Soru: $X: E^2 \longrightarrow E^3$

$$(u,v) \longrightarrow X(u,v) = (u^2, u^3, v)$$

dönüşümü verilliyor. $X(E^2) = M$ kümesi E^2 de topolojik manifold mudur?

M nin topolojik manifold olması için X in bir homeomorfizma olması yeterlidir.

* M, E^3 de indirgenmiş topoloji yardımıyla $M \subset E^3$ bir topolojik uzaydır.

* M bir Haussdorff uzayıdır.

* M sayılabilir çoklukta açık küme ile örtülebilir.

X bir homeomorfizmadır:

$\Rightarrow$ X süreklidir:

$$X(u,v) = (u^2, u^3, v) = (f_1, f_2, f_3)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(u,v) &= u^2 \\ f_2(u,v) &= u^3 \\ f_3(u,v) &= v \end{aligned}\right\}$$ fonksiyonları sürekli olduğundan X süreklidir.

$\Rightarrow X'$ 1-1 dir :

$X'(u_1, v_1) = X'(u_2, v_2) \Rightarrow (u_1^2, u_1^3, v_1) = (u_2^2, u_2^3, v_2)$

$\Rightarrow u_1 = u_2$ ($u_1^2 = u_2^2$ ve $u_1^3 = u_2^3$ olduğundan)

ve

$v_1 = v_2$

$\Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ old. X' 1-1 dir.

$\Rightarrow X'^{-1}$ var ve süreklidir :

$\forall (x,y,z) \in M$ için $X'(u,v) = (x,y,z)$ o.ş $(u,v) \in E^2$ var mıdır?

$(x,y,z) = (u^2, u^3, v)$

$\Rightarrow u = \sqrt[3]{y}$

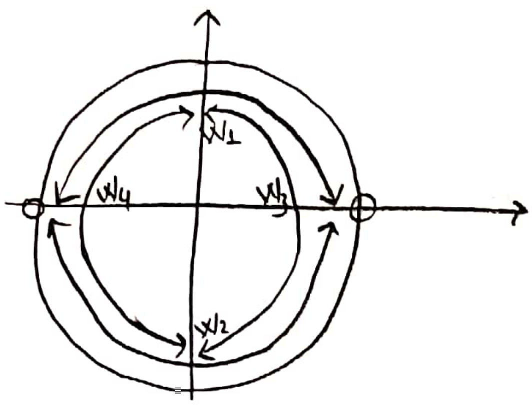
$v = z$

$X'^{-1}(x,y,z) = (\sqrt[3]{y}, z)$

$g_1(x,y,z) = \sqrt[3]{y}$, $g_2(x,y,z) = z$ fonk. sürekli olduğundan X'^{-1} süreklidir.

$\Rightarrow$ O halde X' bir homeomorfizmadır. M, E^2ye homeomorf old. 2-boyutlu topolojik manifoldtur.

Soru : S^1 çemberi için bir atlas bulunuz.



S_1 üzerinde tanımlı

$$\left\{ (\psi_i, W_i) \mid i \in I = (1,2,3,4) \right\}$$

atlasını bulacağız.

$$W_1 = \left\{ (x,y) \in S^1 \mid y > 0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ (x,y) \in S^1 \mid y < 0 \right\}$$

$$W_3 = \left\{ (x,y) \in S^1 \mid x > 0 \right\}$$

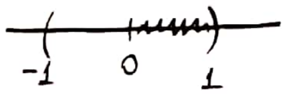
$$W_4 = \left\{ (x,y) \in S^1 \mid x < 0 \right\}$$

olmak üzere W_i, $i \in I$ kümeleri birer açık olup $W_1 \cup W_2 \cup W_3 \, W_4 = \bigcup_{i=1}^{4} W_i = S^1$

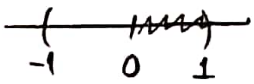
yazılabileceğinden S^1 çemberinin sayılabilir açık örtüsü $\{W_i\}_{i \in I}$ şeklindedir.

NOT: $U \subset E$ açık küme olmak üzere $\psi : U \longrightarrow \psi(U) = W \subset S^1$ o.ş

ψ homeomorfizması vardır. (ψ, W) haritadır.



