

SORU : $\phi(u,v) = (u, v, uv)$ hiperbolik paraboloidi üzerindeki $\alpha(t) = (t, at, at^2)$ ($a = sbt$) eğrisinin $t=0$ anındaki geodezik eğriliğini, normal eğriliğini ve geodezik burulmasını bulunuz.

Çözüm : Hatırlatma

• Geodezik Eğrilik : $\kappa_g(\alpha)(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), N|_{\alpha(t)})}{\|\alpha'(t)\|^3}$

• Normal Eğrilik : $\kappa_n(\alpha)(t) = \frac{\langle \alpha''(t), N|_{\alpha(t)} \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}$

• Geodezik Burulma : $\tau_g(\alpha)(t) = \frac{\langle S(\alpha'(t)), N|_{\alpha(t)} \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}$

$$\alpha'(t) = (1, a, 2at) \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + a^2 + 4a^2t^2}$$

$$\alpha''(t) = (0, 0, 2a) \quad = \sqrt{1 + a^2(1 + 4t^2)}$$

$\Rightarrow$ Yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\left. \begin{array}{l} \phi_u = (1, 0, v) \\ \phi_v = (0, 1, u) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \phi_u \times \phi_v = (-v, -u, 1) \\ \|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{1 + u^2 + v^2} \end{array}$$

$$N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} (-v, -u, 1) \quad , \quad N_\alpha = \frac{(-at, -t, 1)}{\sqrt{1 + (a^2 + 1)t^2}}$$

$\alpha'' \neq \lambda N_\alpha$ old. dan α geodezik eğri değildir.

$$\Rightarrow \kappa_g(\alpha)(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), N|_{\alpha(t)})}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), N|_{\alpha(t)}) = \begin{vmatrix} 1 & a & 2at \\ 0 & 0 & 2a \\ -at & -t & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(b^2+1)t^2}} = \frac{2at(1-a^2)}{\sqrt{1+(a^2+1)t^2}}$$

$$\kappa_g(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\frac{2at(1-a^2)}{\sqrt{1+(b^2+1)t^2}}}{(1+a^2+4a^2t^2)^{3/2}} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\Rightarrow \kappa_n(\alpha)(t) = \frac{\langle \alpha''(t), N|_{\alpha(t)} \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{1+(b^2+1)t^2} \cdot (1+a^2+4a^2t^2)}$$

$$\kappa_n(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = \frac{2a}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \tau_g(\alpha)(t) = \frac{\langle S(\alpha'(t)), N_\alpha \times \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}$$

$$S(\alpha'(t)) = \bigcup_{\alpha'(t)} N = \frac{dN_\alpha}{dt} \Big|_{t=0} = (-a, -1, 0)$$

$$N_\alpha \times \alpha'(t) = (-a, 1, 0)$$

$$\tau_g(\alpha)(t) \Big|_{t=0} = \frac{a^2-1}{1+a^2}$$

SORU : $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-4, 4]$ olmak üzere, $\phi(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v)$

yüzeyinin üzerinde bulunan $\alpha(t) = \phi(t, 0)$ eğrisinin geodezik eğri olup olmadığını inceleyiniz ve bu eğrinin geodezik eğriliğini, geodezik burulmasını ve normal eğriliğini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\phi_u = (-\sin u - v \cos u, \cos u - v \sin u, 0)$$

$$\phi_v = (-\sin u, \cos u, 1)$$

$$\phi_u \times \phi_v = (\cos u - v \sin u, -\sin u - v \cos u, -v)$$

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{1 + 2v^2}$$

$$N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \frac{(\cos u - v \sin u, -\sin u - v \cos u, -v)}{\sqrt{1 + 2v^2}}$$

$$N|_{\alpha(t)} = (\cos t, \sin t, 0)$$

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0), \quad \|\alpha'(t)\| = 1$$

$$\alpha''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$\Rightarrow \alpha'(t) = (-1) \cdot N|_{\alpha(t)}$ olduğundan α eğrisi geodeziktir.

$$\Rightarrow \kappa(\alpha(t)) = \frac{\langle \alpha''(t), N|_{\alpha} \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\Rightarrow \kappa_g(\alpha(t)) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), N|_{\alpha}(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_g(\alpha(t)) = \frac{\langle S(\alpha'(t)), N|_{\alpha}(t) \times \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}$$

$$S(\alpha'(t)) = \nabla_{\alpha'(t)} N = \frac{dN_{\alpha}}{dt} = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\langle S(\alpha'(t)), N_{\alpha} \times \alpha'(t) \rangle = 0 \text{ olduğundan } \tau_g(\alpha(t)) = 0$$

olarak bulunur.

