SORU: $M: x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ yüzeyinin Gauss eğriliğini bulunuz.

Çözüm: $g(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-1$ alınırsa $\nabla g=\left(2x,\frac{y}{2},\frac{2z}{9}\right)$ yüzey boyunca normal vektör alanıdır.

$X=(-y,4x,0)$, $Y=\left(0,-\frac{4z}{9},y\right)$ vektör alanları, $y\neq 0$ için lineer bağımsız iki teğet vektör alanıdır.

$X\times Y=Z$ ◦ş Z normal v.a hesaplayalım:

$$X\times Y=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -y & 4x & 0 \\ 0 & -\frac{4z}{9} & y \end{vmatrix}=\left(4xy,\,y^2,\,\frac{4yz}{9}\right)=Z$$

- $D_X^Z=(X[Z_1],X[Z_2],X[Z_3])=\left(\langle X,\nabla Z_1\rangle,\langle X,\nabla Z_2\rangle,\langle X,\nabla Z_3\rangle\right)$

$$=\left(-4y^2+16x^2,\,8xy,\,\frac{16xz}{9}\right)$$

$\nabla Z_1=(4y,4x,0)$

$\nabla Z_2=(0,2y,0)$

$\nabla Z_3=\left(0,\frac{4z}{9},\frac{4y}{9}\right)$

- $D_Y^Z=(Y[Z_1],Y[Z_2],Y[Z_3])=\left(\langle Y,\nabla Z_1\rangle,\langle Y,\nabla Z_2\rangle,\langle Y,\nabla Z_3\rangle\right)$

$$=\left(-\frac{16xz}{9},\,\frac{-8yz}{9},\,-\frac{16z^2}{81}+\frac{4y^2}{9}\right)$$

$$\Rightarrow\langle Z,D_X^Z\times D_Y^Z\rangle=\det(Z,D_X^Z,D_Y^Z)$$

$$=\begin{vmatrix} 4xy & y^2 & \frac{4yz}{9} \\ -4y^2+16x^2 & 8xy & \frac{16xz}{9} \\ \frac{-16xz}{9} & \frac{-8yz}{9} & \frac{-16z^2}{81}+\frac{4y^2}{9} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 4 \begin{vmatrix} 4xy & y^2 & \frac{4yz}{9} \\ -y^2+4x^2 & 2xy & 4xz/9 \\ -16xz & -8yz & -16z^2/9 + 4y^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{16}{9} y^2 \begin{vmatrix} 4x & 1 & 4z/9 \\ -y^2+4x^2 & 2x & 4xz/9 \\ 4xz & 2z & 4z^2/9 - y^2 \end{vmatrix} \underset{S_2 \leftrightarrow S_3}{\overset{S_1 \leftrightarrow S_2}{=\!=}} -\frac{16}{9} y^2 \begin{vmatrix} -y^2+4x^2 & 2x & 4xz/9 \\ 4xz & 2z & 4z^2/9 - y^2 \\ 4x & 1 & 4z/9 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{64}{9} y^4 \Rightarrow \langle Z, D_X^Z \times D_Y^Z \rangle = \frac{64}{9} y^4$$

$$\|Z\|^2 = 16y^2\left(x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81}\right) \quad \text{ve} \quad \|Z\|^4 = 16y^4\left(x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81}\right)^2$$

$$K = \frac{1}{36\left(x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81}\right)^2}$$ bulunur.

SORU : $M=\left\{(x,y,z) \mid 2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right\} \subset E^3$ eliptik parabobidi verilsin.

a) M eliptik paraboloidi boyunca Gauss eğrilik fonksiyonunu bulunuz.

b) $P=(2,3,1)$ noktasındaki Gauss eğriliğini bulunuz.

Çözüm :

Hatırlatma : $V \times W = Z$ (normal vektör alanı) olacak şekilde iki teğet vektör alanı V ve W için $K=\frac{\langle Z, D_V Z \times D_W Z\rangle}{\|Z\|^4}$ ile Gauss eğriliği verilir.

$g(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-2z$ alınırsa $Z=\nabla g=\left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, -2\right)=(z_1, z_2, z_3)$ dır.

$V=\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ teğet vektör alanı olsun.

$$D_V Z=\sum_{i=1}^{3} V[z_i] \frac{\partial}{\partial x_i}=V\left[\frac{x}{2}\right] \frac{\partial}{\partial x}+V\left[\frac{2y}{9}\right] \frac{\partial}{\partial y}+V[-2] \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left(V[x_i]=dx_i(V)=v_i \text{ old. kullanılarak}\right) \quad =\frac{v_1}{2} \frac{\partial}{\partial x}+\frac{2v_2}{9} \frac{\partial}{\partial y}+0 \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$ bulunur.

