

SORU : 2-boyutlu Öklid uzayı E^2 verilsin. $X=(x_1, x_2)$, $Y=(y_1, y_2) \in \mathcal{X}(E^2)$

olmak üzere

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

şeklinde

$$\langle, \rangle : \mathcal{X}(E^2) \times \mathcal{X}(E^2) \longrightarrow C^\infty(E^2, \mathbb{R})$$

fonksiyonu veriliyor. $\langle, \rangle$ nin E^2 üzerinde Riemann metriği olduğunu gösteriniz.

Hatırlatma : M bir dif'bilir manifold, M üzerinde vektör alanları uzayı

$\mathcal{X}(M)$ olsun. Eğer $\mathcal{X}(M)$ üzerinde

$$\langle, \rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \longrightarrow \langle X, Y \rangle$$

şeklinde bir iç-çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu, $\langle, \rangle$ iç çarpımına da Riemann metriği adı verilir.

Gözüm:

• Simetri

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(E^2)$, $X=(x_1, x_2)$, $Y=(y_1, y_2)$ ol. üzere

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

$$= y_1 x_1 + y_2 x_1 + y_1 x_2 + 2y_2 x_2$$

$$= \langle Y, X \rangle$$

Olup simetri özelliği sağlanır.

• Bilineerlik :

$$\forall X=(x_1, x_2) \quad Y=(y_1, y_2) \quad , \quad Z=(z_1, z_2) \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2) \quad \text{ve} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{için}$$

$$\begin{aligned} \langle (aX+bY), Z \rangle &= (ax_1+by_1)z_1 + (ax_1+by_1)z_2 + (ax_2+by_2)z_1 + 2(ax_1+by_1)z_2 \\ &= ax_1z_1 + by_1z_1 + ax_1z_2 + by_1z_2 + ax_2z_1 + by_2z_1 + 2ax_1z_2 + 2by_2z_2 \\ &= a(x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + 2x_1z_2) + b(y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + 2y_2z_2) \\ &= a \langle X, Z \rangle + b \langle Y, Z \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle X, (aY+bZ) \rangle &= x_1(ay_1+bz_1) + x_2(ay_2+bz_2) + x_2(ay_1+bz_1) + 2x_2(ay_2+bz_2) \\ &= ax_1y_1 + bx_1z_1 + ax_2y_2 + bx_2z_2 + ax_2y_1 + bx_2z_1 + 2ax_2y_2 + 2bx_2z_2 \\ &= a(x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2) + b(x_1z_1 + x_2z_2 + x_2z_1 + 2x_2z_2) \\ &= a \langle X, Y \rangle + b \langle X, Z \rangle \end{aligned}$$

Böylece bilinearlik aksiyomu sağlanır.

• Pozitif tanımlılık:

$\forall X \in \mathcal{X}(E^2)$ için $\langle X, X \rangle \geq 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\langle X, X \rangle = x_1 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_1 + 2x_2 x_2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$$

$$\Rightarrow \langle X, X \rangle \geq 0$$

dir. Ayrıca

$$\langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \wedge x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

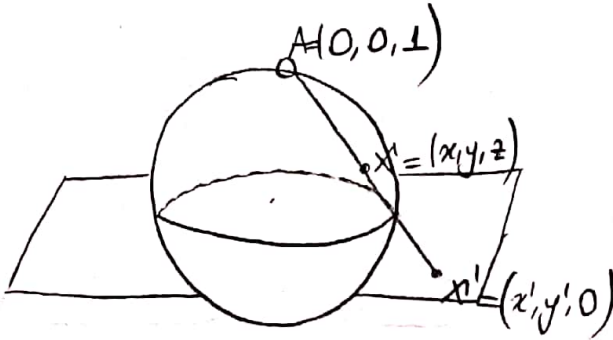
$$\Leftrightarrow X = 0$$

elde edilir.

Böylelikle $\langle, \rangle$ fonksiyonu E^2 üzerinde bir Riemann metriğidir.