SORU : $z = x^2y$ yüzeyi üzerindeki $\alpha(t) = (t, t^2, t^4)$ eğrisinin geodezik eğri olup olmadığını inceleyiniz. Bu eğrinin normal eğrilik ve geodezik eğrilik hesaplayınız.

Çözüm:

$$f(x, y, z) = z - x^2y$$

$$\vec{\nabla} f = (-2xy, -x^2, 1)$$

$$\|\vec{\nabla} f\| = \sqrt{1 + 4x^2y^2 + x^4}$$

$$N = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \frac{(-2xy, -x^2, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2y^2 + x^4}} \Rightarrow N|_{\alpha} = \frac{(-2t^3, -t^2, 1)}{\sqrt{1 + 4t^6 + t^4}}$$

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 4t^3), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2(1 + 4t^4)}$$

$$\alpha''(t) = (0, 2, 12t^2)$$

$\Rightarrow \alpha''(t) = \lambda N|_{\alpha}(t)$ o.s $\lambda \in \mathbb{R}$ yoktur. Bu yüzden α geodezik değildir.

$$\Rightarrow \kappa_n(\alpha(t)) = \frac{\langle \alpha''(t), N|_{\alpha} \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}$$

$$\langle \alpha''(t), N|_{\alpha} \rangle = \frac{10t^2}{\sqrt{1 + 4t^6 + t^4}}$$

$$K_n(\alpha(t)) = \frac{10t^2}{\sqrt{1+4t^6+t^4} (1+4t^2(1+4t^4))}$$

$$\Rightarrow K_g(\alpha(t)) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), N|_{\alpha(t)})}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$= \frac{(2 + 12t^4 - 32t^6)}{\sqrt{1+4t^6+t^4} (1+4t^2(1+4t^4))^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

SORU : M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı ve asimptotik bir eğri olsun ($\kappa > 0$). α eğrisinin Frenet çatısı $\{t, n, b\}$ ve burulması τ olsun. M yüzeyinin şekil operatörü S olmak üzere, b nin α eğrisi boyunca M yüzeyine dik (yüzeyin birim normali) ve $S(t) = -\tau n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : α eğrisinin Frenet çatısı $\{t, n, b\}$, yay parametresi s ve α eğrisi boyunca normal N olsun. $\alpha(s)$ asimptotik eğri olduğundan $\alpha'(s) = t$ olmak üzere $\langle S(t), t \rangle = 0$ dir.

$$S(t) = D_t N = \frac{dN}{ds} \text{ yazılır.}$$

$$\left\langle \frac{dN}{ds}, \alpha'(s) \right\rangle = 0 \text{ ---- } (*)$$

bulunur. Ayrıca $\langle N, \alpha'(s) \rangle = 0$ ise $\left\langle \frac{dN}{ds}, \alpha'(s) \right\rangle = -\langle N, \alpha''(s) \rangle$ yazılır.

Buradan $(*)$ kullanılarak $\langle N, \alpha''(s) \rangle = 0$ yazılır. Yani $N \perp \alpha''(s)$ dir.

α birim hızlı olduğundan

$$t = \alpha'(s) \quad n = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \quad b = t \times n$$

ol. üzere $N \perp n$ yazılır. Ayrıca $N \perp t$ ile $b = t \times n$ old. dan $N \parallel b$ dır.

Yani b , M yüzeyine diktir.

$$S(t) = D_t N = D_t b = \frac{db}{ds} = -\tau n$$

↓
Frenet formüllerinden