Benzer şekilde başka bir teğet vektör alanı W, $W=\sum_{i=1}^{3} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$D_W Z=\sum_{i=1}^{3} W[z_i] \frac{\partial}{\partial x_i}=W\left[\frac{x}{2}\right] \frac{\partial}{\partial x}+W\left[\frac{2y}{9}\right] \frac{\partial}{\partial y}+W[-2] \frac{\partial}{\partial z}$$

$$=\frac{w_1}{2} \frac{\partial}{\partial x}+\frac{2w_2}{9} \frac{\partial}{\partial y}+0 \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\langle Z, D_V^Z \times D_W^Z \rangle = \begin{vmatrix} \frac{x}{2} & \frac{2y}{9} & -2 \\ \frac{v_1}{2} & \frac{2v_2}{9} & 0 \\ \frac{w_1}{2} & \frac{2w_2}{9} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} \begin{vmatrix} x & y & -2 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} x & y & -2 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \langle (0,0,-2), V \times W \rangle = \frac{1}{9} \langle X, V \times W \rangle \quad \text{"} X = (0,0,-2) \text{"}$$

$V \times W = Z$ alınırsa $\langle X, V \times W \rangle = \langle X, Z \rangle = \left\langle (0,0,-2) \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, -2 \right) \right\rangle = 4$

Böylece, $\langle Z, D_V^Z \times D_W^Z \rangle = \frac{1}{9} \langle X, V \times W \rangle$ old. $\langle Z, D_V^Z \times D_W^Z \rangle = \frac{1}{9} \cdot 4 = \frac{4}{9}$

bulunur.

$$\|Z\|^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{4y^2}{9} + 4 \Rightarrow \|Z\|^4 = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{4y^2}{9} + 4 \right)^2 = 16 \left(\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{9^2} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{36 \left(\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{9^2} + 1 \right)}$$ Gauss eğrilik fonksiyonudur.

b) $P = (2,3,1)$ noktasındaki Gauss eğriliği

$$K(P) = \frac{36}{49^2}$$

dir.

SORU : $\phi(u,v)$ yüzeyi üzerinde $W_p = a.\phi_u + b.\phi_v \neq \vec{0}$ vektörünün asli vektör olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

olmasıdır.

W_p nin asli vektör olması için $\Leftrightarrow S(\vec{W_p}) \times \vec{W_p} = \vec{0}$ ---- (*) olmasıdır. S, ϕ yüzeyinin şekil op. olmak üzere

$$S(\vec{W_p}) = S(a\phi_u + b\phi_v) = a\,S(\phi_u) + b\,S(\phi_v)$$

ve

$$S(\vec{W_p}) \times \vec{W_p} = \big(a\,S(\phi_u) + b\,S(\phi_v)\big) \times (a\phi_u + b\phi_v)$$

$$= a^2\big(S(\phi_u) \times \phi_u\big) + ab\big(S(\phi_u) \times \phi_v\big) + ba\big(S(\phi_v) \times \phi_u\big) + b^2\big(S(\phi_v) \times \phi_v\big)$$

$(\Rightarrow)$: W_p asli vektör olsun.

$$S(\phi_u) = N_u = \frac{eG - fF}{EG - F^2}\phi_u + \frac{fE - eF}{EG - F^2}\phi_v$$

$$S(\phi_v) = N_v = \frac{fG - gF}{EG - F^2}\phi_u + \frac{gE - fF}{EG - F^2}\phi_v$$

olduğu kullanılırsa

$$S(\vec{W_p}) \times \vec{W_p} = a^2.\left(\frac{eF - fE}{EG - F^2}\right)\phi_u \times \phi_v + ab\left(\frac{eG - fF}{EG - F^2}\right)\phi_u \times \phi_v + ba\left(\frac{fF - gE}{EG - F^2}\right)\phi_u \times \phi_v$$

$$+ b^2\left(\frac{fG - gF}{EG - F^2}\right)\phi_u \times \phi_v$$

$$= -\frac{\phi_u \times \phi_v}{EG - F^2}\left\{a^2(fE - eF) + ab(gE - eG) + b^2(gF - fG)\right\}$$

