

Soru 1: P_2 2. dereceden polinomların vektör uzayları olmak üzere;

$L: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $L(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$ ile tanımlansın.

a) L bir lineer dönüşümdür gösteriniz.

b) $\ker L$ yi bulunuz. Ayrıca $L(P_2)$ yi belirleyiniz.

Gözüm: a) $\forall f, g \in P_2$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için:

$L((af+bg)(x)) \stackrel{?}{=} aL(f(x)) + bL(g(x))$ midir?

$$L((af+bg)(x)) = \begin{bmatrix} (af+bg)(0) \\ (af+bg)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} af(0) + bg(0) \\ af(1) + bg(1) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \end{bmatrix} = aL(f(x)) + bL(g(x))$$

olduğundan L bir lineer dönüşümdür.

b) $\ker L = \{ f \in P_2 \mid L(f(x)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$

$\forall f(x) = ax^2 + bx + c \in \ker L$ olsun $\Rightarrow$

$$L(f(x)) = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ a+b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = ax^2 - ax = ax(x-1)$$

$$\Rightarrow \ker L = \{ ax(x-1) : a \in \mathbb{R} \}$$

$$L(P_2) = \{ L(f(x)) : f \in P_2 \}$$

$f(x) = ax^2 + bx + c \in P_2$ olsun. Buradan,

$$L(f(x)) = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ a+b+c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dir } \Rightarrow$$
$$= (a+b+c) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ yazılabilir}$$

$$\Rightarrow L(P_2) = \text{sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ ve } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ lineer bağımsız } (\mathbb{R}^2 \text{ nın standart tabanı})$$

olduğundan; $L(P_2)$ nın bir tabanı $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ olup;

$$L(P_2) = \mathbb{R}^2 \text{ olacağı görülür}$$

Soru 2 : $L: P_2 \rightarrow P_1$ Lineer dönüşümü

$L(at^2+bt+c) = (a+b)t + (b-c)$ ile tanımlansın.

a) $\text{Ker} L$ nın bir tabanını bulunuz.

b) L 1-1 midir? Açıklayınız.

c) $L(P_2)$ nın bir tabanını bulunuz.

Çözüm : a) $\text{Ker} L = \{at^2+bt+c \in P_2 : L(at^2+bt+c) = 0.t+0\}$

$\forall at^2+bt+c \in P_2$ iken : $L(at^2+bt+c) = (a+b)t + (b-c) = 0.t+0$

$\Rightarrow a+b=0$ ve $b-c=0 \Rightarrow b=-a=c$

$\Rightarrow at^2+bt+c = at^2-at-0 = a(t^2-t-1)$ olur

$\Rightarrow \text{Ker} L = \{a(t^2-t-1) \in P_2 : a \in \mathbb{R}\}$ elde edilir. Burada,

$\text{Ker} L = \text{sp}\{t^2-t-1\}$ ve $t^2-t-1 \neq 0.t^2+0.t+0 \Rightarrow$

$\{t^2-t-1\}$ lineer bağımsız olduğundan $\text{Ker} L$ nın bir tabanı

$\{t^2-t-1\}$ dir.

b) $\text{Ker} L \neq \{0_{P_2}\}$ olduğundan L 1-1 değildir.

c) $L(P_2) = \{L(p(t)) : p(t) \in P_2\}$ dir

$L(p(t)) = L(at^2+bt+c) = (a+b)t + (b-c)$

olduğundan; $L(p(t)) = \text{sp}\{t, 1\}$ ve $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ iken:

$\lambda_1.t + \lambda_2.1 = 0.t+0 \Rightarrow \lambda_1=0$ ve $\lambda_2=0 \Rightarrow \{t, 1\}$ lineer bağımsız

olup, $L(p(t))$ nın bir tabanı $\{t, 1\}$ dir.

Soru 3 : $L_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümleri

$L_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{y}{2} \\ x \end{bmatrix}$ ve $L_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ile tanımlansın.

$\text{Ker}(L_1+L_2)$ yi bulunuz.

Çözüm : Önce L_1+L_2 yi belirleyelim:

$(L_1+L_2) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = L_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{y}{2} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+y+z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+z \\ \frac{y}{2} \\ x \end{bmatrix}$ dir.

$\forall \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \text{Ker}(L_1+L_2)$ iken:

$$(L_1 + L_2) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+z \\ z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ z=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=0 \text{ bulunur.}$$

Böylece, $\text{Ker}(L_1 + L_2) = \text{sp} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ dir ve $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ lineer bağımlı olduğundan; $\dim \text{Ker}(L_1 + L_2) = 0$ dir.

Soru 4: $L: P_2 \rightarrow P_3$ lineer dönüşümü $L(p(t)) = t^3 \frac{d^2 p}{dt^2} - t^2 \frac{dp}{dt} + 3p(t)$ ile tanımlansın. P_2 vektörünün $S = \{t+1, t+2, t^2\}$ ve P_3 ün $T = \{1, t, t^2, t^3\}$ sıralı tabanları verilsin. L dönüşümünün S ve T ye göre matris temsilini bulunuz.

