• Hatırlatma-1 (Uyarı 14.5): A $n\times n$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart A matrisinin özdeğerlerinden oluşan bir D köşegen matrisi ve özvektörlerini sütun kabul eden P regüler matrisinin bulunmasıdır.

• Hatırlatma-2 (Sonuç 14.4): Bir A $n\times n$ matrisi n farklı karakteristik değere sahipse A matrisi köşegenleştirilebilirdir.

Soru-1: $A=\begin{bmatrix}-14 & 12\\ -20 & 17\end{bmatrix}$ matrisinin köşegenleştirilebildiğini gösteriniz ve $P^{-1}AP=D$ köşegen matris olacak şekilde tersi mevcut bir P matrisi bulunuz.

Çözüm: $|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda+14 & -12\\ 20 & \lambda-17\end{vmatrix} = (\lambda+14)(\lambda-17)+240$

$$= \lambda^2-3\lambda+2$$

$|\lambda I_2 - A| = \lambda^2-3\lambda+2=0$ denkleminden A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1=2$ ve $\lambda_2=1$ dir.

$\lambda_1=2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım.

$(2I_2-A)X=\begin{bmatrix}16 & -12\\ 20 & -15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$. Katsayılar matrisinin eşelon formu:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \leftarrow \\ \alpha_2 \leftarrow \end{array}\begin{bmatrix}16 & -12\\ 20 & -15\end{bmatrix} \underset{\varepsilon_1=\alpha_1\to\alpha_1\div 16,\ \alpha_2\to\alpha_2\div 5}{\approx} \begin{bmatrix}1 & -3/4\\ 4 & -3\end{bmatrix} \underset{\varepsilon_2=\alpha_2\to\alpha_2-4\alpha_1}{\approx}$$

$\begin{bmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dır. Buradan,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ dersek, karşılık gelen denklem

sistemi: $x_1 - \frac{3}{4} x_2 = 0$ dır. Burada, $x_2 = 4s$ (s bir reel sayı)

dersek $x_1 = 3s$ olur.

$s=1$ için $\lambda_1 = 2$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör

$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ tür.

Benzer şekilde $\lambda_2 = 1$ özdeğerine karşılık gelen

özvektörü bulalım.

$(I_2 - A)X = \begin{bmatrix} 15 & -12 \\ 20 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ denklem sisteminin

çözümünden: $\left. \begin{matrix} 15x_1 - 12x_2 = 0 \\ 20x_1 - 16x_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 5x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{5} x_2$ bulunur.

$x_2 = 5r$ (r bir reel sayı) denilirse $x_1 = 4r$ olur.

$r=1$ için $\lambda_2 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektör $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ tir.

A matrisi 2-inci mertebeden bir matris ve farklı 2 tane özdeğeri bulunduğundan sonuç 14.4 den köşegenleştirilebilir. O halde, uyarı 14.5 ten A nın özvektörlerini sütun kabul eden regüler $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ vardır. $\left(P^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \right)$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D$.

• Hatırlatma (Teorem 14.17): Bir A nxn matrisinin bir D köşegen matrisine benzer olması (köşegenleştirilmesi) için gerek ve yeter şart $\mathbb{R}^n_1$ uzayının A nın karakteristik vektörlerinden oluşan bir baza sahip olmasıdır. Bu takdirde, D nin köşegeni üzerinde A nın öz değerleri bulunur.

Soru 2: $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin köşegenleştirilebilir olup-olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: $|\lambda I_4 - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$ Burada 1. sütuna göre determinant açılımı yaparsak:

$$|\lambda I_4 - A| = (\lambda+2) \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

Sarrus uygularsak;

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \lambda+2 & 0 & 0 & \\ & 0 & \lambda-3 & 0 & \\ & 0 & -1 & \lambda-3 & + \\ - & \lambda+2 & 0 & 0 & + \\ - & 0 & \lambda-3 & 0 & + \\ - & & & & \end{array}$$

$$|\lambda I_4 - A| = (\lambda+2)\left[(\lambda+2)(\lambda-3)^2\right] = (\lambda+2)^2(\lambda-3)^2 = 0$$

denkleminden A matrisinin öz değerleri:

$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ ve $\lambda_3 = \lambda_4 = 3$ tür.

$\lambda = -2$ öz değerine karşılık gelen özvektörü bulmak için:

$$(-2I_4 - A)X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -5x_3 = 0 \\ -x_3 - 5x_4 = 0 \end{array}\right\}$$ Bu sistemin çözümü: $x_3 = x_4 = 0$ ve $x_1 = r$,

$x_2 = s$ (r ve s birer reel sayı) dır.

$\lambda = -2$ iki katlı özdeğerine karşılık gelen özvektörler keyfi

$r = 1$, $s = 0$ seçilerek;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ve $r = 0, s = 1$ için $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ olarak alınabilir.

$\lambda = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım

$$(3I_4 - A)X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x_1 = 0 \\ 5x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{array}\right\}$$ Bu sistemin çözümü:

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ve $x_4 = k$ (k bir reel sayı) dır. Keyfi olarak

$k = 1$ için $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $k = 2$ için $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3$ iki katlı özdeğerine karşılık gelen özvektörlerdir.

Burada, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olup;

A matrisi 4-üncü mertebeden bir matris olup lineer bağımsız özvektör sayısı 3 olduğundan teorem 14.17 den A matrisi köşegenleştirilemez.

Soru 3: A n-inci merteбeden bir matris olsun.

A matrisinin köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter koşul A^T matrisinin de köşegenleştirilebilir olmasıdır, gösteriniz.

Çözüm: ($\Rightarrow$:) A matrisi köşegenleştirilebilir olsun.

Bu durumda; $P^{-1}AP=D$ köşegen matris olacak şekilde tersi mevcut bir P matrisi vardır.

Bu eşitlikten $(P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^T A^T (P^T)^{-1} = D^T = D$ elde edilir. Şu halde A^T matrisi de köşegenleştirilebilir.

(:$\Leftarrow$) A^T matrisi köşegenleştirilebilir olsun.

Bu durumda $P^{-1}A^TP=D$ köşegen matris olacak şekilde tersi mevcut bir P matrisi vardır.

$(P^{-1}A^TP)^T = P^T (A^T)^T (P^{-1})^T = P^T A (P^T)^{-1} = D^T = D$

eşitliğinden A matrisi de köşegenleştirilebilirdir.

Soru 4: A ve B köşegenleştirilebilir iki matris fakat A+B köşegenleştirilemez olacak şekilde bir örnek veriniz.

CamScanner ile tarandı

Çözüm : $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ diyelim.

A matrisinin özdeğerleri 2 ve −1, B matrisinin ise −1 ve 2 dir. Şu halde, A ve B 2-inci mertebeden matrisler ve 2 farklı özdeğere sahip olduklarından A ve B köşegenleştirilebilir dir.

$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

$|\lambda I_2-(A+B)|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda=1$ iki katlı bir özdeğer dir.

$\lambda=1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım.

$(I_2-(A+B))X=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x_2=0$

$\Rightarrow$ Bu denklem sisteminin çözümü $x_2=0$ ve $x_1=s$ (s bir reel sayı) dolayısıyla $\lambda=1$ özdeğerine karşılık $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(s=1)$ özvektörü alınabilir.

Şu halde, A+B matrisi 2-inci mertebeden bir matris olup lineer bağımsız özvektör sayısı 1 olduğundan teorem 14.17 den A+B köşegenleştirilemez dir.