

$$i_2(t) = 0$$

$$v_3(t) = A \cdot (v_2(t) - v_1(t))$$

İşlemsel kuvvetlendiricinin gerilim kazancı (teorik olarak ∞ , pratikte 10^5 mertebesinde)

