SORU: 2-boyutlu Öklid uzayı E^2 verilsin. $X=(x_1, x_2)$, $Y=(y_1, y_2) \in \mathcal{X}(E^2)$

olmak üzere

$$\langle X, Y\rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

şeklinde

$$\langle , \rangle : \mathcal{X}(E^2) \times \mathcal{X}(E^2) \longrightarrow C^\infty(E^2, \mathbb{R})$$

fonksiyonu veriliyor. $\langle , \rangle$ nın E^2 üzerinde Riemann metriği olduğunu gösteriniz.

Hatırlatma: M bir dif.bilir manifold, M üzerinde vektör alanları uzayı $\mathcal{X}(M)$ olsun. Eğer $\mathcal{X}(M)$ üzerinde

$$\langle , \rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$
$$(X, Y) \longrightarrow \langle X, Y\rangle$$

şeklinde bir iç-çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu, $\langle , \rangle$ iç çarpımına da Riemann metriği adı verilir.

Çözüm:

- Simetri

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(E^2)$, $X=(x_1, x_2)$ $Y=(y_1, y_2)$ ol. üzere

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle &= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 \\ &= y_1 x_1 + y_2 x_1 + y_1 x_2 + 2y_2 x_2 \\ &= \langle Y, X\rangle\end{aligned}$$

olup simetri özelliği sağlanır.

• Bilineerlik :

$\forall X=(x_1,x_2)$ $Y=(y_1,y_2)$, $Z=(z_1,z_2) \in \mathcal{X}(E^2)$ ve $a,b\in\mathbb{R}$ için

$$\langle (aX+bY),Z\rangle = (ax_1+by_1)z_1 + (ax_1+by_1)z_2 + (ax_2+by_2)z_1 + 2(ax_1+by_2)z_2$$

$$= ax_1z_1 + by_1z_1 + ax_1z_2 + by_1z_2 + ax_2z_1 + by_2z_1 + 2ax_1z_2 + 2by_2z_2$$

$$= a(x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + 2x_1z_2) + b(y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + 2y_2z_2)$$

$$= a\langle X,Z\rangle + b\langle Y,Z\rangle$$

$$\langle X,(aY+bZ)\rangle = x_1(ay_1+bz_1) + x_2(ay_2+bz_2) + x_2(ay_1+bz_1) + 2x_2(ay_2+bz_2)$$

$$= ax_1y_1 + bx_1z_1 + ax_2y_2 + bx_2z_2 + ax_2y_1 + bx_2z_1 + 2ax_2y_2 + 2bx_2z_2$$

$$= a(x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2) + b(x_1z_1 + x_2z_2 + x_2z_1 + 2x_2z_2)$$

$$= a\langle X,Y\rangle + b\langle X,Z\rangle$$

Böylece bilineerlik aksiyomu sağlanır.

• Pozitif tanımlılık :

$\forall X \in \chi(E^2)$ için $\langle X, X \rangle \geq 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\langle X, X \rangle = x_1 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_1 + 2x_2 x_2$$

$$= x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$$

$$\Rightarrow \langle X, X \rangle \geq 0$$

dir. Ayrıca

$$\langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \wedge x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

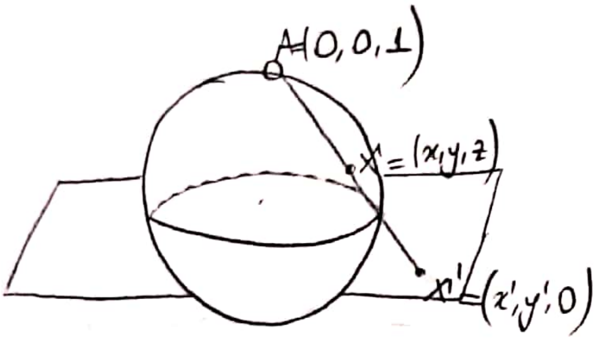
$$\Leftrightarrow X = 0$$

elde edilir.

Böylelikle $\langle , \rangle$ fonksiyonu E^2 üzerinde bir Riemann metriğidir.