(*) dan bu sonuç sıfır olacağından ve $\phi_u \times \phi_v \neq 0$ old. dan

$$a^2(fE-eF)+ab(gE-eG)+b^2(gF-fG)=0$$

ifadesi $\vec{W_p}$ nin asli vektör olma koşuludur. Yani

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \text{ dır.}$$

$(\Longleftarrow)$: $\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$ olduğunu kabul edelim. Yani,

$$b^2(gF-fG)+ab(gE-eG)+a^2(fE-eF)=0 \quad --- (**) \text{ vardır.}$$

$\vec{W_p} = a\phi_u + b\phi_v$ vektörünün asli vektör olup olmadığı kontrol edilirse

$S(W_p) \times W_p = 0$ mıdır?

$$S(W_p) \times W_p = S(a\phi_u + b\phi_v) \times (a\phi_u + b\phi_v)$$

$$= a^2 S(\phi_u) \times \phi_u + ab\, S(\phi_u) \times \phi_v + ba\, S(\phi_v) \times \phi_u + b^2 S(\phi_v) \times \phi_v$$

$$S(\phi_u) = \frac{eG-fF}{EG-F^2}\phi_u + \frac{fE-eF}{EG-F^2}\phi_v$$

$$S(\phi_v) = \frac{fG-gF}{EG-F^2}\phi_u + \frac{gE-fF}{EG-F^2}\phi_v$$

$$\Rightarrow S(W_p)\times W_p = a^2\left(\frac{fE-eF}{EG-F^2}\right)(\phi_v\times\phi_u)+ab\left(\frac{eG-fF}{EG-F^2}\right)(\phi_u\times\phi_v)+ba\left(\frac{gE-fF}{EG-F^2}\right)(\phi_v\times\phi_u)$$

$$+b^2\left(\frac{fG-gF}{EG-F^2}\right)(\phi_u\times\phi_v)$$

$$=-\frac{\phi_u\times\phi_v}{EG-F^2}\left(a^2(fE-eF)+ab(gE-eG)+b^2(gF-fG)\right)$$

(**) kullanılırsa $S(\vec{W_p})\times\vec{W_p}=\vec{0}$ sonucu elde edilir.

Soru: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to E^3$, $\alpha(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\sqrt{2}t, \sin\sqrt{2}t, 1)$ eğrisinin S^2 küresi üzerinde olduğunu gösteriniz. Ayrıca, α nın asimptotik eğri ve Jeodezik eğri olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: S^2 birim küresinin denklemi $x^2+y^2+z^2=1$ olduğundan ve $\alpha(t)$ bileşenleri için

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\sqrt{2}t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\cos^2\sqrt{2}t + \sin^2\sqrt{2}t + 1\right) = 1$$

old. dan $\alpha(t)$, S^2 üzerindedir.

S^2 nin şekil operatörünün matrisinin I_2 olduğunu kullanacağız.

$\alpha(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\sqrt{2}t, \sin\sqrt{2}t, 1) \Rightarrow \alpha'(t) = (-\sin\sqrt{2}t, \cos\sqrt{2}t, 0) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = 1$ olup

α eğrisi birim hızlıdır. Böylece, $T(t) = \alpha'(t) = (-\sin\sqrt{2}t, \cos\sqrt{2}t, 0)$ dır.

Asimptotik eğri: α nın her noktasındaki hız vektörü asimp. doğrultu oluyorsa, α asimp. eğri

$\langle S(T), T\rangle = 0$ ise α, asimptotik eğridir.

S^2 için $S(X) = X$ old. kullanılarak $S(T) = T$ ve $\langle S(T), T\rangle = \langle T, T\rangle$ old. bulunur.

$\langle T, T\rangle = \langle \alpha', \alpha'\rangle = 1 \neq 0$ olduğundan α asimptotik eğri değildir.

Geodezik eğri:

"$\alpha''(t) = \lambda(t) N(t)\big|_\alpha$ ise α, S^2 üzerinde geodeziktir"

$\alpha''(t) = (-\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t, -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t, 0)$ ve $N = (x, y, z)$ ol. üzere $N\big|_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\sqrt{2}t, \sin\sqrt{2}t, 1)$

dır.

$$\alpha''(t) = (-\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t, -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t, 0) = \lambda\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\sqrt{2}t, \sin\sqrt{2}t, 1) = \lambda N\big|_\alpha$$

o.ş $\lambda \in \mathbb{R}$ bulunamadığından α geodezik değildir.