$U_1 \in E$



$U_2 \in E$

$U_1 = \{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \}$ ve $U_2 = \{ y \in \mathbb{R} \mid -1 < y < 1 \}$ kümeleri E^1 Öklid

uzayında birer açık kümedir.

$$\psi_i : U_i \longrightarrow W_i$$

$$\psi_1 : U_1 \subset E^1 \longrightarrow W_1 \subset S^1$$

$$x_1 \longrightarrow \psi_1(x_1) = (x_1, \sqrt{1 - x_1^2})$$

dönüşümü 1-1, örten ve süreklidir.

$\forall (x,y) \in W_1$ için $\psi_1(x_1) = (x,y)$ o.ş $\exists x_1 \in U_1$ vardır.

$$\Rightarrow (x_1, \sqrt{1-x_1^2}) = (x,y) \qquad \psi_1^{-1}(x,y) = x_1 = x$$

$$\Rightarrow x = x_1 \quad y = \sqrt{1 - x_1^2}$$

olduğundan tersi de süreklidir.

$\Rightarrow \psi_1$ bir homeomorfizmadır. Yani (ψ_1, W_1) S^1 için bir haritadır.

Benzer şekilde,

$\Psi_2 : U_1 \subset E^1 \longrightarrow W_2 \subset S^1$

$x_1 \longrightarrow \Psi_2(x_1) = (x_1, -\sqrt{1-x_1^2})$ $\qquad \Psi_2^{-1}(x,y) = x_1$

$\Psi_3 : U_2 \subset E^1 \longrightarrow W_3 \subset S^1$

$x_2 \longrightarrow \Psi_3(x_2) = (\sqrt{1-x_2^2}, x_2)$ $\qquad \Psi_3^{-1}(x,y) = x_2$

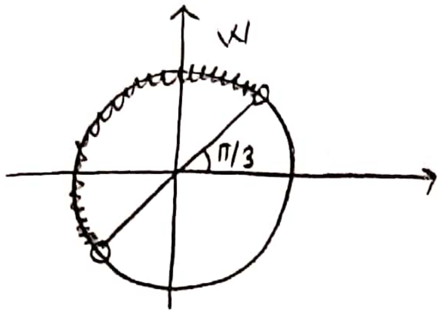
$\Psi_4 : U_2 \subset E^1 \longrightarrow W_4 \subset S^1$

$x_2 \longrightarrow \Psi_4(x_2) = (-\sqrt{1-x_2^2}, x_2)$ $\qquad \Psi_4^{-1}(x,y) = x_2$

formları da birer homeomorfizmadır. Buradan (Ψ_2, W_2) (Ψ_3, W_3) ve (Ψ_4, W_4)

S^1 için haritadır. Böylece $\{(\Psi_i, W_i)\}_{i \in I}$, S^1 için atlastır.

<u>SORU</u> :



Şekildeki W açık kümesi için bir homeomorfizma bulunuz.

$$W = \left\{ (x,y) \in S^1 \;\middle|\; -1 < x < 1/2 \,,\; -\sqrt{3}/2 < y < 1 \right\}$$ açık kümedir.

$$U = \left\{ u \;\middle|\; \pi/3 < u < 7\pi/3 \,,\; u \in \mathbb{R} \right\}$$ kümesi de E^1 de açık kümedir.

$$\Psi : U \subset E^1 \longrightarrow W \subset S^1$$
$$u \longrightarrow \Psi(u) = (\cos u, \sin u)$$

dönüşümü 1-1, örten ve süreklidir.

<u>1-1</u> :

$\forall u_1, u_2 \in U$ için $\Psi(u_1) = \Psi(u_2)$ iken $u_1 = u_2$ midir?

$$\Psi(u_1) = \Psi(u_2) \Rightarrow (\cos u_1, \sin u_1) = (\cos u_2, \sin u_2)$$
$$\Rightarrow \cos u_1 = \cos u_2 \,,\; \sin u_1 = \sin u_2$$
$$\Rightarrow u_1 = u_2 \text{ olup } \Psi \text{ 1-1 dir.}$$

Tersi de süreklidir

$\forall (x,y) \in W$ için $\Psi(u) = (x,y)$ ös $\exists u \in U$ vardır.

$(\cos u, \sin u) = (x,y) \Rightarrow x = \cos u$, $y = \sin u$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan u$

$\Rightarrow \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = u$

$\Psi^{-1}(x,y) = u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

ters fonksiyonu da süreklidir.

$\Rightarrow \Psi$ homeomorfizmdir.

<u>SORU</u>: $S_0^2 = \{(x,y,z) \in E^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ küresinin bir dif bilir manifold olduğunu gösteriniz.