SORU: Kürenin iki haritadan oluşan bir atlasını bularak dif bilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $S^2 = \{(x,y,z) \in E^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$



Stereographic izdüşüm

$U_1 = S^2 - \{A\}$ kümesi, S^2 de açık kümedir.

$$\vec{XX'} = \lambda \vec{AX'} = (x'-x, y'-y, -z) = \lambda(x', y', -1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-x = \lambda x' & \Rightarrow x'(1-\lambda) = x \\ y'-y = \lambda y' & \Rightarrow y'(1-\lambda) = y \\ -z = -\lambda & \Rightarrow z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{1-\lambda}, \quad y' = \frac{y}{1-\lambda}, \quad z = \lambda$$

$$\Psi_1 : U_1 \subset S^2 \longrightarrow E^2$$

$$(x,y,z) \longrightarrow \Psi_1(x,y,z) = \underbrace{\left(\frac{x}{1-\lambda}, \frac{y}{1-\lambda}\right)}_{(x',\ y')}$$

dönüşümü süreklidir ve 1-1 dir.

Örtenlik !

$\forall P=(x_1,y_1)\in E^2$ için $\Psi_1(X')=P$ olacak şekilde $\exists X'\in U$ bulmalıyız.

$$\Psi_1(X')=P \Rightarrow \left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)=(x_1,y_1) \Rightarrow x_1=\frac{x}{1-z}\ ,\ y_1=\frac{y}{1-z} \quad \text{---} \circledast$$

olup

$$x_1^2+y_1^2=\frac{x^2}{(1-z)^2}+\frac{y^2}{(1-z)^2}=\frac{1}{(1-z)^2}\underbrace{(x^2+y^2)}_{x^2+y^2+z^2=1}=\frac{1-z^2}{(1-z)^2}=\frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow x_1^2+y_1^2=\frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow z=\frac{x_1^2+y_1^2-1}{x_1^2+y_1^2+1}$$

$\circledast$ eşitliğinden $x_1=\dfrac{x}{1-z}$ ve $y_1=\dfrac{y}{1-z}$ $\Rightarrow x=(1-z)x_1\ ,\ y=(1-z)y_1$

$$x=\frac{2}{x_1^2+y_1^2+1}x_1\ ,\ y=\frac{2}{x_1^2+y_1^2+1}y_1$$

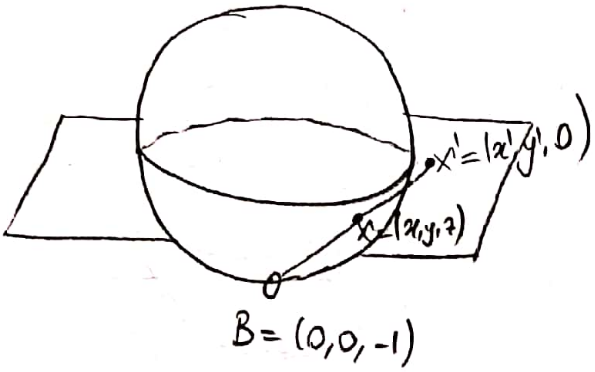
bulunur.

$$\Psi_1^{-1}(x_1,y_1)=\left(\frac{2}{x_1^2+y_1^2+1}x_1,\ \frac{2}{x_1^2+y_1^2+1}y_1,\ \frac{x_1^2+y_1^2-1}{x_1^2+y_1^2+1}\right)$$

dir.

Bu durumda, Ψ_1^{-1} dönüşümü sürekli olduğundan Ψ_1 bir homeomorfizmadır.

$\Rightarrow (\Psi_1, U_1)$ ikilisi haritadır.



$U_2 = S^2 - \{B\}$ kümesi S^2 de açık alt kümedir.

$\overrightarrow{XX'} = \lambda \overrightarrow{BX'} \Rightarrow (x'-x, y'-y, -z) = \lambda(x', y', 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-x = \lambda x' \\ y'-y = \lambda y' \\ -z = \lambda \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow x'(1-\lambda) = x \\ \Rightarrow y'(1-\lambda) = y \\ \Rightarrow \lambda = -z \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x' = \frac{x}{1-\lambda} \\ y' = \frac{y}{1-\lambda} \\ \lambda = -z \end{array} \quad \begin{array}{l} x' = \frac{x}{1+z} \\ y' = \frac{y}{1+z} \end{array}$$

$$\Psi_2 : U_2 \subset S^2 \longrightarrow E^2$$
$$(x,y,z) \longrightarrow \Psi_2(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$$

dönüşümü sürekli ve 1-1 dir.

