

Soru 1 : V bir vektör uzayı ve W_1, W_2, W_3 , V nin birer alt uzayı olmak üzere; $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ ve $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ ise $W_2 \cap (W_1 + W_3) = \{\vec{0}\}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ olduğundan; $V = W_1 + W_2 + W_3$ ve $(W_1 + W_2) \cap W_3 = \{\vec{0}\}$ dir.

$\forall \vec{\alpha} \in W_2 \cap (W_1 + W_3)$ için $\vec{\alpha} \in W_2$ ve $\vec{\alpha} \in W_1 + W_3$ dir.

$\vec{\alpha} \in W_1 + W_3$ olduğundan; $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_3$ olacak şekilde

$\exists \vec{\alpha}_1 \in W_1$, $\exists \vec{\alpha}_3 \in W_3$ dir.

$$\vec{\alpha} \in W_2 \text{ ve } \vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_3 \Rightarrow \underbrace{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1}_{\in W_1 + W_2} = \underbrace{\vec{\alpha}_3}_{\in W_3} \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_3 \in (W_1 + W_2) \cap W_3 = \{\vec{0}\} \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1 = \vec{0} \text{ ve } \vec{\alpha}_3 = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\vec{\alpha}}_{\in W_2} = \underbrace{\vec{\alpha}_1}_{\in W_1}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1 \in W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow W_2 \cap (W_1 + W_3) = \{\vec{0}\} \text{ dir.}$$

• Soru 2 : $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ olmak üzere;

$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4 x_2 y_2$ fonksiyonu veriliyor:

a) bu fonksiyonun bir iç çarpım fonksiyonu

olduğunu gösteriniz.

b) $X = (1, 3)$, $Y = (2, -1)$ ise $\langle X, Y \rangle = ?$

c) $\|(2, 5)\| = ?$

Çözüm : a) (i) Simetri Özelliği : $\forall X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

İçin:

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4 x_2 y_2$$

$$= y_1 x_1 - y_2 x_1 - y_1 x_2 + 4 y_2 x_2$$

$$= y_1 x_1 - y_1 x_2 - y_2 x_1 + 4 y_2 x_2$$

$$= \langle Y, X \rangle \text{ olduğundan; simetri özelliği}$$

sağlanır.

(ii) Bilineerlik Aksiyomu : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$\forall X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2), Z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ için:

$$\begin{aligned} \langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle &= \langle (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2), (z_1, z_2) \rangle \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 - (\alpha x_1 + \beta y_1) z_2 - (\alpha x_2 + \beta y_2) z_1 + 4 (\alpha x_2 + \beta y_2) z_2 \end{aligned}$$

$$= \alpha (x_1 z_1 - x_1 z_2 - x_2 z_1 + 4 x_2 z_2) + \beta (y_1 z_1 - y_1 z_2 - y_2 z_1 + 4 y_2 z_2)$$

$$= \alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \langle X, \alpha Y + \beta Z \rangle &= \langle (x_1, x_2), (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2) \rangle \\
 &= x_1(\alpha y_1 + \beta z_1) - x_1(\alpha y_2 + \beta z_2) - x_2(\alpha y_1 + \beta z_1) + 4x_2(\alpha y_2 + \beta z_2) \\
 &= \alpha(x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4x_2 y_2) + \beta(x_1 z_1 - x_1 z_2 - x_2 z_1 + 4x_2 z_2) \\
 &= \alpha \langle X, Y \rangle + \beta \langle X, Z \rangle
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) Pozitif tanımlılık : $\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için:

$$\begin{aligned}
 \bullet \langle X, X \rangle &= x_1 \cdot x_1 - x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_1 + 4x_2 \cdot x_2 \\
 &= x_1^2 - x_1 x_2 - x_2 x_1 + 4x_2^2 \\
 &= x_1^2 - 2x_1 x_2 + 4x_2^2 \\
 &= (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 \geq 0 \quad \text{dir.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle X, X \rangle = 0 &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad \vee \quad 3x_2^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_2^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow X = (x_1, x_2) = (0, 0)
 \end{aligned}$$

Dolayısıyla, bu fonksiyon bir $\mathbb{R}$ çarpım fonksiyonudur.

