Soru 1 : $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x,y) = (x+2y, 2x+y)$ Lineer dönüşümünün

a) Özdeğer ve özvektörlerini,

b) Özdeğerlerine karşılık gelen karakteristik uzayları

bulunuz.

Hatırlatma: * Tanım 13.1 : V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $A: V \to V$ lineer dönüşüm olsun. $\vec{\alpha} \in V$, $\lambda \in \mathcal{F}$ olmak üzere A lineer dönüşümünün $A(\vec{\alpha}) = \lambda \vec{\alpha}$ olacak şekilde $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ varsa λ ya A lineer dönüşümünün "karakteristik değeri" ve ya "öz değeri" ve $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ vektörüne A nın λ karakteristik değerine karşılık gelen "karakteristik vektörü" ve ya "özvektörü" denir.

* Tanım 13.2 : V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde n boyutlu vektör uzayı olsun. $A: V \to V$ lineer dönüşümünün λ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektörlerin kümesi V_λ ile gösterilir ve $V_\lambda = \{ \vec{\alpha} \in V \mid A(\vec{\alpha}) = \lambda \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \neq \vec{0}, \lambda \in \mathcal{F}, A: V \xrightarrow{\text{lineer}} V \}$ şeklinde tanımlanır. Bu küme V vektör uzayının bir alt uzayıdır. Bu uzaya λ karakteristik değerine karşılık gelen "karakteristik uzay" denir.

Çözüm : a) $A(x,y) = (x+2y, 2x+y) = \lambda(x,y) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y = \lambda x \\ 2x+y = \lambda y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ 2x + (1-\lambda)y = 0 \end{array}$$

Son lineer homojen denklem sisteminin sıfır çözümden farklı çözümlerinin bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul, katsayılar matrisinin determinantının 0 olmasıdır. Şu halde,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

eşitliğinden, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ özdeğerleri bulunur.

$\lambda_1 = 3$ için özvektörler,

$2x - 2y = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ denklemi çözülerek bulunur.

Şu halde, $\lambda_1 = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler $x = y = a \neq 0$ olmak üzere; $(a,a) \in \mathbb{R}^2$'lerdir.

$\lambda_2 = -1$ için özvektörler,

$2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$ denklemi çözülerek bulunur

$x = -y = b \neq 0$ olmak üzere $(b,-b) \in \mathbb{R}^2$'lerdir.

b) $\lambda_1 = 3$ için karakteristik uzay:

$V_3 = \{(a,a) : 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$ olup, bir tabanı $\{(1,1)\}$ alınabilir ve $\text{Boy} V_3 = 1$ dir.

$\lambda_2 = -1$ için karakteristik uzay:

$V_{-1} = \{(b,-b) : 0 \neq b \in \mathbb{R}\}$ olup bir tabanı $\{(1,-1)\}$ alınabilir ve $\text{Boy} V_{-1} = 1$ dir.

Soru 2: $A: P_2 \to P_2$ lineer dönüşümü

$A(a + bt + ct^2) = (5a + 6b + 2c) - (b + 8c)t + (a - 2c)t^2$ ile tanımlansın. A lineer dönüşümünün karakteristik denklemini bulunuz.

Hatırlatma (Tanım 13.3): V, F cismi üzerinde n boyutlu vektör uzayı ve $A: V \to V$ lineer dönüşümü üzerinde tanımlanan $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ifadesine A lineer dönüşümünün "karakteristik polinomu", $P_A(\lambda) = 0$ ifadesine de "karakteristik denklemi" denir.

Çözüm : $0 \neq p(t) = a+bt+ct^2 \in P_2$ için

$A(p(t)) = \lambda p(t)$ eşitliğini sağlayan λ reel sayıları A nın öz değerleridir.

$A(p(t)) = (5a+6b+2c) - (b+8c)t + (a-2c)t^2 = \lambda(a+bt+ct^2)$

eşitliğinden; $5a+6b+2c = \lambda a$, $-b-8c = \lambda b$ ve $a-2c = \lambda c \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} a(5-\lambda)+6b+2c&=0 \\ -b(1+\lambda)-8c&=0 \\ a-c(2+\lambda)&=0 \end{aligned}\right\} \text{denklem sistemi elde edilir.}$$

λ nın A nın bir öz değeri olması için yukarıdaki sistemin sıfır çözümden farklı bir çözümünün olması gerekir, bunun için gerek ve yeter koşul; katsayılar matrisinin determinantının 0 olmasıdır. Bu ise,

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & 2 \\ 0 & -(1+\lambda) & -8 \\ 1 & 0 & -(2+\lambda) \end{vmatrix} = 0 \text{ olması demektir.}$$

1. sütuna göre bu determinant açılırsa:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & 2 \\ 0 & -(1+\lambda) & -8 \\ 1 & 0 & -(2+\lambda) \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -(1+\lambda) & -8 \\ 0 & -(2+\lambda) \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -(1+\lambda) & -8 \end{vmatrix}$$

$= (5-\lambda)[(1+\lambda)(2+\lambda) - 0] + 1.[-48+2(1+\lambda)]$

$= (5-\lambda)[\lambda^2+3\lambda+2] + [2\lambda-46]$

$= -\lambda^3+2\lambda^2+13\lambda+10+2\lambda-46$

$= -\lambda^3+2\lambda^2+15\lambda-36$

$= (\lambda-3)^2.(\lambda+4)$ bulunur.

O halde, A lineer dönüşümünün karakteristik denklemi:

$P_A(\lambda) = (\lambda-3)^2.(\lambda+4) = 0$ olarak elde edilir.

Soru 3 : Düzlemde π açılık dönmenin belirttiği endomorfizmanın özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Hatırlatma : θ açılı dönme: $L(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$

Çözüm : $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto L(x,y) = (x\cos\pi - y\sin\pi,\ x\sin\pi + y\cos\pi)$$
$$= (-x, -y)$$

olduğundan, özdeğerlerini bulmak için;

$L(x,y) = (-x,-y) = \lambda(x,y) \Rightarrow -x = \lambda x$ ve $-y = \lambda y$, yani,

$\left.\begin{matrix}(\lambda+1)x = 0 \\ (\lambda+1)y = 0\end{matrix}\right\}$ olmalıdır. Burada, $x=y=0$ dan başka çözüm bulunabilmesi için, $\lambda = -1$ olmalıdır. Şu halde karakteristik uzay $V_{-1} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dır.