SORU : E^3 de $x^2+y^2=4$ denklemi ile verilen silindir yüzeyi M ile gösterilsin.

a) M nin Gauss dönüşümünü bulunuz.

b) M nin şekil op karşılık gelen matrisi bulunuz.

$$M=\{(x,y,z)\in E^3 \mid x^2+y^2=4\}$$

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2-4$ kapalı denklemi için birim normal vektör alanı

$\nabla f=(2x,2y,0)$ $\quad \|\nabla f\|=\sqrt{4x^2+4y^2}=4$ ol. üzere

$$N=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}=\frac{1}{4}(2x,2y,0)=\frac{1}{2}(x,y,0) \text{ dir.}$$

O halde $P=(p_1,p_2,p_3)\in M$ için $\eta: M \longrightarrow S^2\subset E^3$

$$P\longrightarrow \eta(P)=N(P)=\frac{1}{2}(p_1,p_2,0)$$

$\eta(P)\in S^2$ old. dan $x^2+y^2+z^2=1$ olması gerektiğinden $\left(\frac{p_1}{2},\frac{p_2}{2},0\right)\in S^2$ noktaları küre üzerindeki $x^2+y^2=4$ denklemini sağlayan $z=0$ düzlemindeki ekvator dairesidir.

b) $N=\frac{1}{2}(x,y,0)$; $(x,y,z)=P$ de birim normal vektör alanı old. dan $T_M(P)$ nin

bir bazı $\gamma=\{X=(-y,x,0),\ Y=(0,0,1)\}$ dir.

$$S(X)=D_X^N=(\langle X,\nabla N_1\rangle, \langle X,\nabla N_2\rangle, \langle X,\nabla N_3\rangle)$$

$$=(\langle(-y,x,0)(\tfrac{1}{2},0,0)\rangle, \langle(-y,x,0),(0,\tfrac{1}{2},0)\rangle, \langle(-y,x,0)(0,0,0)\rangle)$$

$$=\left(-\frac{y}{2},\frac{x}{2},0\right)=\frac{1}{2}X+0.Y$$

$$S(Y) = D_Y^N = (\langle Y, \nabla N_1\rangle, \langle Y, \nabla N_2\rangle \langle Y, \nabla N_3\rangle)$$

$$= (\langle (0,0,1)(\tfrac{1}{2},0,0)\rangle \langle (0,0,1)(0,\tfrac{1}{2},0)\rangle, \langle (0,0,1),(0,0,0)\rangle$$

$$= (0,0,0) = 0.X' + 0.Y$$

olup

$$S = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$\boxed{\text{VEYA}}$

$\phi(u,v) = (2\cos u, 2\sin u, v)$

$\phi_u = (-2\sin u, 2\cos u, 0)$

$\phi_v = (0,0,1)$

$\phi_{uu} = (-2\cos u, -2\sin u, 0)$

$\phi_{uv} = (0,0,0)$

$\phi_{vv} = (0,0,0)$

$E = 4 \qquad e = -\langle N, \phi_{uu}\rangle = 2$

$F = 0 \qquad f = 0$

$G = 1 \qquad g = 0$

$N = \dfrac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} \qquad \phi_u \times \phi_v = (2\cos u, 2\sin u, 0)$

$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{4} = 2$

$N = (\cos u, \sin u, 0)$

$$S = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

SORU: $M=\{(x,y,z)\in E^3 \mid x^2+y^2=1\}$ silindiri üzerindeki $\alpha(t)=(\cos t, \sin t, 1)$ eğrisi veriliyor. α eğrisi, M üzerinde eğrilik çizgisi (asli eğri) midir? Araştırınız.

Hatırlatma: T vektör alanı S lineer dönüşümünün karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa ($S(T)=\lambda T$) α eğrisine bir eğrilik çizgisi (asli-asal eğri) denir.

