SORU: $M \ldots\ \phi(u,v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ 5v)$ yüzeyinin $P=\phi(0,1)$ noktasındaki Dupin göstergesini bulunuz.

Çözüm: Yüzey parametrik formda verildiğinden

$$\phi_u=(\cos v,\ \sin v,\ 0)$$
$$\phi_v=(-u\sin v,\ u\cos v,\ 5)$$

bulunur. $\langle \phi_u, \phi_v\rangle = 0$ olduğundan şekil operatörü matrisi

$$S=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\|\phi_u\|^3\,\|\phi_v\|}\det(\phi_{uu},\phi_u,\phi_v) & -\dfrac{1}{\|\phi_u\|^2\,\|\phi_v\|^2}\det(\phi_{uv},\phi_u,\phi_v) \\ -\dfrac{1}{\|\phi_u\|^2\,\|\phi_v\|^2}\det(\phi_{uv},\phi_u,\phi_v) & -\dfrac{1}{\|\phi_u\|.\,\|\phi_v\|^3}\det(\phi_{vv},\phi_u,\phi_v) \end{bmatrix}$$

ile bulunur.

- $\|\phi_u\|=1$
- $\|\phi_v\|=\sqrt{u^2+25}$
- $\phi_{uu}=(0,0,0)$
- $\phi_{uv}=(-\sin v,\ \cos v,\ 0)$
- $\phi_{vv}=(-u\cos v,\ -u\sin v,\ 0)$

olmak üzere $\det(\phi_{uu},\phi_u,\phi_v)=0$, $\det(\phi_{uv},\phi_u,\phi_v)=-5$ $\det(\phi_{vv},\phi_u,\phi_v)=0$

bulunur.

Böylece

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{u^2+25} \\ \frac{5}{u^2+25} & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

S matrisi için asli eğrilikler

$\det(\lambda I_2 - S) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{25+u^2}$ $\lambda_2 = \frac{-5}{25+u^2}$ ol. üzere

$k_1 = \frac{5}{25+u^2}$ ve $k_2 = \frac{-5}{25+u^2}$ dir.

$P = \phi(0,1)$ noktasındaki $K(P) = k_1(P)\, k_2(P) = -\frac{1}{25} < 0$ olduğundan P noktası hiperboliktir.

$P = \phi(0,1)$ noktasında $K(P) < 0$ ve k_1, k_2 zıt işaretlidir.

P noktasındaki Dupin göstergesi için farklı asli eğriliklere karşılık gelen asli vektörler ortogonal olup $T_M(P)$ nin bazını oluşturduğundan $\{X_p, Y_p\}$ ortonormal baz olsun.

$S(X_p) = k_1 X_p$, $S(Y_p) = k_2 Y_p$, $\forall W_p \in T_M(P)$ için

$W_p = a X_p + b Y_p$ alınırsa

$\langle S(W_p), W_p \rangle = \mp 1$ (P noktasındaki Dupin göstergesi)

$\langle S(aX_p + bY_p), aX_p + bY_p \rangle = \mp 1$

$\Rightarrow \langle aS(X_p) + bS(Y_p), aX_p + bY_p \rangle = \mp 1$

$\Rightarrow a^2 k_1 + b^2 k_2 = \mp 1$

$k_1 = \frac{1}{5}$, $k_2 = -\frac{1}{5}$ asli eğrilikleri ile $\frac{a^2}{5} - \frac{b^2}{5} = \mp 1$

yani

$a^2 - b^2 = 5 \rightsquigarrow$ hiperbol
$b^2 - a^2 = 5 \rightsquigarrow$ hiperbol

e.ble edilir. O halde M yüzeyinin $P = \phi(0,1)$ noktasının komşuluğunda $T_M(P)$ ye paralel düzlem ile arakesiti hiperboldür.

Soru : E^3 Öklid uzayında $M: x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ elipsoidinin bütün noktalarının eliptik nokta olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $g(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-1$ alınırsa

$Z=\nabla g=\left(2x, \frac{y}{2}, \frac{2z}{9}\right)$ Z normal vektör alanı teğet uzayın bazları cinsinden

$Z=\sum z_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ şeklinde yazılır.