S_0^2 nin 2 boyutlu bir manifold olduğunu biliyoruz. O yüzden E^2 de bir homeomorfizma tanımlamalıyız.

$W_1 = \{(x,y,z) \in S_0^2 \mid z > 0\}$

$W_2 = \{(x,y,z) \in S_0^2 \mid z < 0\}$

$W_3 = \{(x,y,z) \in S_0^2 \mid y > 0\}$

$W_4 = \{(x,y,z) \in S_0^2 \mid y < 0\}$

$W_5 = \{(x,y,z) \in S_0^2 \mid x > 0\}$

$W_6 = \{(x,y,z) \in S_0^2 \mid x < 0\}$

kümeleri S_0^2 üzerinde birer açık kümedir.

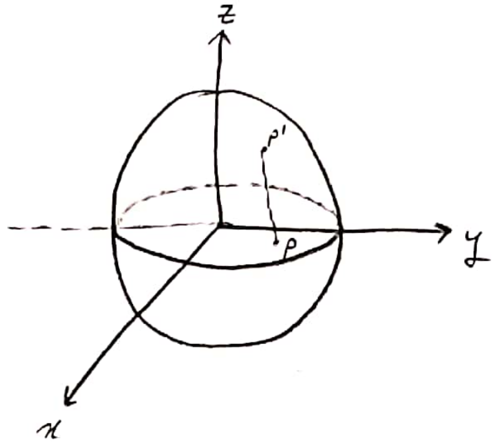
Ayrıca $S_0^2 = \bigcup_{i=1}^{6} W_i$ yazılabileceğinden $\{W_i\}_{i \in I}$, $I = \{1,2,\dots 6\}$ ailesi S_0^2 nin bir açık örtüsüdür.

$U=\{(u,v)\in E^2 \mid u^2+v^2<1\}$ kümesi E^2 de bir açık alt kümedir.

$\Psi_1 : U\subset E^2 \longrightarrow W_1 \subset S_0^2$

$(u,v) \longrightarrow \Psi_1(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$

dönüşümü sürekli, 1-1 ve örtendir.



$\forall(x,y,z)\in W_1$ için $\Psi_1(u,v)=(x,y,z)$ o.ş $(u,v)\in U$ var mıdır?

$\Psi_1(u,v)=(x,y,z) \Rightarrow (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})=(x,y,z)$

$\Rightarrow u=x\ ,\ v=y\ ,\ z=\sqrt{1-u^2-v^2}$

$\Psi_1^{-1}(x,y,z)=(u,v)$

$\Psi_1^{-1}(x,y,z)=(x,y)$ elde edilir.

Ψ_1^{-1} de sürekli olduğundan (Ψ_1, W_1) ikilisi S_0^2 için bir haritadır.

$\Psi_2 : U\subset E^2 \longrightarrow W_2 \subset S_0^2$

$(u,v) \longrightarrow \Psi_2(u,v)=(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2})$ dönüşümü bir homeomorfizm olduğundan (Ψ_2, W_2) ikilisi de bir haritadır.

$\Psi_3 : U \subset E^2 \longrightarrow W_3 \subset S_0^2$

$(u,v) \longrightarrow \Psi_3(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$ dönüşümü de bir homeomorfizmdir

ve

$\Psi_3^{-1}(x,y,z) = (u,v)$

$\Psi_3^{-1}(x,y,z) = (x,z)$

$\Rightarrow (\Psi_3, W_3)$ bir haritadır.