* α eğrisinin eğrilik çizgisi old.nu göstermek için $S(\alpha')\times\alpha'=0$ old. gösterilmelidir.
Bunun için yüzeyin b.n.v.a hesaplanmalıdır:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-1$$

$$\nabla f=(2x,2y,0),\ \|\nabla f\|=\sqrt{4x^2+4y^2}=2 \quad \text{old.} \quad N=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}=(x,y,0)$$

$$\alpha(t)=(\cos t,\sin t,1)$$
$$\alpha'(t)=(-\sin t,\cos t,0)$$

$$S(\alpha')=D_{\alpha'}N=\frac{d}{dt}(N\circ\alpha)\Big|_{\alpha}=\frac{d}{dt}(\cos t,\sin t,0)$$
$$=(-\sin t,\cos t,0)$$

$$S(\alpha')\times\alpha'=(-\sin t,\cos t,0)\times(-\sin t,\cos t,0)$$
$$=0$$

old. α, eğrilik çizgisidir.

SORU : $\phi : E^2 \to E^3$

$$(u,v) \to \phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$$

yüzeyi için v-parametre eğrisi bir eğrilik çizgisi (asli eğri) midir? Gösteriniz.

$\alpha(v) = (u_0 \cos v, u_0 \sin v, u_0^2)$

$\alpha'(v) = (-u_0 \sin v, u_0 \cos v, 0)$

α eğrisinin yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olması için $\Leftrightarrow S(\alpha') \times \alpha' = 0$ dır.

$$S(\alpha') = D_{\alpha'} N = \frac{d}{dv}(N \circ \alpha)\Big|_{\alpha(v)}$$

$\phi_u = (\cos v, \sin v, 2u) \qquad \phi_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$

$\phi_u \times \phi_v = (2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u)$

$\| \phi_u \times \phi_v \| = u\sqrt{4u^2+1}$

$$N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\| \phi_u \times \phi_v \|} = \frac{1}{u\sqrt{4u^2+1}}(2u^2\cos v, -2u^2 \sin v, u) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(2u\cos v, -2u\sin v, 1)$$

$$(N\circ\alpha)\Big|_{\alpha(v)} = \frac{1}{\sqrt{1+4u_0^2}}(2u_0 \cos v, -2u_0 \sin v, 1)$$

$$\frac{d}{dv}(N\circ\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+4u_0^2}}(-2u_0 \sin v, -2u_0 \cos v, 0)$$

yani

$$S(\alpha') = \frac{1}{\sqrt{1+4u_0^2}}(-2u_0 \sin v, -2u_0 \cos v, 0) \text{ bulunur.}$$

$$S(\alpha') \times \alpha' = \frac{1}{\sqrt{1+4u_0^2}}(0, 0, -2u_0^2 \sin v \cos v) \neq (0,0,0)$$ old. dan eğrilik çizgisi

değildir.

Soru: $z = x^3 - 3xy^2$ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

Hatırlatma: M yüzeyinin her noktada sıfırdan farklı bir normal vektör alanı Z olsun $X \times Y = Z$ olacak şekilde iki teğet vektör alanı X ve Y ise

$$K = \frac{\langle Z, D_X^Z \times D_X^Y \rangle}{\|Z\|^4} \quad , \quad H = \frac{\langle Z, D_X^Z \times Y + X \times D_Y^Z \rangle}{2\|Z\|^3}$$

bağıntıları geçerlidir.

$g(x,y,z) = x^3 - 3xy^2 - z$ alınırsa $\nabla g = (3x^2 - 3y^2, -6xy, -1)$ yüzey boyunca normal vektör alanıdır.

$X = (1, 0, 3x^2 - 3y^2)$, $Y = (0, -1, 6xy)$ vektör alanları $x \neq 0$ için lineer bağımsız iki teğet vektör alanıdır.

Hatırlatmadan $X \times Y = Z$ ol. üzere, Gauss eğrilik fonksiyonunu hesaplayacağımızdan Z hesaplanır.

$$X \times Y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3x^2 - 3y^2 \\ 0 & -1 & 6xy \end{vmatrix} = (3x^2 - 3y^2, -6xy, -1) = Z$$

- $D_X^Z = (X[z_1], X[z_2], X[z_3]) = (\langle X, \nabla z_1 \rangle, \langle X, \nabla z_2 \rangle, \langle X, \nabla z_3 \rangle)$
$= (6x, -6y, 0)$