$$b) X = (1, 3), Y = (2, -1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \langle X, Y \rangle &= 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot (-1) \\
 &= 2 + 1 - 6 - 12 \\
 &= -15 \quad \text{dir.}
 \end{aligned}$$

$$c) \|(2,5)\| = \sqrt{\langle (2,5), (2,5) \rangle} \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} \langle (2,5), (2,5) \rangle &= 2 \cdot 2 - 2 \cdot 5 - 5 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 4 - 10 - 10 + 100 \\ &= 84 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|(2,5)\| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \text{ dir.}$$

• Soru 3 : $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & k \end{bmatrix}$ matrisinin involütif bir matris olması için k ne olmalıdır?

Gözüm : A nın involütif bir matris olması için $A^2 = I_3$ olması gerekir.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & k \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9+3k \\ 0 & 1 & -3-k \\ -12-4k & -12-4k & -8+k^2 \end{bmatrix} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 9+3k &= 0 \\ -3-k &= 0 \\ -12-4k &= 0 \\ -8+k^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k = -3$$

- Soru 4 : A ve B kare matrisleri iin: $AB=A$ ve $BA=B$ ise; (a) A^t ve B^t nin idempotent, (b) A terslenebilir ise $A=B=I$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (a) $(A^t)^2 = A^t \cdot A^t = (AB)^t \cdot (AB)^t$
 $= (B^t A^t) (B^t A^t)$
 $= B^t [\underbrace{(A^t B^t)}_{= B^t} A^t]$
 $= B^t (\underbrace{B^t A^t}_{= A^t})$
 $= B^t A^t$
 $= (AB)^t = A^t \Rightarrow A^t \text{ idempotent}$

$$\begin{aligned} (B^t)^2 &= B^t \cdot B^t = (BA)^t \cdot (BA)^t \\ &= (A^t B^t) (A^t B^t) \\ &= A^t [\underbrace{(B^t A^t)}_{= A^t} B^t] \\ &= A^t (\underbrace{A^t B^t}_{= B^t}) \\ &= A^t B^t \\ &= (BA)^t = B^t \Rightarrow B^t \text{ idempotent} \end{aligned}$$

- (b) A terslenebilir bir matris ise $AB=A$ nin her iki
yanı A^{-1} ile çarpılarak; $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = B = A^{-1}A = I$
ve B terslenebilir bir matris ise $BA=B$ nin her iki
yanı B^{-1} ile çarpılarak; $B^{-1}(BA) = (B^{-1}B)A = A$
 $= B^{-1}B$
 $= I$
yani $A=B=I$ bulunur.

• Soru 5 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin, n bir pozitif tamsayı olmak üzere A^n yi bulunuz.

Gözüm : $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

$n-1$ ian, $A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot (n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2(n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

olduğu görülür.

• Soru 6 : $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } a+d=0 \right\}$

kümesinin $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

Gözüm : $\forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in S, \forall k \in \mathbb{R}$ ian :

S nin tanımından; $a_1+d_1=0$ ve $a_2+d_2=0$ dir.

$$i) \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} \in S \text{ dir}$$

$$\text{Çünkü } (a_1+a_2) + (d_1+d_2) = (a_1+d_1) + (a_2+d_2) \\ = 0+0 \\ = 0 \text{ dir.}$$

$$ii) k \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix} \in S \text{ dir}$$

$$\text{Çünkü } ka_1 + kd_1 = k(a_1 + d_1) = k \cdot 0 = 0 \text{ dir.}$$

$$\bullet \text{ Ayrıca, } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S \subset \mathbb{R}_2^2 \text{ dir.}$$

Böylece, $S, \mathbb{R}_2^2$ nin bir alt uzayıdır.

$$\bullet \text{ Soru 7 : } \mathbb{R}^3 \text{ ün } S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 = x_2 = x_3 \right\} \text{ ve}$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 = 0 \right\} \text{ alt uzayları veriliyor.}$$

$$S + T = \mathbb{R}^3 \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Çözüm : $\mathbb{R}^3$ de herhangi bir v vektörünün

$$v = s + t, \quad s \in S \text{ ve } t \in T \text{ şeklinde yazılabildiğini}$$

gösterebiliriz gerekir.

$$v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \text{ denilirse, } v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - a_1 \end{bmatrix} \text{ şeklinde}$$

$$\text{yazılabildiğinden ve } \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{bmatrix} \in S, \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - a_1 \end{bmatrix} \in T$$

oldugundan; $u \in S+T$ dir.