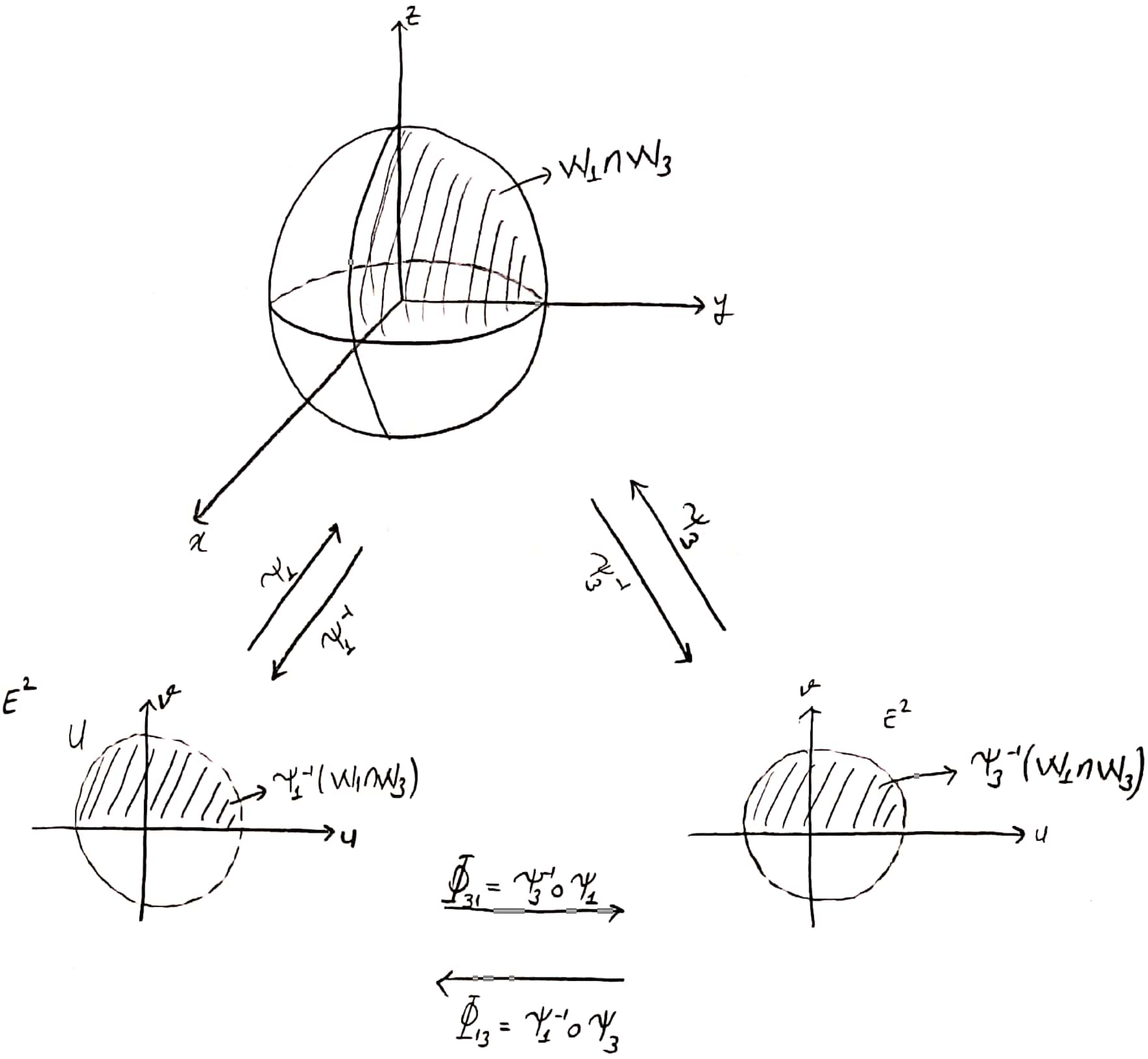
Benzer şekilde diğer haritalar da bulunur.

Böylece $\{(\Psi_i, W_i)\}_{i\in I}$ ailesi S_0^2 için bir atlastır.

$W_1 \cap W_3 = \{(x,y,z) \in S_0^2 \mid y>0, z>0\} \neq \emptyset$

$\Psi_1^{-1}(W_1 \cap W_3) = \{(u,v) \in U \mid v>0\}$

$\Psi_3^{-1}(W_1 \cap W_3) = \{(u,v) \in U \mid v>0\}$



$$\Phi_{31} : \psi_1^{-1}(W_1 \cap W_3) \longrightarrow \psi_3^{-1}(W_1 \cap W_3)$$

$\forall (u,v) \in \psi_1^{-1}(W_1 \cap W_3)$ için

$$\Phi_{31}(u,v) = (\psi_3^{-1} \circ \psi_1)(u,v)$$

$$= \psi_3^{-1}(\psi_1(u,v)) = \psi_3^{-1}\left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) = \left(u, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

Bu fonksiyonun koordinat fonksiyonları difbilir olduğundan Φ_{31} dönüşümü difbilirdir. ($U=(u,v)\in E^2$, $u^2+v^2<1$ aralığında difbilir)

$\Rightarrow$ Φ_{13} dönüşümü de difbilirdir.

