

Soru 1 :

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve bunlara karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

Çözüm : A'nın karakteristik polinomu:

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 \text{ dir.}$$

$|\lambda I_2 - A| = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ denkleminin kökleri olan $\lambda_1 = 5$ ve $\lambda_2 = -1$ değerleri A matrisinin özdeğerleridir.

$\lambda_1 = 5$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulmak için $(\lambda I_2 - A)X = 0$ denklem sisteminde $\lambda_1 = 5$ yazarak sistemin çözümünü bulalım.

$$(5I_2 - A)X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$4x_1 + 2x_2 = 0$ sistemi çözülürse sıfırdan farklı çözümler:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0 \text{ dir.}$$

Buradan $x_1 = 1$ keyfi değeri için $\lambda_1 = 5$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ olur.

$\lambda_2 = -1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü benzer şekilde bulalım:

$$(\lambda I_2 - A)X = 0, (-I_2 - A)X = 0, \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümleri:}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0 \text{ dir.}$$

Buradan da $x_1 = 1$ keyfi değeri iken $\lambda_2 = -1$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dir.

Soru 2:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrisinin özdeğerlerini}$$

bulunuz.

Çözüm:

$$|\lambda I_4 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 10 & 9 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

Olur. Burada determinant açılımı yaparsak;

$$|\lambda I_4 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 10 & 9 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{1. sütuna}}}{=} (\lambda - 10) \cdot \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 7 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 7 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

göre determinant
açılımı yaparsak

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{1. sütuna göre}}}{=} (\lambda - 10)(\lambda + 2) \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 7 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 7 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

determinant açılımı yaparsak

$$= (\lambda - 10)(\lambda + 2)[\lambda^2 - 4 + 7] + 36[\lambda^2 - 4 + 7]$$

$$= [\lambda^2 + 3][\lambda^2 - 8\lambda - 20 + 36]$$

$$= [\lambda^2 + 3][\lambda^2 - 8\lambda + 16]$$

$$= [\lambda^2 + 3][\lambda - 4]^2 = 0$$

denkleminin reel kökü $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ değerleri A matrisinin özdeğerleridir.

Soru 3 : n . mertebeden A matrisinin karakteristik polinomu $(|\lambda I_n - A|)$ 'in sabit teriminin $(-1)^n |A|$ olduğunu gösteriniz.

Gözüm : Karakteristik polinom $P_A(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ da $\lambda = 0$

Konulursa sabit terim elde edilir. Buna göre;

$$P_A(0) = |-A| = (-1)^n |A| \text{ dir.}$$

↓
determinant
özelliklerini
kullanırsak
(Özellik 5-sayfa 297)

• Hatırlatma (Teorem 14.6) : A kare matrisinin terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $\lambda = 0$ değerinin A nın bir özdeğeri olmamasıdır.

Soru 4 : A , n . mertebeden bir matris ve λ , A nın bir özdeğeri olsun. A nın tersi mevcut ise $\frac{1}{\lambda}$, A^{-1} in bir özdeğeri.

Gözüm : A nın tersi mevcut olduğundan Teorem 14.6 dan $\lambda \neq 0$ dir.

$$AX = \lambda X \Rightarrow \frac{1}{\lambda} AX = X \Rightarrow A^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} AX \right) = A^{-1} X$$

$$\Rightarrow A^{-1} X = \frac{1}{\lambda} X$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}, A^{-1} \text{ matrisinin bir özdeğeri.}$$

Soru 5: Soru 4 ten yararlanarak

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ matrisi için } A^{-1} \text{ matrisinin}$$

özdeğerlerini hesaplayınız.

Çözüm: Önce A matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 \\ 12 & \lambda & -5 \\ -4 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{1. satıra} \\ \text{göre determinant} \\ \text{açılımı yaparsak}}}{=} (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda & -5 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & -5 \\ -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & \lambda \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |\lambda I_3 - A| &= (\lambda-3)[\lambda(\lambda+1)+10] - [12(\lambda+1)-20] + [24+4\lambda] \\ &= (\lambda-3)(\lambda^2+\lambda+10) - 12\lambda + 19 + 24 + 4\lambda \\ &= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 \\ &= (\lambda^2-1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

$|\lambda I_3 - A| = 0$ denkleminde A matrisinin özdeğerleri:

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 2$ elde edilir.

Soru 4 teki bilgimizden, A^{-1} matrisinin özdeğerleri:

$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}$ yani; $-1, 1$ ve $\frac{1}{2}$ dir.

Soru 6 : a) A n . mertebeden bir matris olsun. A ve A^t nin aynı özdeğerlere sahip olduğunu gösteriniz.

b) A ve A^t nin farklı özvektörlere sahip olduğu bir örnek bulunuz.

Hatırlatma : A nin determinanti ile A^t nin determinanti aynıdır.

Gözüm : a) λ , A matrisinin bir özdeğeri olsun. Bu

durumda $|A - \lambda I_n| = 0$ dir. Hatırlatmada yer alan bilgiyi

kullanırsak:
 $0 = |A - \lambda I_n| = |(A - \lambda I_n)^t| = |A^t - \lambda I_n|$ eşitliğinden istenilen elde edilir.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun $\Rightarrow | \lambda I_2 - A | = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, A matrisinin özdeğerleridir. $(\lambda I_2 - A)X = 0$ da

$\lambda = 1$ yazarsak; $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0$ olup;

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ özdeğere

karşılık gelen özvektördür. $x = 1$ keyfi değeri için A matrisinin $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ alınabilir.

a) dan A^t nin özdeğeri $\lambda = 1$ olduğunu biliyoruz.

$(\lambda I_2 - A^t)X = 0$ da $\lambda = 1$ yazarsak;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x=0 \text{ olup;}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, y \neq 0, \lambda = 1 \text{ özdeğerine karşılık}$$

gelen özvektördür. Burada, $y=1$ keyfi değeri alın
 A^t matrisinin $\lambda=1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü
 olarak $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alınabilir.

Şu halde, bir matrisin transpozesi ile özvektörleri aynı
 olmak zorunda değildir.