

Soru 6 :
$$\begin{cases} x-y+2z+w=1 \\ 2x+2y-z+2w=-2 \\ y+3z=4 \end{cases}$$
 lineer denklem sisteminin varsa çözümünü bulunuz.

• Hatırlatma : i) $\text{rank} A \neq \text{rank} [A:B]$ ise sistemin çözümü yoktur.
ii) $\text{rank} A = \text{rank} [A:B]$ ise sistemin çözümü vardır. Bu durumda

a) $n = r$ ise tek çözüm,

b) $r < n$ ise ; $n-r$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

Gözüm : $[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - 2\alpha_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\alpha_2 \rightarrow \frac{\alpha_2}{4}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5/4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - \alpha_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 17/4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\alpha_3 \rightarrow \frac{\alpha_3}{17/4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 20/17 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 - \frac{3}{4}\alpha_3, \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + \frac{5}{4}\alpha_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -15/17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 20/17 \end{bmatrix}$

Burada, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $m=3$ satır ve $n=4$ sütundan

oluştığından 4×4 boyutlu herhangi bir determinant elde edilemez.

Dolayısıyla, $r \neq 4$.

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi için, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (6+4+0) - (0-1-6) = 10+7 = 17 \neq 0$

olduğundan; $\text{rank} A = r = 3$ olur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -15/17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 20/17 \end{bmatrix}$$

matrisi $[A:B]$ ilaveli katsayılar matrisine denk ve bu matris 3 satır

ve 5 sütuna sahip olduğundan bu matrisin rankı 4 ve 5 olamaz (çünkü 5×5 ve 4×4 boyutlu herhangi bir determinant elde edilemez). Burada, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ olduğundan; $\text{rank}[A:B] = 3$.

$\text{rank} A = \text{rank}[A:B] = 3 < n = 4$ olduğundan; hatırlatma ii b'den $n - r = 4 - 3 = 1$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

$$[A:B] \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -15/17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 20/17 \end{bmatrix}$$

olduğundan;

$$\begin{cases} x + w = -15/17 \\ y = 8/17 \\ z = 20/17 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Burada, } w = t \in \mathbb{R} \text{ dersek;} \\ x = -15/17 - t \text{ olur.} \end{array} \right\}$$

$$\text{Buradan, } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15/17 - t \\ 8/17 \\ 20/17 \\ t \end{bmatrix} \quad \text{genel çözümdür.}$$

Soru 7: $x + y + z = 2$

$$2x + 3y + 2z = 5$$

$$2x + 3y + (a^2 - 1)z = a + 1$$

$\left. \begin{array}{l} \text{lineer denklem sisteminin} \\ \text{i) tek çözümünün olması için} \\ \text{ii) çözümsüz olması için} \\ \text{iii) sonsuz çözümünün} \\ \text{olması için } a \in \mathbb{R} \text{ için ne söylenebilir?} \end{array} \right\}$

$$\text{Çözüm: } [A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & a^2 - 1 & a + 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - 2\alpha_1 \\ \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - 2\alpha_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a^2 - 3 & a - 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - \alpha_2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 3 & a - 4 \end{bmatrix}$$

A ya denk matris

$[A:B]$ ye denk matris

i) tek çözümün olması için: $\text{rank } A = \text{rank } [A:B] = n$ olmalıdır.

Burada, $A, n=3$ sütuna sahip olduğundan;

$\text{rank } A = \text{rank } [A:B] = 3$ olmalıdır. $\text{rank } A = \text{rank } [A:B] = 3$ olması için:

$a^2 - 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm\sqrt{3}$ olmalıdır (aksi takdirde $a^2 - 3 = 0$ olursa

A nın 3. satırının tüm elemanları sıfır olacağından;
 $|A| = 0$ olup $\text{rank } A < 3$ olur).

ii) Çözümün olmaması için: $\text{rank } A \neq \text{rank } [A:B]$ olmalıdır.

$\text{rank } A = 2 \Rightarrow a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$
 $\text{rank } [A:B] = 3 \Rightarrow a - 4 \neq 0 \Rightarrow a \neq 4$ } Ortak çözüm:
 $a = \pm\sqrt{3}$ (4 den farklı) olmalıdır.

iii) Sonsuz çözüm olabilmesi için:

$\text{rank } A = \text{rank } [A:B] < n = 3$ olmalıdır.

$\text{rank } A = \text{rank } [A:B] = 2$ olabilmesi için:

$a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$
 $a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$ } Burada her iki çözümü aynı anda
sağlayan ortak bir çözüm
olmadığından; bu lineer denklem
sisteminin sonsuz çözümü
yoktur.