Benzer şekilde diğer dönüşümlerin de difbilir olduğu görülür. Böylece $\{(\Psi_i, W_i)\}_{i\in I}$ atlası bir difbilir yapıdır. Bu nedenle S_0^2 bir difbilir manifoldtur.

SORU : Silindirin iki haritadan oluşan bir atlasını bularak difbilir manifold olduğunu gösteriniz.

M silindir yüzeyi olmak üzere, silindir 2-boyutlu topolojik manifoldtur. O yüzden E^2 nin bir açığına homeomorf bulmalıyız.

$U_1 = \{(u,v) \in E^2 \mid -\pi < u < \pi,\ v \in \mathbb{R}\}$ açık alt kümesini ele alalım.

$$\Psi_1 : U \subset E^2 \longrightarrow M \subset E^3$$
$$(u,v) \longrightarrow \Psi_1(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

dönüşümünü tanımlayalım.

- Ψ_1 süreklidir.
- Ψ_1 1-1 dir:

$\forall (u_1,v_1)\,(u_2,v_2) \in U_1$ için $\Psi_1(u_1,v_1) = \Psi_1(u_2,v_2)$ iken $(u_1,v_1) = (u_2,v_2)$ midir?

$$(\cos u_1, \sin u_1, v_1) = (\cos u_2, \sin u_2, v_2) \Rightarrow \cos u_1 = \cos u_2,\ \sin u_1 = \sin u_2,\ v_1 = v_2$$
$$\Rightarrow u_1 = u_2,\ v_1 = v_2$$
$$\Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$$
$$\Rightarrow \Psi_1,\ 1\text{-}1 \text{ dir.}$$

- $\Psi_1 : U_1 \subset E^2 \to \Psi_1(U_1) \subset M$ örtendir.

$\forall (x,y,z) \in \Psi_1(U_1)$ için $\Psi_1(u,v) = (x,y,z)$ o.ş $\exists (u,v) \in U_1$ vardır.

$\Psi_1(u,v) = (\cos u, \sin u, v) = (x,y,z) \Rightarrow x = \cos u \,,\ y = \sin u \,,\ z = v$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan u \Rightarrow u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \,,\ v = z$

$\Rightarrow (u,v) = \left(\arctan \frac{y}{x} \,,\ z\right) \in U_1$ örtendir.

- Ψ_1 1-1 ve örtendir, tersi vardır. Süreklidir.

Örtenlikten yararlanarak $\Psi_1^{-1}(x,y,z) = (u,v) = \left(\arctan \frac{y}{x} \,,\ z\right)$ bulunur.

Süreklidir.

$\Rightarrow \Psi_1$ homeomorfizmadır.

$\Rightarrow (\Psi_1, U_1)$ ikilisi bir haritadır.

Benzer şekilde

$U_2 = \left\{ (u,v) \in E^2 \,\middle|\, 0 < u < 2\pi ,\ v \in \mathbb{R} \right\}$ açık alt kümesini ele alalım.

$\Psi_2 : U_2 \subset E^2 \longrightarrow M \subset E^3$

$(u,v) \longrightarrow \Psi_2(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$