Böylece, $S+T = \mathbb{R}^3$ elde edilir.

- Soru 8: Bir V vektör uzayında $0 \neq u, 0 \neq v$ vektörleri veriliyor. u ve v nin lineer bağımlı olması tam gerek ve yeter koşul birinin diğerinin skaler katı olmasıdır, gösteriniz.

Gözüm: Gereklik: $0 \neq c_1$ ve $c_1 u + c_2 v = 0$ olsun.

Buradan, $u = -c_1^{-1} c_2 v$ elde edilir.

Yeterlik: $u = cv$, $0 \neq c$ bir skaler olsun. Bu eşitlik $u - cv = 0$ şeklinde yazılabileceğinden u ve v lineer bağımlıdır.

- Soru 9: $\mathbb{R}_2^2$ uzayının:

$W = \left\{ A : A = \begin{bmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ile tanımlanan alt uzayının bir tabanını bulunuz ve boyutunu belirleyiniz.

Gözüm : W nun tanımından;

$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ eşitliği elde}$$

edilebileceğinden W nun $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi ile gerildiği görülür.

$$\text{Ayrıca, } c_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ eşitliğinden;}$$

$c_1 = c_2 = 0$ bulunacağından bu küme lineer bağımsızdır.

Şu halde $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi W için bir

taban olup $\dim W = 2$ dir.

$$\text{Soru 10 : } \mathbb{R}^3 \text{ için } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ sıralı tabanı veriliyor.

a) $v = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$ vektörünün S tabanına göre koordinatlarını bulunuz.

b) $[v]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ olan v vektörünü bulunuz.

Gözüm: a) $a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$

denklemden bulacağımız a_1, a_2, a_3 değerleri v nin S tabanına göre koordinatlarıdır.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 5 \\ 2a_1 + 9a_2 + 3a_3 = -1 \\ a_1 + 4a_3 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 9 - 4a_3 \\ 9 - 4a_3 + 2a_2 + 3a_3 = 5 \Rightarrow \\ 9 + 2a_2 - a_3 = 5 \Rightarrow \\ 2a_2 = -4 + a_3 \Rightarrow \\ a_2 = -2 + \frac{1}{2}a_3 \end{array}$$

Buradan, $2a_1 + 9a_2 + 3a_3 = 2(9 - 4a_3) + 9(-2 + \frac{1}{2}a_3) + 3a_3$
 $= 18 - 8a_3 - 18 + \frac{9}{2}a_3 + 3a_3$
 $= -\frac{a_3}{2}$
 $= -1 \Rightarrow a_3 = 2$

$\Rightarrow a_1 = 9 - 4 \cdot 2 = 1$ ve

$a_2 = -2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = -1$

bulunur. Böylece, $[v]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ elde edilir.

b) $v = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 31 \\ 7 \end{bmatrix}$ bulunur.

- Soru 11: 1. dereceden polinomların vektör uzayı P_1 in $S = \{6+3t, 10+2t\}$ ve $T = \{2, 3+2t\}$ tabanları veriliyor. S tabanından T tabanına geçiş matrisi P yi bulunuz.

Gözüm: $6+3t = 2a + (3+2t)b$
 $= (2a+3b) + 2bt$ denklemden;
 $a = \frac{3}{4}, b = \frac{3}{2} \Rightarrow [6+3t]_T = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/2 \end{bmatrix}$ ve

$10+2t = 2c + (3+2t)d$
 $= (2c+3d) + 2dt$ denklemden;
 $c = \frac{7}{2}, d = 1 \Rightarrow [10+2t]_T = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ bulunur. Böylece,

$P = \begin{bmatrix} 3/4 & 7/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$ elde edilir.

- Soru 12: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.
 rank A yi bulunuz.

Gözüm: Önce A matrisinin satırca eşelon

formunu bulalım.