Çözüm: $L(t+1) = t^3 \cdot 0 - t^2 \cdot 1 + 3(t+1) = -t^2 + 3t + 3$

$L(t+2) = t^3 \cdot 0 - t^2 \cdot 1 + 3(t+2) = -t^2 + 3t + 6$

$L(t^2) = t^3 \cdot 2 - t^2(2t) + 3t^2 = 3t^2$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için
 $L(t+1) = -t^2 + 3t + 3 = a \cdot 1 + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot t^3 \Rightarrow a=3, b=3, c=-1, d=0$

$\Rightarrow [L(t+1)]_T = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$L(t+2) = -t^2 + 3t + 6 = a \cdot 1 + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot t^3 \Rightarrow a=6, b=3, c=-1, d=0$

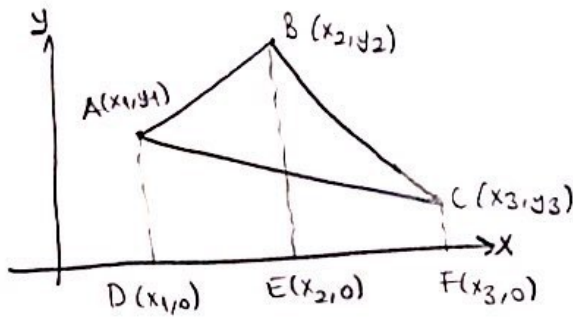
$\Rightarrow [L(t+2)]_T = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$L(t^2) = 3t^2 = a \cdot 1 + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot t^3 \Rightarrow a=0, b=0, c=3, d=0$

$\Rightarrow [L(t^2)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A_{S,T} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olarak elde edilir.

Soru 5:



Şekildeki ABC üçgeninin alanını determinant yardımı ile hesaplayınız.

Gözüm: Şekildeki üçgenin alanı şekildeki yamukların alanları kullanılarak;

$$\text{Alan}(ABC) = \text{Alan}(ABED) + \text{Alan}(BCFE) - \text{Alan}(ACFD) \text{ ile bulunabilir.}$$
$$= \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) + \frac{1}{2} (x_3 - x_2)(y_2 + y_3) - \frac{1}{2} (x_3 - x_1)(y_1 + y_3)$$

$$= \frac{1}{2} [x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_1 + x_1 y_3]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ bulunur.}$$

Fakat bu formülün ABC üçgeninin köşelerinin farklı sırada veya koordinat sisteminin diğer bölgelerinde olma durumunda negatif sonuç verme durumu göz önüne alındığında mutlak değeri kullanılması uygun olacaktır.

Böylece köşeleri $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan üçgenin alanı:

$$\text{Alan}(\hat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

determinant mutlak değer

Soru 6: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)^4 (4-x)$ eşitliğini determinant özelliklerini kullanarak ispatlayınız.

Çözüm: $\left. \begin{array}{l} 3. \text{ satır} - 1. \text{ satır} \\ 2. \text{ satır} - 1. \text{ satır} \\ 4. \text{ satır} - 1. \text{ satır} \\ 5. \text{ satır} + x \cdot 1. \text{ satır} \end{array} \right\} \text{Yapılırsa:}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -1-x & 1+x \\ 0 & 0 & -1-x & 0 & 1+x \\ 0 & -1-x & 0 & 0 & 1+x \\ 0 & 1+x & 1+x & 1+x & 1-x^2 \end{vmatrix}$ dır. 1. sütuna göre determinant açılımı yaparsak;

$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1-x & 1+x \\ 0 & -1-x & 0 & 1+x \\ -1-x & 0 & 0 & 1+x \\ 1+x & 1+x & 1+x & 1-x^2 \end{vmatrix}$ Tüm satırlardan $(x+1)$ çarpanı dışarı alınırsa;

$= (x+1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$ 3. satır + 4. satır yapalım;

$= (x+1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2-x \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$ 1. sütuna göre açalım;

$= (x+1)^4 \cdot 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$ 2. satır + 3. satır yapalım;

$= -(x+1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3-x \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$ 1. sütuna göre açalım;

$= -(x+1)^4 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = -(x+1)^4 [-1(3-x) - 1 \cdot 1]$
 $= -(x+1)^4 \cdot (-4+x)$
 $= (x+1)^4 (4-x)$ elde edilir.

Soru 7: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi için eKA yı bulunuz. eKA yardımı ile A^{-1} matrisini hesaplayınız.

