

• Hatırlatma (Teorem 14.16 - Cayley Hamilton Teoremi) :

Her matris kendi karakteristik polinomunun bir köküdür.

Soru-1: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi için A^6 matrisini

Cayley-Hamilton Teoremi yardımıyla bulunuz.

Çözüm: $|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) - 3$
 $= \lambda^2 - \lambda - 5$

olduğundan A matrisinin karakteristik polinomu:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 5 \text{ tir.}$$

Cayley-Hamilton Teoreminden, A matrisi, $P_A(\lambda)$ nin bir köküdür. O halde, burada λ yerine A matrisi yazılırsa:

$$P_A(A) = A^2 - A - 5I_2 = 0 \text{ dir} \Rightarrow A^2 = A + 5I_2 \text{ elde edilir.}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A = (A + 5I_2) \cdot A = A^2 + 5A \\ &= A + 5I_2 + 5A \\ &= 6A + 5I_2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^6 &= A^3 \cdot A^3 = (6A + 5I_2)(6A + 5I_2) \\ &= 36A^2 + 60A + 25I_2 \\ &= 36(A + 5I_2) + 60A + 25I_2 = 96A + 60A + 205I_2 \\ &= \begin{bmatrix} 397 & 288 \\ 96 & 109 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Soru-2 : Soru 1 deki $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini Cayley-Hamilton Teoremi yardımıyla bulunuz.

Çözüm : $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$ olduğundan A^{-1} vardır.

Soru-1 in çözümünden : $A^2 - A - 5I_2 = 0$ olduğunu biliyoruz.

Bu eşitliğin her iki tarafını soldan A^{-1} ile çarpalım:

$$A^{-1}(A^2 - A - 5I_2) = A^{-1} \cdot 0 \Rightarrow A - I_2 - 5A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow 5A^{-1} = A - I_2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}(A - I_2) \text{ dir.}$$

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ olduğundan;}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$