$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 2 & 1 \\ \alpha_2 & -1 & 0 & 3 \\ \alpha_3 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\alpha_3 \rightarrow \alpha_3 + (-1)\alpha_1]{\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + \alpha_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\alpha_3 \rightarrow \alpha_3 \div 3]{\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 \div 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha_3 \rightarrow \alpha_3 + (-1)\alpha_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Satırca eşelon formdaki son matriste sıfırdan farklı satır sayısı 2 olduğundan; $\text{rank } A = 2$ bulunur.

• Soru 13: V bir iç çarpım uzayı ve U_1, U_2 , V nin iki alt uzayı olsun. $U_1 \subset U_2$ ise $U_1^\perp \supset U_2^\perp$ olduğunu gösteriniz.

Gözüm: $u_2 \in U_2^\perp$ ise her $v \in U_2$ için $\langle v, u_2 \rangle = 0$ dir.
 $U_1 \subset U_2$ olduğundan; her $u_1 \in U_1$ için de $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ dir.

Buradan, $u_2 \in U_1^\perp$ bulunur. Şu halde, $U_1^\perp \supset U_2^\perp$ dir.

• Soru 14: $\mathbb{R}^3$ ün $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x+y+z=0 \right\}$ uzayının bir ortonormal tabanını bulunuz.

Gözüm: $\forall \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in S$ için: $x+y+z=0 \Rightarrow z = -x-y$ dir.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ eşitliği göz önüne alındığında; $S = \text{sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ dir.

Ayrıca, $a, b \in \mathbb{R}$ için:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a=b=0$$

yani $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ lineer bağımsızdır.

Böylece, bu küme verilen alt uzayın bir tabanıdır. Bu tabandan hareketle Gram-Schmidt yöntemiyle bir ortonormal taban bulalım.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ diyelim.}$$

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1)(-1)}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1)(-1)} \cdot u_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1)(-1)} = \sqrt{2} \text{ ve}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ olduğundan;}$$

İstenen ortonormal taban olarak;

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{u_1}{\|u_1\|}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{6}/3 \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \frac{u_2}{\|u_2\|} \right\} \text{ kümesi alınabilir.}$$

• Soru 15 : Bir iç çarpım uzayında $\forall x, y \in V$ iken $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ olduğunu gösteriniz.

Gözetim : $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$
 $= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle$$

$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \text{ dir.}$$

• Soru 16 : $\mathbb{C}^n$ de $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortonormal sistemi verilsin. Bu

durumda $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ olmak üzere;
 $\|v\|^2 = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \dots + |\lambda_n|^2$ olduğunu gösteriniz.

Gözetim : $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \rangle$

$$= \lambda_1 \bar{\lambda}_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{=1} + \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \underbrace{\langle u_1, u_2 \rangle}_{=0} + \dots + \lambda_1 \bar{\lambda}_n \underbrace{\langle u_1, u_n \rangle}_{=0} + \lambda_2 \bar{\lambda}_1 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{=0} + \lambda_2 \bar{\lambda}_2 \underbrace{\langle u_2, u_2 \rangle}_{=1}$$

$$+ \dots + \lambda_2 \bar{\lambda}_n \underbrace{\langle u_2, u_n \rangle}_{=0} + \lambda_n \bar{\lambda}_1 \underbrace{\langle u_n, u_1 \rangle}_{=0} + \lambda_n \bar{\lambda}_2 \underbrace{\langle u_n, u_2 \rangle}_{=0} + \dots + \lambda_n \bar{\lambda}_n \underbrace{\langle u_n, u_n \rangle}_{=1}$$

$$\Rightarrow \|v\|^2 = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 + \lambda_2 \bar{\lambda}_2 + \dots + \lambda_n \bar{\lambda}_n = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \dots + |\lambda_n|^2 \text{ dir.}$$

Soru 17: $\mathbb{R}_2^2$ matris uzayında iç çarpım fonksiyonu

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}_2^2 \times \mathbb{R}_2^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{iz}(B^t A)$$

ile tanımlansın. Buna göre $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Sisteminin bir ortonormal baz olduğunu gösteriniz.

Gözetim:

$$\begin{aligned} \bullet \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= \text{iz} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{iz} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{iz} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= 0+0=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= \text{iz} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{iz} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{iz} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= 1+0=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= \text{iz} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{iz} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{iz} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0+1=1 \end{aligned}$$

olduğundan; $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ bir ortonormal bazdır.