SORU: Kürenin iki haritadan oluşan bir atlasını bularak diffebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $S^2 = \{(x, y, z) \in E^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



stereographic izdüşüm

$U_1 = S^2 - \{A\}$ kümesi, S^2 de açık kümedir.

$$\overrightarrow{AX'} = \lambda \overrightarrow{AX'} = (x' - x, y' - y, -z) = \lambda(x', y', -1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' - x = \lambda x' & \Rightarrow x'(1 - \lambda) = x \\ y' - y = \lambda y' & \Rightarrow y'(1 - \lambda) = y \\ -z = -\lambda & \Rightarrow z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x' &= \frac{x}{1 - \lambda} \\ y' &= \frac{y}{1 - \lambda} \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

$$\psi_1: U_1 \subset S^2 \rightarrow E^2 \quad (x', y')$$

$$(x, y, z) \rightarrow \psi_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - \lambda}, \frac{y}{1 - \lambda} \right)$$

dönüşümü sürekli ve 1-1 dir.

Örtenlik!

$\forall P=(x_1, y_1) \in E^2$ için $\Psi_1(x)=P$ olacak şekilde $\exists X \in U$ bulmalıyız.

$$\Psi_1(x)=P \Rightarrow \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) = (x_1, y_1) \Rightarrow x_1 = \frac{x}{1-z}, \quad y_1 = \frac{y}{1-z} \quad \text{--- (*)}$$

olup

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{x^2 + y^2 + z^2 = 1} = \frac{1-z^2}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow z = \frac{x_1^2 + y_1^2 - 1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}$$

$$(*) \text{ eşitliğinden } x_1 = \frac{x}{1-z} \text{ ve } y_1 = \frac{y}{1-z} \Rightarrow x = (1-z)x_1, \quad y = (1-z)y_1$$

$$x = \frac{2}{x_1^2 + y_1^2 + 1} x_1, \quad y = \frac{2}{x_1^2 + y_1^2 + 1} y_1$$

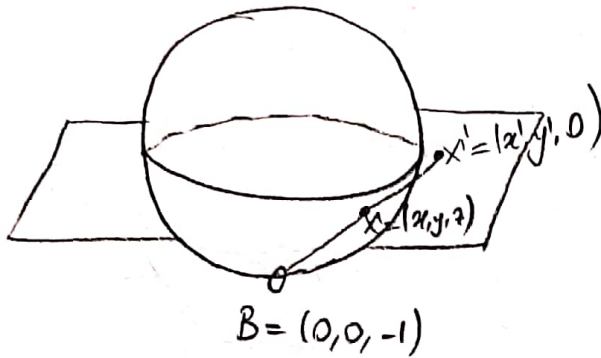
bulunur.

$$\Psi_1^{-1}(x_1, y_1) = \left(\frac{2}{x_1^2 + y_1^2 + 1} x_1, \frac{2}{x_1^2 + y_1^2 + 1} y_1, \frac{x_1^2 + y_1^2 - 1}{x_1^2 + y_1^2 + 1} \right)$$

dir.

Bu durumda, Ψ_1^{-1} dönüşümü sürekli olduğundan Ψ_1 bir homeomorfizmadır.

$\Rightarrow (\Psi_1, U_1)$ ikilisi haritadır.



$U_2 = S^2 - \{B\}$ kümesi S^2 de açık alt kümedir.

$$\overrightarrow{BX'} = \lambda \overrightarrow{BX} \Rightarrow (x' - x, y' - y, -z) = \lambda (x, y, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' - x = \lambda x & \Rightarrow x'(1 - \lambda) = x \\ y' - y = \lambda y & \Rightarrow y'(1 - \lambda) = y \\ -z = \lambda & \Rightarrow \lambda = -z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x' &= \frac{x}{1 - \lambda} & x' &= \frac{x}{1 + z} \\ y' &= \frac{y}{1 - \lambda} & y' &= \frac{y}{1 + z} \\ \lambda &= -z \end{aligned}$$

$$\Psi_2 : U_2 \subset S^2 \rightarrow E^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow \Psi_2(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 + z}, \frac{y}{1 + z} \right)$$

dönüşümü sürekli ve 1-1 dir.