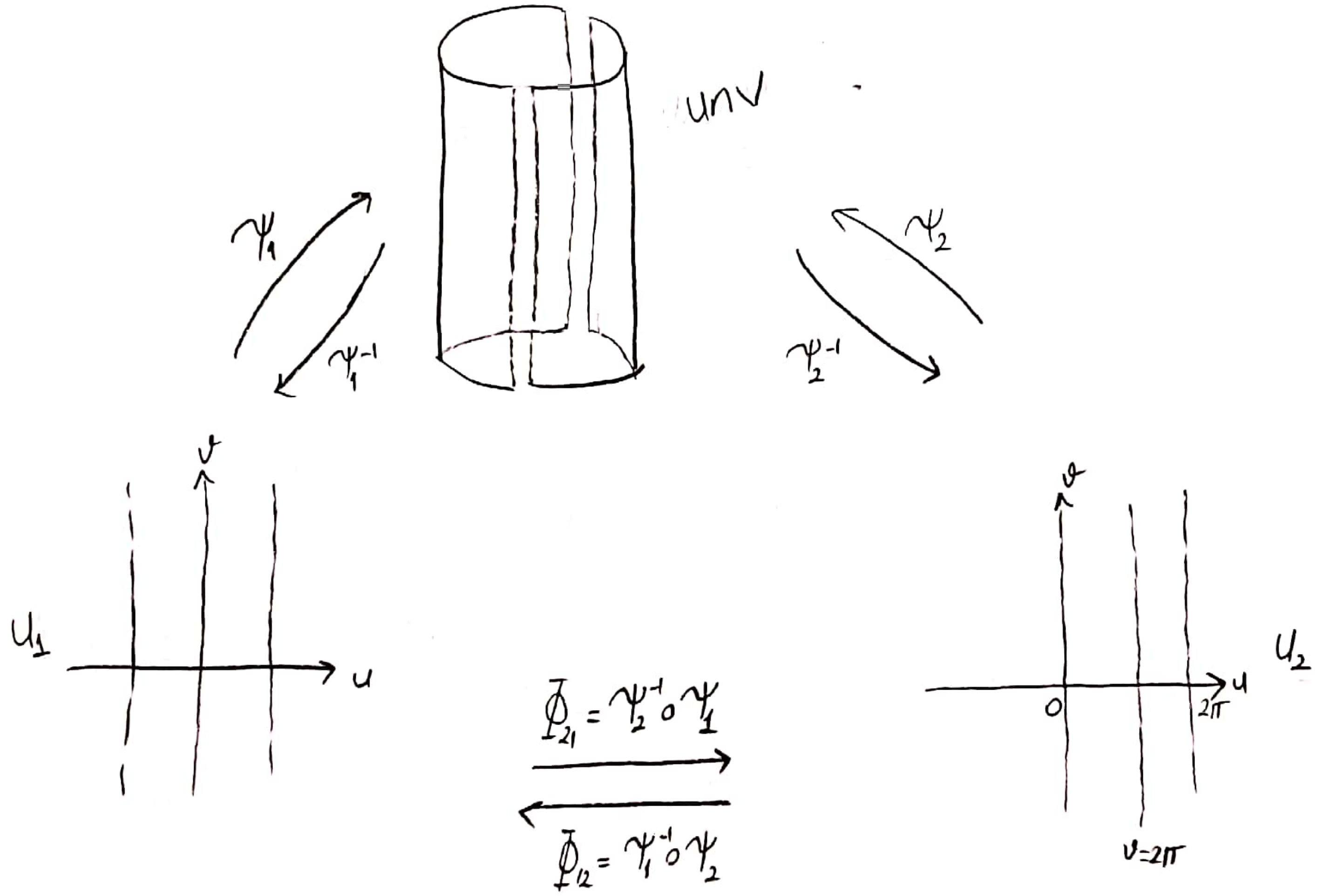
dönüşümünü tanımlayalım.

Benzer şekilde Ψ_2 bir homeomorfizmadır.

$\Rightarrow (\Psi_2, U_2)$ ikilisi bir haritadır.

$\Rightarrow \{(\Psi_i, U_i)\}_{i\in I}$, $I = \{1,2\}$ kümesi, silindir için bir atlastır.

Bulduğumuz bu atlasın dif. bilir bir yapı olduğunu gösterirsek, silindirin dif. bilir manifold olduğunu göstermiş oluruz.



$\Phi_{21} : \Psi_1^{-1}(U\cap V) \longrightarrow \Psi_2^{-1}(U\cap V)$

$\forall (u,v) \in \Psi_1^{-1}(U\cap V)$ için $\Phi_{21}(u,v) = (\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1)(u,v) = \Psi_2^{-1}(\Psi_1(u,v))$

$$= \Psi_2^{-1}(\cos u, \sin u, v)$$

$$= (u,v)$$

Bu fonksiyonun koordinat fonksiyonları dif.bilir old.dan Φ_{21} dönüşümü dif.bilirdir.

$\Phi_{12} : \Psi_2^{-1}(U\cap V) \longrightarrow \Psi_1^{-1}(U\cap V)$

$\forall (u,v) \in \Psi_2^{-1}(U\cap V)$ için $\Phi_{12}(u,v) = (\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2)(u,v) = \Psi_1^{-1}(\Psi_2(u,v))$

$$= \Psi_1^{-1}(\cos u, \sin u, v)$$

$$= (u,v)$$

Bu fonksiyonun koordinat fonksiyonları difbilir old. dan Φ_{12} dönüşümü difbilirdir. Böylece, $\{(\Psi_i, U_i)\}_{i\in I=\{1,2\}}$ atlası difbilir yapıdır. Bu nedenle silindir difbilir manifoldtur.