$\nabla z_1 = (6x, -6y, 0)$

$\nabla z_2 = (-6y, -6x, 0)$

$\nabla z_3 = (0,0,0)$

$$\bullet\, D_Y^Z = \left(\langle Y, \nabla z_1\rangle, \langle Y, \nabla z_2\rangle, \langle Y, \nabla z_3\rangle\right)$$

$$= \left(\langle (0,-1,6xy), (6x,-6y,0)\rangle, \langle (0,-1,6xy), (-6y,-6x,0)\rangle, \langle (0,-1,6xy),(0,0,0)\rangle\right)$$

$$= (6y, 6x, 0)$$

$$\Rightarrow \langle Z, D_X^Z \times D_Y^Z \rangle = \det(Z, D_X^Z, D_Y^Z) = \begin{vmatrix} 3x^2-3y^2 & -6xy & -1 \\ 6x & -6y & 0 \\ 6y & 6x & 0 \end{vmatrix} = -36(x^2+y^2)$$

$$\|Z\|^2 = \langle Z, Z\rangle = 9(x^2-y^2)^2 + 36x^2y^2 + 1 = 9(x^2+y^2)^2 + 1$$

$$\|Z\|^4 = \left(9(x^2+y^2)^2+1\right)^2$$

$$\Rightarrow K = -\frac{36(x^2+y^2)}{\left(9(x^2+y^2)^2+1\right)^2}$$

SORU : $\phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2v)$ yüzeyinin minimal yüzey olup olmadığını araştırınız.

Hatırlatma : • E^3 uzayında H ortalama eğriliği sıfır olan regüler yüzeylere minimal yüzeyler denir.

• $\phi : U \subset E^2 \longrightarrow E^3$ regüler yaması için $K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$ ve $H = \dfrac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$

bağıntıları geçerlidir. Burada E, F, G 1. temel form katsayıları
$e\ f\ g$ 2. temel form katsayılarıdır.

$\phi_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\phi_v = (-u\sin v, u\cos v, 2)$

$E = \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1$, $F = \langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0$ $G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle = u^2 + 4$

$$\cdot N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \frac{(2\sin v, -2\cos v, u)}{\sqrt{4+u^2}} \quad \text{b.n.v.a}$$

$e = \langle S(\phi_u), \phi_u \rangle = \langle N_u, \phi_u \rangle = -\langle \phi_{uu}, N \rangle$ old. $\phi_{uu} = (0,0,0)$ ile $e = 0$

$$f = \langle S(\phi_u), \phi_v \rangle = \langle N_u, \phi_{vv} \rangle = \left\langle \left(-\frac{2u\sin v}{(u^2+4)^{3/2}}, \frac{2u\cos v}{(u^2+4)^{3/2}}, \frac{4}{(u^2+4)^{3/2}} \right), (-u\sin v, u\cos v, 2) \right\rangle$$

$$= \frac{2}{\sqrt{u^2+4}}$$

$g = \langle S(\phi_v), \phi_v \rangle = \langle N_v, \phi_v \rangle = -\langle \phi_{vv}, N \rangle$ old. $\phi_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$ ile

$$g = -\left\langle (-u\cos v, -u\sin v, 0), \frac{(2\sin v, -2\cos v, u)}{\sqrt{4+u^2}} \right\rangle$$

$g = 0$

$$\Rightarrow H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG-F^2)}$$

$$= \frac{0.(u^2+4) - 2\frac{2}{\sqrt{u^2+4}}.0 + 0.1}{2(u^2+4-0)} = 0$$

old. yüzey minimal yüzeydir.

Soru: Düzlemin şekil operatörü sıfırdır Gösteriniz.

$$D=\{ax+by+cz+d=0 \quad ,a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

$$S:\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$$

$$X\longrightarrow S(X)=D_X^N=\left(X[N_1],\ X[N_2],X[N_3]\right)$$

$$f:E^3\to\mathbb{R}$$

$$(x,y,z)\to f(x,y,z)=ax+by+cz+d$$

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\nabla f=(a,b,c)$$

$$\|\nabla f\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$N=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$$

$$S(X)=\left(X[N_1],\ X[N_2],\ X[N_3]\right)$$

$$=\left(X\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right],\ X\left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right],\ X\left[\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right]\right)$$

$$=(0,0,0)=\vec{0}$$