$\forall Q = (x, y) \in E^2$ için $\Psi_2(X) = Q$ o.s $\exists X \in U_2$ vardır.

$$\psi_2(x) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) = (x_1, y_1)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{x}{1+z}, \quad y_1 = \frac{y}{1+z} \quad \dots \quad (*) \circledast$$

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{x^2}{(1+z)^2} + \frac{y^2}{(1+z)^2} = \frac{1}{(1+z)^2} (x^2 + y^2) = \frac{1}{(1+z)^2} (1-z^2) = \frac{1-z}{1+z}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = \frac{1-z}{1+z}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1 - x_1^2 - y_1^2}{1 + x_1^2 + y_1^2}$$

$$\circledast (*) \text{ eşitliğinden} \quad x = (1+z)x_1 = \frac{2}{1+x_1^2+y_1^2} x_1$$

$$y = (1+z)y_1 = \frac{2}{1+x_1^2+y_1^2} y_1$$

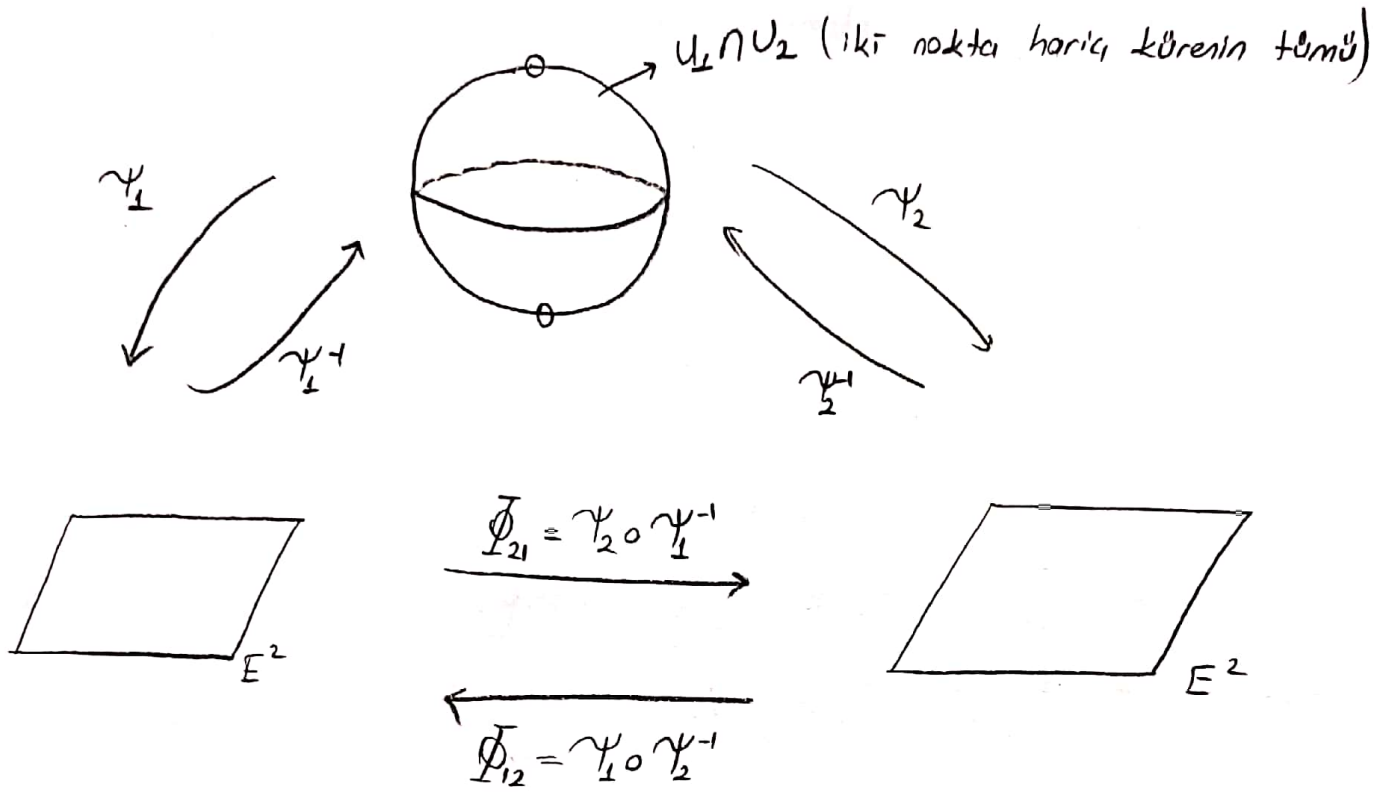
$$\psi_2 \text{ örten olup} \quad \psi_2^{-1}(x_1, y_1) = (x, y, z) = \left(\frac{2}{x_1^2+y_1^2+1} x_1, \frac{2}{x_1^2+y_1^2+1} y_1, \frac{1-x_1^2-y_1^2}{1+x_1^2+y_1^2} \right) \text{ dir.}$$

Bu durumda ψ_2^{-1} dönüşümü sürekli old. den ψ_2 bir homeomorfizmadır.

