Soru 1: $\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=0\\ 2x+y+3z&=0\\ 3x+2y+z&=0 \end{aligned}\right\}$ Lineer homojen denklem sistemini çözünüz.

Çözüm:

$$[A:0]=\begin{array}{c} \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_3\to\alpha_3-3\alpha_1]{\alpha_2\to\alpha_2-2\alpha_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_3\to-\frac{1}{4}\alpha_3]{\alpha_2\to-\frac{1}{3}\alpha_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_3\to\alpha_3-\alpha_2]{\alpha_1\to\alpha_1-2\alpha_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_2\to\alpha_2-\alpha_3]{\alpha_1\to\alpha_1-\alpha_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir. Buradan, sistemin tek çözümü sıfır çözüm yani $x=y=z=0$ dır.

Soru 2: $\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-2x_4&=0\\ 3x_1-7x_2-2x_3+4x_4&=0\\ 4x_1+3x_2+5x_3+2x_4&=0 \end{aligned}\right\}$ sisteminin aşikar çözüm (sıfır çözümü) den başka çözümü olup-olmadığını araştırınız.

• **Hatırlatma:** (Teorem 11.1): A, $m\times n$ matris ve $m<n$ olsun. Bu takdirde $AX=0$ homojen sisteminin aşikar olmayan bir çözümü vardır.

Çözüm: $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2\\ 3 & -7 & -2 & 4\\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, A matris $m=3$ satır ve $n=4$ sütuna sahip bir matris ve $m=3<n=4$ olduğundan bu homojen sistemin aşikar olmayan bir çözümü vardır.

$$[A:0]=\begin{array}{c} \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & 0\\ 3 & -7 & -2 & 4 & 0\\ 4 & 3 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_3\to\alpha_3-4\alpha_1]{\alpha_2\to\alpha_2-3\alpha_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & 0\\ 0 & -1 & -11 & 10 & 0\\ 0 & 11 & -7 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\alpha_2\to(-1)\alpha_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 11 & -10 & 0\\ 0 & 11 & -7 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_3\to\alpha_3-11\alpha_2]{\alpha_1\to\alpha_1+2\alpha_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 25 & -22 & 0\\ 0 & 1 & 11 & -10 & 0\\ 0 & 0 & -128 & 120 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\alpha_3\to-\frac{1}{128}\alpha_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 25 & -22 & 0\\ 0 & 1 & 11 & -10 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{16} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_2\to\alpha_2-11\alpha_3]{\alpha_1\to\alpha_1-25\alpha_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 23/16 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 5/16 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -15/16 & 0 \end{array}\right].$$

Burada; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq0$ olduğundan;

$\mathrm{rank}A=\underbrace{\mathrm{rank}[A:0]}_{=\mathrm{rank}[A:B]}=r=3<n=4$ tür.

O halde, sistemin: $n-r=4-3=1$ parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

Burada, $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 23/16 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -15/16 & 0 \end{array}\right]$ olduğundan;

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{23}{16}x_4 &= 0 \\ x_2 + \frac{5}{16}x_4 &= 0 \\ x_3 - \frac{15}{16}x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ elde edilir.

$x_4 = t \in \mathbb{R}$ dersek; $x_1 = -\frac{23}{16}t$, $x_2 = -\frac{5}{16}t$ ve $x_3 = \frac{15}{16}t$ dir.

Böylece, genel çözüm: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23/16\,t \\ -5/16\,t \\ 15/16\,t \\ t \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ bulunur.

Soru 3: $$\left.\begin{aligned} x-y-z&=0 \\ x-y-az&=0 \\ x-ay-z&=0 \\ ax-y-z&=0 \end{aligned}\right\}$$ Lineer homojen denklem sisteminin çözümlerini a'nın değerlerine göre irdeleyiniz.

Çözüm: $$[A \vdots 0] = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -a & 0 \\ 1 & -a & -1 & 0 \\ a & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_4 \to \alpha_4 - a\alpha_1]{\substack{\alpha_2 \to \alpha_2 - \alpha_1 \\ \alpha_3 \to \alpha_3 - \alpha_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \end{array}\right]$$

Son matristen;

i) $a=1$ ise $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ matrisi elde edilir. Burada, denklem ($x-y-z=0$) sayısı $=1$, bilinmeyen (x,y,z) sayısı $=3$ olduğundan; $3-1=2$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

ii) $a \neq 1$ ise ikinci, üçüncü ve dördüncü satırları $a-1$'e bölerek; $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$ bulunur. Bu matrisinde $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ matrisine denk olacağı kolayca elde edilebilir.

Şu halde, $a \neq 1$ durumunda bilinmeyen sayısı = denklem sayısı = 3 olduğundan tek çözüm sıfır çözümdür.