$\forall Q = (x_1, y_1) \in E^2$ için $\Psi_2(X') = Q$ o.ş $\exists X' \in U_2$ vardır.

$$\Psi_2(x) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right) = (x_1, y_1)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{x}{1+z} \quad , \quad y_1 = \frac{y}{1+z} \quad --- \; (*)(*)$$

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{x^2}{(1+z)^2} + \frac{y^2}{(1+z)^2} = \frac{1}{(1+z)^2}(x^2+y^2) = \frac{1}{(1+z)^2}(1-z^2) = \frac{1-z}{1+z}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = \frac{1-z}{1+z}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1-x_1^2-y_1^2}{1+x_1^2+y_1^2}$$

(*)(*) eşitliğinden $x = (1+z)x_1 = \dfrac{2}{1+x_1^2+y_1^2} x_1$

$$y = (1+z)y_1 = \frac{2}{1+x_1^2+y_1^2} y_1$$

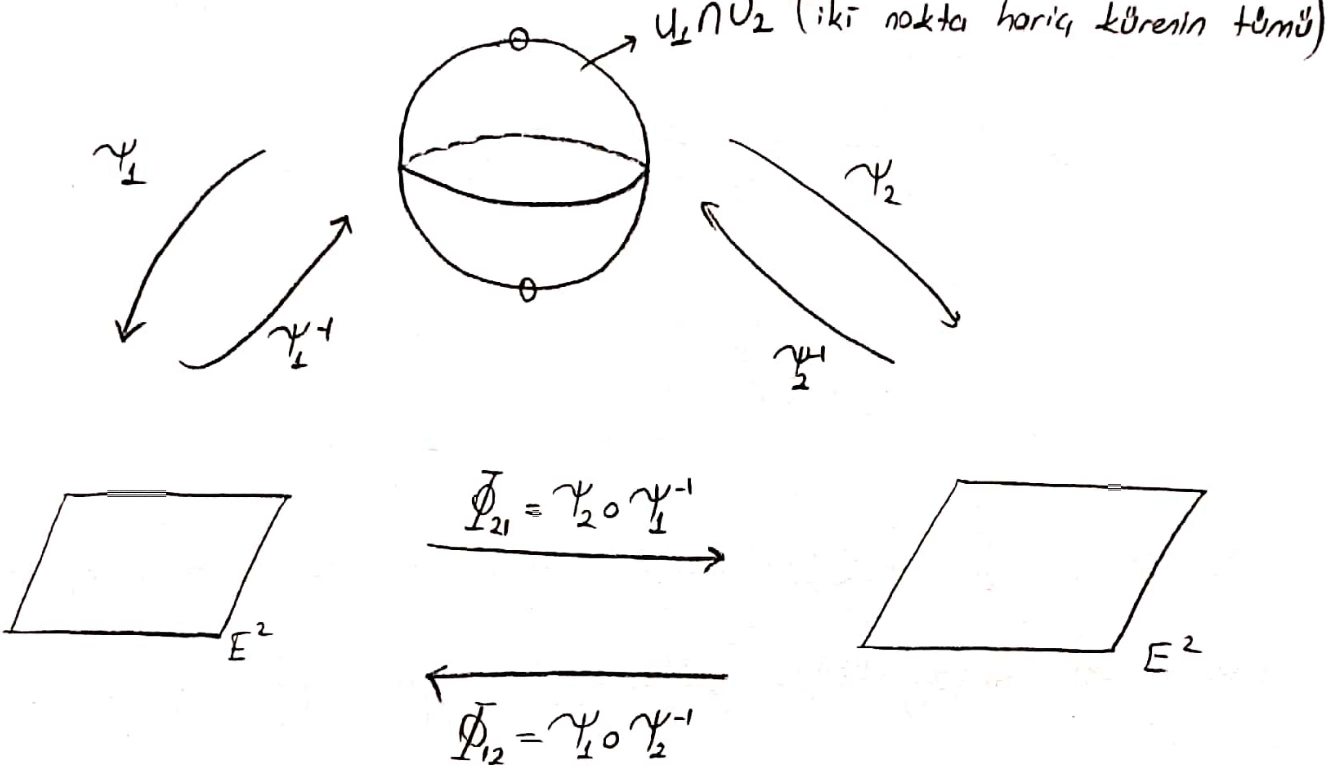
Ψ_2 örten olup $\Psi_2^{-1}(x_1, y_1) = (x, y, z) = \left(\dfrac{2}{x_1^2+y_1^2+1} x_1 \, , \, \dfrac{2}{x_1^2+y_1^2+1} y_1 \, , \, \dfrac{1-x_1^2-y_1^2}{1+x_1^2+y_1^2}\right)$ dir.