$D_V^Z=\sum_{i=1}^{3} V[z_i]\frac{\partial}{\partial x_i}$ (V: teğet vektör alanı)

• $V=\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}=(v_1, v_2, v_3)$

$$D_V^Z=\sum_{i=1}^{3} V[z_i]\frac{\partial}{\partial x_i}=V[2x]\frac{\partial}{\partial x}+V[y/2]\frac{\partial}{\partial y}+V[2z/9]\frac{\partial}{\partial z}$$

$$=2v_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v_2}{2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{2v_3}{9}\frac{\partial}{\partial z}$$

bulunur. Benzer şekilde başka bir teğet vektör alanı W ise

$W=\sum_{i=1}^{3} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}=(w_1, w_2, w_3)$

$$D_W^Z=2w_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{w_2}{2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{2w_3}{9}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\langle Z, D_V^Z \times D_W^Z \rangle = \begin{vmatrix} 2x & y/2 & 2z/9 \\ 2v_1 & v_2/2 & 2v_3/9 \\ 2w_1 & w_2/2 & 2w_3/9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} \begin{vmatrix} x & y & z \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{9} \langle X, V \times W \rangle$$

$V \times W = Z$ olarak alıyoruz. $X = (x,y,z) = \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\Rightarrow \langle X, V \times W \rangle = \langle X, Z \rangle = 2 \cdot \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \right) = 2$$

$$\langle Z, D_V^Z \times D_W^Z \rangle = \frac{2}{9} \langle X, V \times W \rangle = \frac{2}{9} \cdot 2 = \frac{4}{9}$$

$$\| Z \|^4 = 16 \left(x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} \right)$$

$$K = \frac{\langle Z, D_V^Z \times D_W^Z \rangle}{\| Z \|^4} = \frac{4/9}{16 \left(x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} \right)} = \frac{1}{36 \left(x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} \right)} > 0$$

old. dan noktalar eliptiktir.

Soru: $\phi(u,v)=(u,v,uv)$ yüzeyinin noktalarının karakterini belirleyiniz.

Çözüm: $\phi_u=(1,0,v)$

$\phi_v=(0,1,u)$

$$\phi_u\times\phi_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix}=(-v,-u,1) \quad , \quad \|\phi_u\times\phi_v\|=\sqrt{u^2+v^2+1}$$

$$N=\frac{\phi_u\times\phi_v}{\|\phi_u\times\phi_v\|}=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}(-v,-u,1)$$

$$\Rightarrow S(\phi_u)=\frac{\partial N}{\partial u}=-\frac{u}{(u^2+v^2+1)^{3/2}}(-v,-u,1)+\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}(0,-1,0)$$

$$=\frac{1}{(u^2+v^2+1)^{3/2}}(uv,u^2,-u)+\frac{1}{(u^2+v^2+1)^{3/2}}(0,-u^2-v^2-1,0)$$

$$=\frac{1}{(u^2+v^2+1)^{3/2}}(uv,-v^2-1,-u)$$

$$=\frac{uv}{(u^2+v^2+1)^{3/2}}\phi_u-\frac{v^2+1}{(u^2+v^2+1)^{3/2}}\phi_v$$

$$S(\phi_v) = \frac{\partial N}{\partial v} = -\frac{v}{(u^2+v^2+1)^{3/2}}(-v,-u,1) + \frac{1}{(u^2+v^2+1)^{1/2}}(-1,0,0)$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2+1)^{3/2}}(-u^2-1, uv, -v)$$

$$= -\frac{u^2+1}{(u^2+v^2+1)^{3/2}}\phi_u + \frac{uv}{(u^2+v^2+1)^{3/2}}\phi_v$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{uv}{(u^2+v^2+1)^{3/2}} & -\frac{u^2+1}{(u^2+v^2+1)^{3/2}} \\ -\frac{v^2+1}{(u^2+v^2+1)^{3/2}} & \frac{uv}{(u^2+v^2+1)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

$$\det S = \frac{u^2v^2}{(u^2+v^2+1)^3} - \frac{(u^2+1)(v^2+1)}{(u^2+v^2+1)^3}$$

$$= -\frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}$$

olup $\forall P \in M$ için

$$\det S_P = K(P) < 0$$

olup yüzeyin bütün noktaları hiperbolik noktadır.