$\Rightarrow (\psi_2, U_2)$ ikilisi haritadır.

$\Rightarrow \{(\psi_i, U_i)\}_{i \in I = \{1,2\}}$ ailesi, S^2 için atlasıdır.

Bulduğumuz bu atlasın diffebilir bir yapı old. gösterirsek S^2 için diffebilir manifold olduğunu göstermiş oluruz.



- $\Phi_{21} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \psi_2(U_1 \cap U_2)$

$$\begin{aligned}
 \forall (u, v) \in \psi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \text{ için } \Phi_{21}(u, v) &= (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})(u, v) \\
 &= \psi_2(\psi_1^{-1}(u, v)) \\
 &= \psi_2\left(\frac{2}{x_1^2 + y_1^2 + 1} u, \frac{2}{x_1^2 + y_1^2 + 1} v, \frac{x_1^2 + y_1^2 - 1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}\right) \\
 &= \left(\frac{u}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{v}{x_1^2 + y_1^2}\right)
 \end{aligned}$$

Koordinat fonksiyonları diffebilir old. dan Φ_{21} dönüşümü diffebidir.

- $\Phi_{12} : \mathcal{V}_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \mathcal{V}_1(U_1 \cap U_2)$

$$\forall (u,v) \in \mathcal{V}_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \text{ için } \Phi_{12}(u,v) = (\mathcal{V}_1 \circ \mathcal{V}_2^{-1})(u,v)$$

$$= \mathcal{V}_1(\mathcal{V}_2^{-1}(u,v))$$

$$= \mathcal{V}_1\left(\frac{2}{1+x_1^2+y_1^2} u, \frac{2}{1+x_1^2+y_1^2} v, \frac{1-x_1^2-y_1^2}{1+x_1^2+y_1^2}\right)$$

$$= \left(\frac{u}{x_1^2+y_1^2}, \frac{v}{x_1^2+y_1^2}\right)$$

Bu fonksiyonun koordinat fonksiyonları difbilir old. dan Φ_{12} dönüşümü difbilirdir. Böylece, $\{(\mathcal{V}_i, U_i)\}_{i \in I = \{1,2\}}$ atlası, difbilir yapıdır. Bu nedenle

S^2 difbilir manifoldtur.

SORU: E^n nin topolojik manifold olduğunu gösteriniz.

Gözüm: E^n nin bir topolojik uzay olduğunu biliyoruz.

i) E^n Hausdorff uzayı

$\forall P, Q \in E^n$ ve $P \neq Q$ alalım. $d(P, Q) = \varepsilon$ olsun.

$B_1(P, \frac{\varepsilon}{3})$ ve $B_2(Q, \frac{\varepsilon}{3})$ açık yuvarları E^n de açık alt kümelerdir.

Kabul edelim ki $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ olsun. Yani

$\exists x \in B_1 \cap B_2$ var olsun.

$\Rightarrow x \in B_1$ ve $x \in B_2$

$\Rightarrow d(P, x) < \frac{\varepsilon}{3}$ ve $d(Q, x) < \frac{\varepsilon}{3}$ olur. Ayrıca

$d(P, Q) \leq d(P, x) + d(x, Q)$ olduğundan

$\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ bulunur. Bu bir çelişki olur $\nexists$

Dolayısıyla $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ dir. O halde E^n Hausdorff uzayıdır.

ii) E^n sonlu sayıda açık küme ile örtülebilir:

E^n topolojik uzay olduğundan E^n nin kendisi açıktır. $E^n \subset E^n$ olup

E^n ile örtülebilir.

ii) Homeomorfizm :

$U \subset E^n$ açık alt kümesi için

$$I: U \subset E^n \longrightarrow U \subset E^n$$

$$x \longrightarrow I(x) = x$$

birim dönüşümü homeomorfizmdir.

O halde E^n bir topolojik manifoldtur.