Çözüm: $eKA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 15) = -15$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$eKA = \begin{bmatrix} -15 & 0 & -3 \\ 12 & 0 & -6 \\ 4 & -14 & -2 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot eKA$ ile bulunabilir. Sarrus kuralı kullanılarak $|A|$ hesaplayalım:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 - 12) - (0 + 30 + 0) = -42 \text{ bulunur} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{42} \begin{bmatrix} -15 & 0 & -3 \\ 12 & 0 & -6 \\ 4 & -14 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/14 & 0 & 1/14 \\ -4/14 & 0 & 1/7 \\ -2/21 & 1/3 & 1/21 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Soru 8: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Gözüm: $\left. \begin{array}{l} 2. \text{ satır} - a \cdot (1. \text{ satır}) \\ 3. \text{ satır} - a^2 \cdot (1. \text{ satır}) \end{array} \right\}$ yaparsak

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$, 1. sütuna göre determinant açılımı yaparsak;

$|A| = \underbrace{1 \cdot (-1)^{1+1}}_{=1} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$ Burada 1. sütundan $(b-a)$ ve 2. sütundan $(c-a)$ ortak çarpanı çıkarılabılır;

$|A| = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) [(c+a) - (b+a)]$
 $= (b-a)(c-a)(c-b)$ elde edilir.

Soru 9: $\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$ olduğunu gösteriniz.

Gözüm: $\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a-b & a \\ c & b-c & b \\ a & c-a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a-b & a \\ a & b-c & b \\ b & c-a & c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b & a & a \\ c & b & b \\ a & c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & -b & a \\ c & -c & b \\ a & -a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a \\ a & b & b \\ b & c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & -b & a \\ a & -c & b \\ b & -a & c \end{vmatrix}$

elde edilir. Son eşitlikte 1, 2, 3. Sırası determinantlar, ikişer sütunları aynı veya ters işaretli olduğundan sıfırdır. Şu halde;

$\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & -b & a \\ a & -c & b \\ b & -a & c \end{vmatrix}$ Burada 2. sütundaki -1 ortak çarpanı çıkarılabılır;

$= - \begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix}$ şimdi 2. ve 3. satırı 1. satıra eklersek;

$= - \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ b & c & a \end{vmatrix}$ 1. satırdaki $a+b+c$ ortak çarpanı çıkarılabılır;

$$= -(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix} \text{ elde edilir. Burada 1. sütun } -1 \text{ ile çarpılıp 2. ve 3. Sütuna eklenirse;}$$

$$= -(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & c-a & b-a \\ b & a-b & c-b \end{vmatrix} \text{ Burada 1. satıra göre determinant açılımı yapılırsa;}$$

$$= -(a+b+c) \cdot \underbrace{1 \cdot (-1)^{1+1}}_{=1} \begin{vmatrix} c-a & b-a \\ a-b & c-b \end{vmatrix} = -(a+b+c) [(c-a)(c-b) - (b-a)(a-b)]$$

$$= -(a+b+c) [c^2 - cb - ac + ab - ba + b^2 + a^2 - ab]$$

$$= -(a+b+c) [a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc]$$

$$= -a^3 - ab^2 - ac^2 + a^2b + a^2c + abc - a^2b - b^3 - bc^2 + ab^2 + abc + b^2c - ca^2 - cb^2 - c^3 + abc + ac^2 + bc^2$$

$$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3 \text{ bulunur.}$$

Soru 10: $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 & 1-x \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ -1 & -x & 1 & 1 \\ -x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: 4. sütun -1 ile çarpılıp 1. sütuna ve 3. sütun -1 ile çarpılıp 2. sütuna eklenirse bu determinant;

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 1-x \\ 0 & 1+x & -x & 1 \\ 0 & -x-1 & 1 & 1 \\ -x-1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

olur. Burada 1. sütuna göre determinant açılımı yaparsak, determinant;

$$= \underbrace{(-1)^{4+1} \cdot (-1)}_{=1} (x+1) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1-x \\ 1+x & -x & 1 \\ -x-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ elde edilir. 1. sütunda } x+1 \text{ çarpanı ortak, bu çarpan determinant dışına çıkarılırsa;}$$

$$= (x+1)(x+1) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1-x \\ 1 & -x & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ olur. 2. satır, 3. satıra eklenirse, determinant;}$$

$$= (x+1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1-x \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1-x & 2 \end{vmatrix} \text{ olur. Burada 1. sütuna göre determinant açılımı yaparsak;}$$

$$= (x+1)^2 \cdot \underbrace{(-1)^{2+1} \cdot 1}_{=-1} \begin{vmatrix} 2 & 1-x \\ 1-x & 2 \end{vmatrix} \text{ olur. Burada 2. satır 1. satıra eklenirse;}$$

$$= -(x+1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 3-x \\ 1-x & 2 \end{vmatrix} \text{ ortak çarpan dışarı alınır}$$

$$= -(x+1)^2 (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-x & 2 \end{vmatrix} = -(x+1)^2 (3-x) \underbrace{(2-1+x)}_{=x+1}$$

$$\Rightarrow -(x+1)^3 (3-x) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 = x_3 = -1 \\ \text{ve} \\ x_4 = 3 \end{matrix} \text{ bulunur.}$$