Soru-4 : $\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+y-z=8 \\ x-y+z=-2 \end{array}\right\}$ Lineer denklem sistemini katsayılar matrisinin tersi yardımıyla çözünüz.

Çözüm : • **Hatırlatma :** $AX=B$ lineer denklem sistemi verilsin. A regüler ise A^{-1} vardır. $A^{-1}(AX)=A^{-1}B$ olmak üzere; $X=A^{-1}B$ çözümü bulunur.

Katsayılar matrisi : $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ dir. Burada, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(1-1-1)-(1+1+1)$
$= -1-3$
$= -4 \neq 0$

olduğundan A regülerdir, böylece, A^{-1} vardır.

$$ekA=[A_{ij}]^t=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.ekA=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$ bulunur.

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$ olur.

O halde, $x=3, y=4$ ve $z=-1$ bulunur.

Soru-5 : $x+y+z=3$
$2x+5y-2z=2$
$x+7y-7z=4$

Lineer denklem sistemini çözünüz.

Çözüm:

$$[A:B]=\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \\ 1 & 7 & -7 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_3 \to \alpha_3-\alpha_1]{\alpha_2 \to \alpha_2-2\alpha_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\alpha_2 \to \alpha_2 \div 3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 6 & -8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_3 \to \alpha_3-6\alpha_2]{\alpha_1 \to \alpha_1-\alpha_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/3 & 13/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

Satırca indirgenmiş eşelon formdaki son matriste $0x_1+0x_2+0x_3=9$ eşitliğinin sağlanması mümkün olmadığından verilen sistemin çözümü yoktur.

Soru 6:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3&=1 \\ 2x_1-x_2+x_3&=-1 \\ x_1+3x_2+(a-1)x_3&=b+2 \end{aligned}\right\}$$

Lineer denklem sisteminin çözümünü a ve b değerlerine göre irdeleyiniz.

Çözüm:

$$[A:B]=\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a-1 & b+2 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_3 \to \alpha_3-\alpha_1]{\alpha_2 \to \alpha_2-2\alpha_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & a-3 & b+1 \end{array}\right] \xrightarrow{\alpha_2 \to -\frac{1}{3}\alpha_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 & b+1 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha_3 \to \alpha_3-2\alpha_2]{\alpha_1 \to \alpha_1-\alpha_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & b-1 \end{array}\right]$$

A ya denk matris

[A:B] ye denk matris

i) $a=5$ ve $b=1$ ise: $r=\text{rank}A=\text{rank}[A:B]=2<n=3$ (A matrisi $m=3$ satır, $n=3$ sütuna sahip bir matristir) olduğundan; $n-r=3-2=1$ parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

ii) $a=5$ ve $b\neq 1$ ise: $\text{rank}A=2\neq\text{rank}[A:B]=3$ olacağından sistemin çözümü yoktur.

iii) $a\neq 5$ ise $r=\text{rank}A=\text{rank}[A:B]=3=n$ olacağından sistemin tek çözümü vardır.

Soru 7: Aşağıdaki lineer denklem sistemlerinin Cramer denklem sistemi olup-olmadığını irdeleyiniz, Cramer denklem sistemi ise Cramer method ile çözünüz.

• **Hatırlatma:** A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $AX=B$ lineer denklem sistemi verilsin.

(i) Eğer $m=n$ ve $\det A \neq 0$ ise $AX=B$ lineer denklem sistemi Cramer denklem sistemidir ve Cramer yöntemi ile çözülür.

(ii) Eğer $m=n$ ve $\det A = 0$ ve ya $m \neq n$ ise $AX=B$ lineer denklem sistemi Cramer olmayan denklem sistemidir.

a) $x+3z=2$
$2x-4y+z=0$
$-3x+7y-2z=1$

b) $x-2y+7z=5$
$3x+5y+z=-1$
$4x+3y+8z=10$

Çözüm: a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 1+3.2=7 \neq 0$

ve A matrisi $m=3$ satır, $n=3$ sütuna sahip bir matris olduğundan; $m=n=3$ tür. Böylece, bu lineer denklem sistemi Cramer denklem sistemidir.

$\Delta = |A| = 7$,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2(8-7)+3(0-(-4))$
$= 2.1+3.4 = 14$

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2(-4-3)-1(1-(-6))$
$= -2(-7)-1.7 = 7$

$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 1.(-4-0)+2(14-12)$
$= 1.(-4)+2.2 = 0$

$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{7} = 0$ bulunur.

b) $|A| = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \alpha_2 \to \alpha_2 - 3\alpha_1 \\ \alpha_3 \to \alpha_3 - 4\alpha_1 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 11 & -20 \\ 0 & 11 & -20 \end{vmatrix}$ aynı $= 0$

$m=n=3$ ve $\det A = 0$ olduğundan bu lineer denklem sistemi Cramer olmayan denklem sistemidir.

CamScanner ile tarandı