Soru: $X: E^2 \longrightarrow E^3$

$$(u,v) \longrightarrow X(u,v) = (u^2, u^3, v)$$

dönüşümü veriliyor. $X(E^2) = M$ kümesi E^2 de topolojik manifold mudur?

M nin topolojik manifold olması için X in bir homeomorfizma olması yeterlidir.

* M, E^3 de indirgenmiş topoloji yardımıyla $M \subset E^3$ bir topolojik uzaydır.

* M bir Haussdorff uzayıdır.

* M sayılabilir çoklukta açık küme ile örtülebilir.

X bir homeomorfizmadır:

$\Rightarrow X$ süreklidir:

$$X(u,v) = (u^2, u^3, v) = (f_1, f_2, f_3)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(u,v) &= u^2 \\ f_2(u,v) &= u^3 \\ f_3(u,v) &= v \end{aligned}\right\} \text{ fonksiyonları sürekli olduğundan } X \text{ süreklidir.}$$

$\Rightarrow X'$ 1-1 dir :

$X'(u_1, v_1) = X'(u_2, v_2) \Rightarrow (u_1^2, u_1^3, v_1) = (u_2^2, u_2^3, v_2)$

$\Rightarrow u_1 = u_2$ ($u_1^2 = u_2^2$ ve $u_1^3 = u_2^3$ olduğundan)

ve

$v_1 = v_2$

$\Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ old. X' 1-1 dir.

$\Rightarrow X'^{-1}$ var ve süreklidir :

$\forall (x,y,z) \in M$ için $X'(u,v) = (x,y,z)$ o.ş $(u,v) \in E^2$ var mıdır?

$(x,y,z) = (u^2, u^3, v)$

$\Rightarrow u = \sqrt[3]{y}$

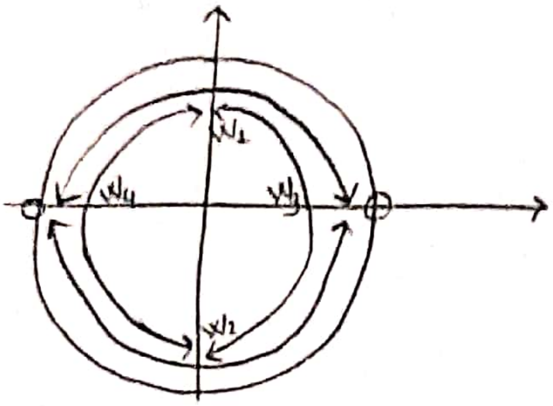
$v = z$

$X'^{-1}(x,y,z) = (\sqrt[3]{y}, z)$

$g_1(x,y,z) = \sqrt[3]{y}$, $g_2(x,y,z) = z$ fonk. sürekli olduğundan X'^{-1} süreklidir.

$\Rightarrow$ O halde X' bir homeomorfizmadır. M, E^2ye homeomorf old. 2-boyutlu topolojik manifoldtur.

Soru : S^1 çemberi için bir atlas bulunuz.



S_1 üzerinde tanımlı

$$\{(\varphi_i, W_i) \mid i \in I = \{1,2,3,4\}\}$$

atlasını bulacağız.

$$W_1 = \{(x,y) \in S^1 \mid y > 0\}$$

$$W_2 = \{(x,y) \in S^1 \mid y < 0\}$$

$$W_3 = \{(x,y) \in S^1 \mid x > 0\}$$

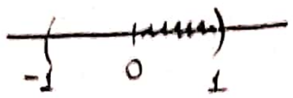
$$W_4 = \{(x,y) \in S^1 \mid x < 0\}$$

olmak üzere W_i, $i \in I$ kümeleri birer açık olup $W_1 \cup W_2 \cup W_3 W_4 = \bigcup_{i=1}^{4} W_i = S^1$

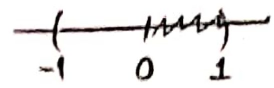
yazılabileceğinden S^1 çemberinin sayılabilir açık örtüsü $\{W_i\}_{i \in I}$ şeklindedir.

Not: $U \subset E$ açık küme olmak üzere $\psi : U \longrightarrow \psi(U) = W \subset S^1$ o.ş.

ψ homeomorfizması vardır. (ψ, W) haritadır.



$U_1 \in E$



$U_2 \in E$

$U_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ ve $U_2 = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 < y < 1\}$ kümeleri E^1 Öklid

uzayında birer açık kümedir.

$\psi_i : U_i \longrightarrow W_i$

$\psi_1 : U_1 \subset E^1 \longrightarrow W_1 \subset S^1$

$x_1 \longrightarrow \psi_1(x_1) = (x_1, \sqrt{1 - x_1^2})$

dönüşümü 1-1, örten ve süreklidir.

$\forall (x, y) \in W_1$ için $\psi_1(x_1) = (x, y)$ o.ş. $\exists x_1 \in U_1$ vardır.

$\Rightarrow (x_1, \sqrt{1 - x_1^2}) = (x, y)$ $\qquad \psi_1^{-1}(x, y) = x_1 = x$

$\Rightarrow x = x_1 \quad y = \sqrt{1 - x_1^2}$

olduğundan tersi de süreklidir.

$\Rightarrow \psi_1$ bir homeomorfizmadır. Yani (ψ_1, W_1) S^1 için bir haritadır.

Benzer şekilde,

$$\psi_2 : U_1 \subset E^1 \longrightarrow W_2 \subset S^1$$

$$x_1 \longrightarrow \psi_2(x_1) = (x_1, -\sqrt{1-x_1^2}) \qquad \psi_2^{-1}(x,y) = x_1$$

$$\psi_3 : U_2 \subset E^1 \longrightarrow W_3 \subset S^1$$

$$x_2 \longrightarrow \psi_3(x_2) = (\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \qquad \psi_3^{-1}(x,y) = x_2$$

$$\psi_4 : U_2 \subset E^1 \longrightarrow W_4 \subset S^1$$

$$x_2 \longrightarrow \psi_4(x_2) = (-\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \qquad \psi_4^{-1}(x,y) = x_2$$

formları da birer homeomorfizmadır. Buradan (ψ_2, W_2) (ψ_3, W_3) ve (ψ_4, W_4) S^1 için haritadır. Böylece $\{(\psi_i, W_i)\}_{i \in I}$, S^1 için atlastır.