Soru : $M = S^2 = \{(x,y,z) \in E^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ yüzeyi veriliyor.

S^2 üzerinde Gauss anlamında kovaryant türev operatörü $\bar{D}$ ise,

$X=(-y,x,0)$, $Y=(0,z,-y) \in \chi(M)$ olmak üzere $\bar{D}_X Y$ hesaplayınız.

Çözüm : $\bar{D}_X Y$ tanımından $\bar{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N$ vardır.

S^2 nin şekil operatörünün I_2 olduğunu biliyoruz.

$S = I_2$, $\chi(M)$ için $S(X) = I_2(X) = X$ yazılır.

$\langle S(X), Y \rangle = \langle X, Y \rangle = \langle (-y,x,0)\ (0,z,-y) \rangle = xz$

ve

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1=0$

$\vec{\nabla} f = (2x, 2y, 2z)$, $\|\vec{\nabla} f\| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2$

$\Rightarrow N = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \dfrac{1}{2}(2x, 2y, 2z) = (x,y,z)$ yüzeyin birim normal vektör alanı

$D_X Y = (X[y_1], X[y_2], X[y_3]) = (\langle X, \nabla y_1 \rangle, \langle X, \nabla y_2 \rangle, \langle X, \nabla y_3 \rangle)$

$= (\langle (-y,x,0)\ (0,0,0) \rangle, \langle (-y,x,0)\ (0,0,1) \rangle, \langle (-y,x,0), (0,-1,0) \rangle)$

$= (0, 0, -x)$

$\Rightarrow \bar{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N$ için bulduğumuz sonuçları yazarsak

$$= (0,0,-x) + xz(x,y,z)$$

$$= (x^2 z,\ xyz,\ -x + xz^2)$$

bulunur.

Soru : $M=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2=4\} \subset E^3$ yüzeyi veriliyor.

a) Parametrik olarak ifade ediniz.

b) Parametrik eğrilerini ifade ediniz.

c) Normal vektör alanını bulunuz.

d) $P=(2,0,0)$ noktasındaki normal vektörünü bulunuz.

e) $P=(2,0,0)$ noktasındaki normal düzlem denklemini bulunuz.

f) Şekil operatörüne karşılık gelen matrisi hesaplayınız.

g) $P=(2,0,0)$ noktasındaki şekil operatörünü bulunuz.

h) Gauss ve ortalama eğriliklerini bulunuz.

ı) Asli eğriliklerini bulunuz.

Çözüm :

a) $$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos u \\ y &= 2\sin u \\ z &= v \end{aligned}\right\} \quad \phi(u,v)=(2\cos u, 2\sin u, v)$$

yazılabilir.

b). • $\alpha(u) = \phi(u, v_0) = (2\cos u, 2\sin u, v_0)$ --- u-parametre eğrisi

u-parametre eğrisi $z = v_0$ düzleminde yarıçapı 2 olan çemberdir.

• $\beta(v) = \phi(u_0, v) = (2\cos u_0, 2\sin u_0, v)$ --- v-parametre eğrisi

$\beta(v) = (2\cos u_0, 2\sin u_0, 0) + v(0,0,1)$

v-parametre eğrisi $(2\cos u_0, 2\sin u_0, 0)$ noktasından geçen $(0,0,1)$ doğrultman vektörlü doğrudur.

c) $N = \dfrac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$

$\phi_u = (-2\sin u, 2\cos u, 0)$

$\phi_v = (0, 0, 1)$

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2\sin u & 2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2\cos u, 2\sin u, 0)$$

$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{4\cos^2 u + 4\sin^2 u + 0} = 2$

$N = \frac{1}{2}(2\cos u, 2\sin u, 0) = (\cos u, \sin u, 0)$

d) $P \in M$ olduğundan

$$P = (2,0,0) = (2\cos u, 2\sin u, v)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 2\cos u \\ 0 = 2\sin u \\ 0 = v \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = 0 \\ v = 0 \end{matrix}$$ bulunur.

Böylece $N(P) = (\cos 0, \sin 0, 0)$
$= (1, 0, 0)$

bulunur.

e) $P = (2,0,0)$ noktasındaki normal düzlemi

$X = (x,y,z)$ düzlem üzerindeki temsili bir nokta olmak üzere

$$\langle N(P), PX \rangle = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\Rightarrow \langle (1,0,0), (x-2, y, z) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 2$$

bulunur.

f) $\phi_u = (-2\sin u, 2\cos u, 0)$

$\phi_v = (0, 0, 1)$

$\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0$ olduğundan matris yöntemini kullanabiliriz.

$$S = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\|\phi_u\|^3 \|\phi_v\|} \det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v) & -\dfrac{1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) \\ -\dfrac{1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) & -\dfrac{1}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|^3} \det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v) \end{bmatrix}$$

$\phi_{uu} = (-2\cos u, -2\sin u, 0)$

$\phi_{uv} = (0, 0, 0)$

$\phi_{vv} = (0, 0, 0)$

$\|\phi_u\| = 2 \quad , \quad \|\phi_v\| = 1$

$$\det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v) = \begin{vmatrix} -2\cos u & -2\sin u & 0 \\ -2\sin u & 2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$\det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) = 0$

$\det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v) = 0$

olduğundan

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{(-4)}{2^3 \cdot 1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

g) $P = (2,0,0)$ noktası için, şekil operatörü matrisinde değişkene bağlı bir terim olmadığından

$$S_p = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

h) $K(P) = \det S_p$ olduğundan Gauss eğriliği

$K(P) = 0$ dır.

$H(P) = \frac{1}{2} \operatorname{iz} S_p$ olduğundan ortalama eğriliği

$H(P) = \frac{1}{4}$ elde edilir.

c) $S = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ şekil operatörü matrisinin karakteristik değerleri

asli eğriliklerdir.

$$\det(\lambda I_2 - S) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1/2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \lambda_2 = 0$$

böylece $k_1 = \frac{1}{2}$ ve $k_2 = 0$ bulunur.

SORU : $M = \left\{ (x,y,z) \in E^3 \,\middle|\, 2z^2 = \frac{x^2}{4} + y^2 - x - y^3 \right\}$ kümesinin bir yüzey olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: M kümesinin yüzey olması için $\forall P \in M$ için $\vec{\nabla} f|_P \neq \vec{0}$ olmalıdır.

$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 - x - y^3 - 2z^2$ olınırsa, M, $f(x,y,z) = 0$ eşitliğini sağlayan nokta kümesidir.

$\nabla f = \left(\frac{x}{2} - 1,\ 2y - 3y^2,\ -4z \right)$ olup $\nabla f = 0$ yapan noktaları incelesek

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = 0 \\ 2y - 3y^2 = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \quad y = 2/3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$(2,0,0)$ ve $(2, \frac{2}{3}, 0)$ noktaları $\nabla f = 0$ yapan noktalardır.

Peki bu noktalar yüzey üzerinde midir?

$(2,0,0) \overset{?}{\in} M \Rightarrow f(x,y,z)\Big|_{(2,0,0)} = \frac{2^2}{4} + 0^2 - 2 - 0^3 - 2.0^2 = -1 \neq 0$

$(2, 2/3, 0) \overset{?}{\in} M \Rightarrow f(x,y,z)\Big|_{(2,\frac{2}{3},0)} = \frac{2^2}{4} - \frac{4}{9} - 2 - \frac{8}{27} - 2.0^2 = \frac{-20}{27} \neq 0$

$(2,0,0)$ ve $(2, 2/3, 0) \notin M$ old. dan M bir yüzeydir.