Bu durumda Ψ_2^{-1} dönüşümü sürekli old. dan Ψ_2 bir homeomorfizmadır.

$\Rightarrow (\Psi_2, U_2)$ ikilisi haritadır.

$\Rightarrow \{(\Psi_i, U_i)\}_{i \in I = \{1,2\}}$ ailesi, S^2 için atlastır.

Bulduğumuz bu atlasın dif bilir bir yapı old. gösterirsek S_0^2 için dif bilir manifold olduğunu göstermiş oluruz.



- $\Phi_{21} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \psi_2(U_1 \cap U_2)$

$\forall (u,v) \in \psi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ için

$$\begin{aligned}\Phi_{21}(u,v) &= (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})(u,v) \\ &= \psi_2(\psi_1^{-1}(u,v)) \\ &= \psi_2\left(\frac{2}{x_1^2+y_1^2+1}u, \frac{2}{x_1^2+y_1^2+1}v, \frac{x_1^2+y_1^2-1}{x_1^2+y_1^2+1}\right) \\ &= \left(\frac{u}{x_1^2+y_1^2}, \frac{v}{x_1^2+y_1^2}\right)\end{aligned}$$

koordinat fonksiyonları dif bilir old. dan Φ_{21} dönüşümü dif bilirdir.

• $\Phi_{12} : \Psi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \Psi_1(U_1 \cap U_2)$

$\forall (u,v) \in \Psi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ için $\Phi_{12}(u,v) = (\Psi_1 \circ \Psi_2^{-1})(u,v)$

$$= \Psi_1(\Psi_2^{-1}(u,v))$$

$$= \Psi_1\left(\frac{2}{1+x_1^2+y_1^2}u, \frac{2}{1+x_1^2+y_1^2}v, \frac{1-x_1^2-y_1^2}{1+x_1^2+y_1^2}\right)$$

$$= \left(\frac{u}{x_1^2+y_1^2}, \frac{v}{x_1^2+y_1^2}\right)$$

Bu fonksiyonun koordinat fonksiyonları difbilir old. dan Φ_{12} dönüşümü difbilirdir. Böylece, $\{(\Psi_i, U_i)\}_{i \in I = \{1,2\}}$ atlası, difbilir yapıdır. Bu nedenle S_0^2 difbilir manifoldtur.

Soru: E^n nin topolojik manifold olduğunu gösteriniz.

Çözüm: E^n nin bir topolojik uzay olduğunu biliyoruz.

i) E^n Hausdorff uzayı

$\forall P, Q \in E^n$ ve $P \neq Q$ alalım. $d(P,Q) = \varepsilon$ olsun.

$B_1\left(P, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ ve $B_2\left(Q, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ açık yuvarları E^n de açık alt kümelerdir.

Kabul edelim ki $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ olsun. Yani

$\exists x \in B_1 \cap B_2$ var olsun.

$\Rightarrow x \in B_1$ ve $x \in B_2$

$\Rightarrow d(P,x) < \frac{\varepsilon}{3}$ ve $d(Q,x) < \frac{\varepsilon}{3}$ olur. Ayrıca

$d(P,Q) \leq d(P,x) + d(x,Q)$ olduğundan

$\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ bulunur. Bu bir çelişki olur $\lightning$

Dolayısıyla $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ dir. O halde E^n Hausdorff uzayıdır.

ii) E^n sonlu sayıda açık küme ile örtülebilir;

E^n topolojik uzay olduğundan E^n nin kendisi açıktır. $E^n \subset E^n$ olup E^n ile örtülebilir.

iii) Homeomorfizm :

$U \subset E^n$ açık alt kümesi için

$$I : U \subset E^n \longrightarrow U \subset E^n$$
$$x \longrightarrow I(x) = x$$

birim dönüşümü homeomorfizmdir.

O halde E^n bir topolojik manifoldtur.