Soru 1: $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Lineer dönüşümü:

$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+2y \end{bmatrix}$ ile tanımlansın. $\mathbb{R}^2$ nin $\emptyset = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ bazına göre A nın matrisini bularak A nın köşegenleştirilebildiğini gösteriniz.

Hatırlatma (Tanım 13.4): V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı, $A:V \to V$ bir lineer dönüşüm olsun. $A_\emptyset$, V nin uygun bir $\emptyset$ bazına göre A ya karşılık gelen bir matris olmak üzere $A_\emptyset$ bir köşegen matris ise A lineer dönüşümüne "köşegenleştirilebilir" denir.

Çözüm:

$$A\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2+2.3 \\ 3.2+2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} = 4.\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[A\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)\right]_\emptyset = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+2(-1) \\ 3.1+2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)\right]_\emptyset = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Böylece, A nın $\emptyset$ bazına göre matrisi:

$A_\emptyset = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ köşegen matrisidir. Şu halde, tanım 13.4 ten A lineer dönüşümü köşegenleştirilebilirdir.

Soru 2 : $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x,y) = (-x, 3x+2y)$ lineer dönüşümünün köşegenleştirilebilir olup olmadığını araştırınız.

Hatırlatma (Teorem 13.13) : V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde n boyutlu vektör uzayı ve $A: V \to V$ lineer dönüşüm olsun. A nın köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter şart A nın karakteristik vektörlerden oluşan V nin bir bazının bulunmasıdır. Ayrıca, D, A nın $\emptyset$ bazına göre köşegen matris ise D nin esas köşegeni üzerindeki elemanları A lineer dönüşümünün öz değerleridir

Çözüm : $A(x,y) = (-x, 3x+2y) = \lambda(x,y)$ olmak üzere;

$$\left.\begin{aligned} -x &= \lambda x \\ 3x+2y &= \lambda y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} (\lambda+1)x &= 0 \\ -3x + (\lambda-2)y &= 0 \end{aligned}$$ denklem sistemi elde edilir.

Son lineer homojen denklem sisteminin sıfır çözümden farklı çözümlerinin bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul katsayılar matrisinin determinantının 0 olmasıdır. Şu halde,

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ -3 & \lambda-2 \end{vmatrix} &= (\lambda+1)(\lambda-2) - 0 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$$

$(\lambda-2)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 2$ A lineer dönüşümünün öz değerleridir.

Şu halde, $\lambda_1=-1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler :

$-3x-3y=0 \Leftrightarrow -x-y=0$ denklemi çözülerek bulunur. Buradan,

$\lambda_1=-1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler : $x=-y=a\neq 0$

olmak üzere $(a,-a)\in\mathbb{R}^2$'lerdir. Böylece, $(a,-a)=a(1,-1)$

ve $(1,-1)\neq(0,0)$ olduğundan; V_{-1} karakteristik uzayı için

bir baz $\{(1,-1)\}$ alınabilir.

$\lambda_2=2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler:

$3x=0 \Leftrightarrow x=0$ için $y=a\neq 0$ olmak üzere;

$(0,a)\in\mathbb{R}^2$'lerdir. Böylece, $(0,a)=a(0,1)$ ve $(0,1)\neq(0,0)$

olduğundan; V_2 karakteristik uzayı için bir baz

$\{(0,1)\}$ alınabilir.

$m,n\in\mathbb{R}$ için: $m(1,-1)+n(0,1)=(0,0) \Rightarrow$

$(m,-m+n)=(0,0) \Rightarrow m=n=0$ bulunur.

O halde, $\{(1,-1),(0,1)\}$ lineer bağımsızdır.

Böylece, $\mathbb{R}^2$ nin özvektörlerinden oluşan bir bazı

olarak: $\{(1,-1),(0,1)\}$ alınabilir. Teorem 13.13 den

A lineer dönüşümü köşegenleştirilebilirdir.

Soru 3: $L: P_2 \longrightarrow P_2$
$p(t) \longmapsto L(p(t))=p'(t)$ Lineer dönüşümü tanımlansın.

a) L lineer dönüşümü köşegenleştirilebilir mi?

b) L köşegenleştirilebilir ise P_2 nin öyle bir S bazını bulunuz ki L nin bu baza göre matrisi bir köşegen matris olsun.

Çözüm:

$0 \neq p(t) = a + bt + ct^2 \in P_2$ için:

$L(a+bt+ct^2) = b + 2ct = \lambda(a+bt+ct^2) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} b = \lambda a \\ 2c = \lambda b \\ \lambda c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda a - b = 0 \\ \lambda b - 2c = 0 \\ \lambda c = 0 \end{array}\right\}$$ Lineer denklem sistemi elde edilir.

λ nın L nin bir özdeğeri olması için yukarıdaki denklem sisteminin sıfır çözümden farklı bir çözümünün olması gerekir. Bunun için gerek ve yeter koşul katsayılar matrisinin determinantının 0 olmasıdır. O halde,

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^3 + 0 + 0) - 0 \Rightarrow \lambda^3 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ bulunur.

Buradan, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ özdeğerlerine karşılık gelen öz vektörler: $0 \neq p(t) = a \in P_2$ ler dir. Burada, $b = c = 0$ ve $a \neq 0$ olmak üzere; P_2'nin bir özdeğerlere karşılık gelen öz vektörlerin kümesi P_2'nin bir bazı şekline getirilemez. Bu nedenle, L köşegenleştirilemez dir.